Изборен тест за ИМО 2026

Ден 1: Решенија и распределба на поени

Задача 1. Нека n е природен број, d е цел број таков што $n \geq d \geq 0$ и нека B_n е множеството од сите бинарни низи со должина n. Непразно подмножество S од B_n е *совршено во однос на* d, ако за секој $w \in B_n$ постои точно еден $u \in S$ кој што се разликува од w на најмногу d позиции. За $n = 227$ најдете ги сите природни броеви d такви што постои совршено подмножество S од B_n во однос на d.
(Пример: $d = 2$, $n = 4$, ако $S = \{1000, 1011, 1100, 1101\}$ тогаш за $w = 1111$ постојат 3 елементи од S кои се разликуваат од w во најмногу $d = 2$ позиции - следствено, S не е совршено во однос на d.)

Решение. Ќе покажеме дека единствените можности се $d \in \{0, 113, 227\}$. Да забележиме дека: за $d = 0$, множеството $S = B_n$ е совршено; за $d = 227$ и произволно избрана бинарна низа $b \in B_n$, множеството $S = \{b\}$ е совршено; за $d = 113$ множеството $S = \{(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}), (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})\}$ е совршено. **(1п)**

Да покажеме дека ова се единствените можности за d. Нека постои совршено подмножество S од B_n во однос на d, за некој $d \in \{1, 2, 3 \ldots, 112\} \cup \{114, 115, 116, \ldots, 226\}$. За даден $w \in B_n$ постојат $\binom{n}{k}$ бинарни низи во B_n кои се разликуваат од w на точно k позиции. Оттука, бројот на бинарни низи кои се разликуваат од w на најмногу d позиции е еднаков на

$$N_d = \sum_{i=0}^{d} \binom{227}{d} .$$

(1п)

Бројот N_d мора да го дели вкупниот број на бинарни низи, што е еднаков на $|B_n| = 2^n$; следствено, N_d мора да е степен на 2, т.е. важи

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{227}{d} = 2^m ,$$

за некое $0 < m < 227$. **(1п)** Бидејќи 227 е прост број, имаме дека $227 \mid \binom{227}{d}$ кога $0 < d < 227$, па мора да важи $2^m \equiv 1 \pmod{227}$. **(1п)** Сега, редот на 2 по модул 227 мора да го дели $227 - 1 = 2 \cdot 113$. **(1п)** Како што $2, 2^2 \not\equiv 1 \pmod{227}$, мора да имаме дека $m = 113$ или $m = 226$. **(1п)** Ако $m = 226$, тогаш $d = 113$; во спротивно, $227 \equiv 3 \pmod{8}$, па 2 не е квадратен остаток по модул 227, што дава дека $2^{113} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{227}$, противречност. **(1п)** $\square$

Задача 2. Нека во $\triangle ABC$ точките M и N се на страната BC, S е пресекот на опишаните кружници околу $\triangle ABM$ и $\triangle ANC$, а S' е симетричната точка на S во однос на средината R на страната BC. Правата BS ја сече AC во P, а правата CS ја сече AB во Q. Докажете дека правите QM, PN и AS се сечат во една точка или се паралелни ако и само ако точките A, M, S' и C лежат на кружница.

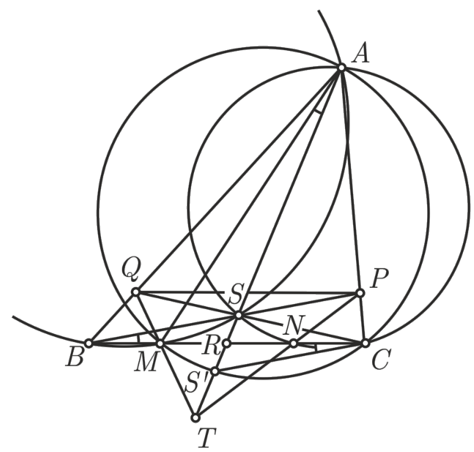
Решение. Нека T е пресечната точка на QM и PN. Доказот ќе го направиме со помош на неколку еквивалентни тврдења. Прво ќе докажеме дека точките A, M, S' и C лежат на кружница ако и само ако S лежи на тежишната линија AR повлечена од темето A.

Бидејќи S и S' се симетрични во однос на средината R на BC, важи $\triangle BRS \cong \triangle CRS'$, од каде $\angle MBS = \angle MCS'$. Освен тоа $\angle MBS = \angle MAS$, т.е. $\angle MCS' = \angle MAS$. Според ова точките A, M, S' и C лежат на кружница ако и само ако точката A лежи на $S - R - S'$. Последното пак е еквивалентно на тоа да S лежи на тежишната линија AR. **(1п)**

Од друга страна, S лежи на AR ако и само ако степените на точката R во однос на опишаните кружници на $\triangle ABM$ и $\triangle ANC$ се еднакви, т.е.

$$\overline{RM} \cdot \overline{RB} = \overline{RS} \cdot \overline{RA} = \overline{RN} \cdot \overline{RC}\,, \quad \textbf{(1п)}$$

што (бидејќи R е средина на BC) е еквивалентно на $\overline{MR} = \overline{RN}$, т.е. еквивалентно на $\overline{BM} = \overline{NC}$. **(1п)**



Нека R' е пресечната точка на AS и BC. Степените на точката R' во однос на двете кружници се еднакви, т.е. $\overline{R'M} \cdot \overline{R'B} = \overline{R'N} \cdot \overline{R'C}$. Од Теоремата на Менелај за BP и $\triangle R'CA$ и за CQ и $\triangle R'BA$ имаме:

$$\frac{\overline{R'B}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = -\frac{\overline{R'S}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{R'C}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QA}}\,. \quad \textbf{(1п)}$$

Сега, од теоремата на Талес/Менелај правите QM, AS и PN се паралелни или се сечат во една точка ако и само ако

$$\frac{\overline{R'M}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{R'N}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}}\,, \quad \textbf{(1п)}$$

што според претходното равенство е еквивалентно со

$$\frac{\overline{R'M}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{R'B}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{R'N}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{R'C}}{\overline{CB}}, \text{ т.е. со } \frac{\overline{NC}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{R'N} \cdot \overline{R'C}}{\overline{R'M} \cdot \overline{R'B}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CB}} = 1\,. \quad \textbf{(1п)}$$

Заклучуваме дека правите QM, AS и PN се паралелни или се сечат во една точка ако и само ако $\overline{BM} = \overline{NC}$, што го комплетира доказот. **(1п)** $\square$

Задача 3. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за секои позитивни реални броеви a, b, c важи:

$$\begin{aligned} a + f(b,c) &= f(a+b, a+c) \\ \min\{a, f(b,c)\} &= f(\min\{a,b\}, \min\{a,c\}) \\ f(f(a,b),c) &= f(a, f(b,c)) \,. \end{aligned}$$

Решение. Со оглед дека f е бинарна операција во $\mathbb{R}^+$, да означуваме $x \otimes y = f(x,y)$. Одговорот гласи: Единствено операциите

$x \oplus y = \min\{x,y\}$,
$x \oplus y = \max\{x,y\}$,
$x \oplus y = x$ (прва проекција),
$x \oplus y = y$ (втора проекција).

(1п)

Нека $P(a,b,c)$ и $Q(a,b,c)$ се првиот и вториот исказ од условот. Ако $b \geq a \geq c$, тогаш $Q(a,b,c) \implies b \otimes c \geq \min(a, b \otimes c) = a \otimes c$.

Слично, ако $a \geq b \geq c$ тогаш $Q(a,b,c) \implies a \geq \min(a, b \otimes c) = b \otimes c$. Специјално, $b \geq b \otimes c$.

Да претпоставиме дека $b \geq c > b \otimes c$, и да избереме $a \in (b \otimes c, c)$. Тогаш $Q(a,b,c) \implies b \otimes c = a \otimes a$. Од друга страна, од $P(c-a, a, a)$ имаме $b \otimes c = a \otimes a = c \otimes c - (c-a) < c \otimes c \leq b \otimes c$, противречност. Значи $b \geq c \implies b \geq b \otimes c \geq c$. Од причини на симетрија, имаме и аналогни искази со заменети улоги на b и c.

Проблемот за определување на $b \otimes c$ за секои $b, c \in \mathbb{R}^+$ се сведува на определување на $1 \otimes x$ и $x \otimes 1$ за секој $x \in \mathbb{R}^+$, користејќи го $P(1 - \min(b,c), b, c)$ при $\min(b,c) < 1$, и $P(b-1, 1, 1+c-b)$ или $P(c-1, 1+b-c, 1)$ при $\min(b,c) > 1$. **(1п)**

Имаме $1 \geq 1 \otimes 1 \geq 1 \implies 1 \otimes 1 = 1$. Притоа, функцијата $x \otimes 1$ за $x > 1$ го определува $1 \otimes x$ при $x < 1$ користејќи дека $1 \otimes x = (2-x) \otimes 1 - (1-x), x < 1$.

Сега, за даден $x > 1$ и произволен $a \in [1, x]$ имаме

$$Q(a,1,x) \implies 1 \otimes a = \begin{cases} 1, & a \in [1, 1 \otimes x] \\ a, & a \in [1 \otimes x, x] \end{cases}$$

Бидејќи $x \geq 1 \otimes x \geq 1, \forall x \geq 1$, горното повлекува дека постои $c \geq 1$ (можеби $+\infty$) такво што $1 \otimes x = x, \forall x \in [1, c]$ и $1 \otimes x = c, \forall x \geq c$.

Слично аргументирање е применливо за $x \otimes 1, x \geq 1$ и води до заклучок дека постои $c' \leq 1$ такво што $1 \otimes x = 1, \forall x \in [c', 1]$ и $1 \otimes x = x + 1 - c', \forall x \in (0, c']$. Од причини на симетрија, аналогни искази важат за $x \otimes 1$. **(1п)**

Користејќи го горниот израз за $b \otimes c$, имаме дека постојат $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ такви што за секои $b, c \in \mathbb{R}^+$,

$$b \otimes c = \max(\min(b + \varepsilon_1, c), \min(b, c + \varepsilon_2)) \,.$$

(1п)

Да забележиме дека барем еден од $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ е не-негативен бидејќи $1 \otimes 1 = 1$. Ако $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +\infty$, тогаш $b \otimes c = \max(b,c)$. Ако $\varepsilon_1 = +\infty$ и $\varepsilon_2 \leq 0$ тогаш $b \otimes c = c$ и по симетрија го добиваме решението $b \otimes c = b$. **(1п)**

Конечно, ако $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ тогаш земајќи $c > b + 2\varepsilon_1$ добиваме $b \otimes c = b + \varepsilon_1$, па земајќи $a > b + 2\varepsilon_1$ имаме $b + \varepsilon_1 = b \otimes (c \otimes a) = (b \otimes c) \otimes a = b + 2\varepsilon_1 \implies \varepsilon_1 = 0$. Ова ни дава решение $b \otimes c = \max(\min(b, c), \min(b, c + \varepsilon_2)) = \min(b, c + \max(0, \varepsilon_2))$. Сличен аргумент на претходниот потврдува дека $\varepsilon_2 > 0$ е невозможно. **(1п)**

Значи, единствени можни решенија се $b \otimes c \in \{\min(b, c), \max(b, c), b, c\}$. Непосредно проверуваме дека сите задоволуваат. **(1п)** □

Забелешки за распределбата на поени:

- За некомплетен одговор не се доделува поен.
- За парцијална проверка (некое, не сите) на четирите решенија не се доделува поен.

Изборен тест за ИМО 2026

Ден 2: Решенија и распределба на поени

Задача 4. Нека a и b се заемно прости позитивни цели броеви, и нека $c = a + b$. Дефинираме $A = \{\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a-1}{a}\}$, $B = \{\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}\}$, и $C = \{\frac{1}{c}, \frac{2}{c}, \ldots, \frac{c-1}{c}\}$.
Докажете дека помеѓу секои два различни елементи на C постои елемент на $A \cup B$.

Решение. Бидејќи a и b се заемно прости истото важи за a и c, како и за b и c, а било кои две од A, B и C се дисјунктни. **(1п)** Доволно е да докажеме дека за секој $i \in \{1, 2, \ldots, c-2\}$ постои $x \in A \cup B$, таков што $\frac{i}{c} < x < \frac{i+1}{c}$. **(1п)** Нека $i \in \{1, 2, \ldots, c-2\}$ е таков што постои $j \in \{1, 2, \ldots, b-2\}$ за кој $\frac{j}{b} \leq \frac{i}{c} < \frac{i+1}{c} \leq \frac{j+1}{b}$. Поради дисјункноста на B и C, неравенствата се стриктни. Множејќи со bc добиваме $jc < ib$ и $(i+1)b < (j+1)c$. **(1п)**
Сега, $ib > jc = jb + ja$ повлекува $(i-j)b + (i-j)a > ja + (i-j)a = ia$, т.е. $(i-j)c > ia$. **(1п)**
Слично, $(i+1)b < (j+1)c = (j+1)a + (j+1)b$ повлекува

$$(i-j)b + (i-j)a < (j+1)a + (i-j)a = (i+1)a\,,$$

т.е. $(i-j)c < (i+1)a$. Делејќи ги двете неравенства со ac добиваме $\frac{i}{c} < \frac{i-j}{a} < \frac{i+1}{c}$. **(1п)** Од $jc < ib < ic$ следува $j < i$, а од $(i+1)b < (j+1)c = (j+1)b + (j+1)a$ и $j + 1 < b$ следува $(i-j)b < (j+1)a$, односно $0 < i - j < a$ па $\frac{i-j}{a} \in A$. **(1п)**
Заклучуваме дека доколку за некој интервал $(\frac{i}{c}, \frac{i+1}{c})$ за $i \in \{1, 2, \ldots, c-2\}$, не постои елемент од B, тогаш постои елемент од A. Оттука, во секој интервал $(\frac{i}{c}, \frac{i+1}{c})$, постои барем еден елемент од $A \cup B$. **(1п)** $\square$

Задача 5. Нека P е внатрешна точка за $\triangle ABC$. Правите AP, BP, и CP ги сечат страните BC, CA, и AB во точките A_1, B_1, и C_1, соодветно. Нека L е пресечната точка на правите AP и B_1C_1. Точките M и N се средишни за отсечките BL и CL, соодветно. Правата MN ги сече BA, BP, CP и CA во точките Q, S, T, и R, соодветно. Докажете дека опишаните кружници на $\triangle AQR$ и $\triangle PST$ имаат заедничка точка на правата AP.

Решение. Ќе ги користиме следните помошни тврдења.

Лема 1. Четириаголниците $BSLQ$ и $CRLT$ се паралелограми.

Доказ 1. Бидејќи M и N се средни точки на BL и CL, а MN е средна линија во $\triangle BCL$, важи $MN \parallel BC$. Ако K е пресекот на BC и B_1C_1 (можеби бесконечен) и бидејќи C_1C, B_1B и AL се сечат во една точка, важи $-1 = (C_1, B_1; L, K) \overset{B}{=} (Q, S; M, MN_\infty)$, па M е средна точка на QS. Слично, $-1 = (C_1, B_1; L, K) \overset{C}{=} (T, R; N, MN_\infty)$, па N е средна точка на TR. **(2п)** Ова повлекува дека $BSLQ$ и $CRLT$ се паралелограми. **(1п)** ⋄

Доказ 2. Бидејќи M и N се средни точки на BL и CL, а MN е средна линија во $\triangle BCL$, важи $MN \parallel BC$. Ако K е пресекот на BC и B_1C_1. Користејќи ги теоремите на Чева и менелај на $\triangle AC_1B_1$ за точка P и права $B - C - K$, добиваме

$$\frac{\overline{C_1L}}{\overline{LB_1}} = \frac{\overline{C_1B}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CB_1}} = -\frac{\overline{C_1K}}{\overline{KB_1}}\,.$$

Од теорема на Менелај на QSB_1C_1 и права $M - B - L - B$, добиваме

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LB_1}} \cdot \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BS}}$$

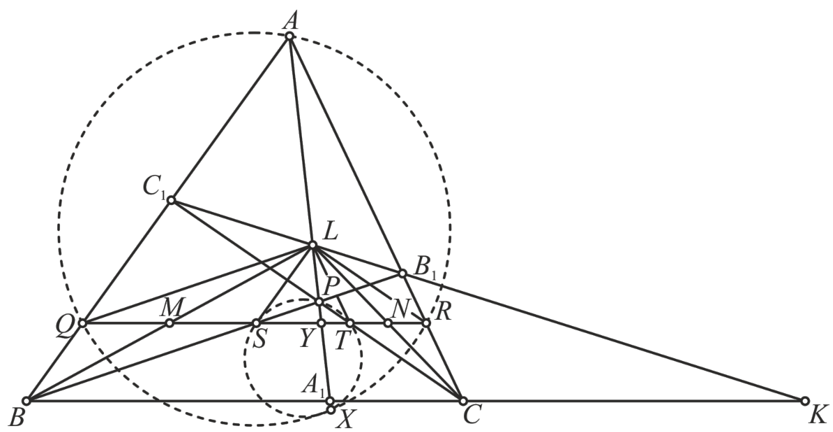
Нека C_1R ја сече BC во U. Од теорема на Менелај на $\triangle C_1RB_1$ и права $C - K - U$, добиваме

$$\frac{\overline{C_1U}}{\overline{UR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CB_1}} = -\frac{\overline{C_1K}}{\overline{KB_1}} = \frac{\overline{C_1L}}{\overline{LB_1}}\,.$$

Комбинирајќи ги последните две равенства добиваме

$$\frac{\overline{QM}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{BC_1}} \cdot \frac{\overline{C_1U}}{\overline{UR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CB_1}} \cdot \frac{\overline{B_1B}}{\overline{BS}} = 1\,,$$

каде последното равенство е точно бидејќи $SR \equiv QR \parallel BC \equiv BU$. Следува дека M е средна точка на QS, а од симетрија N е средна точка на TR. **(2п)** Добиваме дека $BSLQ$ и $CRLT$ се паралелограми. **(1п)**
Ако $B_1C_1 \parallel BC$, тогаш од теорема на Чева на $\triangle C_1B_1A$ и точка P, добиваме $\frac{\overline{C_1L}}{\overline{LB_1}} = \frac{\overline{C_1B}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{CB_1}} = 1$, односно L е средна точка на C_1B_1. Бидејќи $B_1C_1 \parallel QS$, а M е средна на QS, добиваме дека $BSLQ$. Од симетрија $CRLT$ е паралелограм. ⋄



Лема 2. Опишаните кружници на $\triangle AQR$ и $\triangle PST$ имаат заедничка точка на правата AP.

Доказ 1. Нека $X \neq P$ и $X' \neq P$ се вторите пресеци на AP со опишаната кружница на $\triangle PST$ и $\triangle AQR$, соодветно. Ќе докажеме дека $X \equiv X'$. **(1п)**
Бидејќи $\angle QTX \equiv \angle STX = \angle SPX = \angle QLX$ ($SP \parallel QL$), точката X припаѓа на опишаната кружница на QTL. **(1п)** Слично, $\angle X'QT \equiv \angle X'QR = \angle X'AR = \angle X'LT$ ($AR \parallel LT$), точката X' исто така припаѓа на опишаната кружница на QTL. **(1п)** Затоа, $X \equiv X' \neq L$ како вториот пресек на AP со опишаната кружница на QTL. **(1п)** ⋄

Доказ 2. Нека $X \neq P$ е вториот пресек на AP со опишаната кружница на $\triangle PST$. Од степен на точка Y кон опишаната кружница на $\triangle PST$, добиваме $\overline{PY} \cdot \overline{XY} = \overline{SY} \cdot \overline{TY}$, **(1п)** Нека Y е пресечната точка на правите AP и MN. Користејќи ги $\triangle AYR \sim \triangle\ AA_1C$, $\triangle PYT \sim \triangle PA_1C$, $\triangle AA_1B \sim \triangle LYS$ и $\triangle PA_1B \sim \triangle LYQ$, добиваме

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{PY}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{RY}}{\overline{TY}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{RY}}{\overline{TY}} \cdot \frac{\overline{AA_1}}{\overline{BA_1}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{RY}}{\overline{TY}} \cdot \frac{\overline{LY}}{\overline{SY}} \cdot \frac{\overline{QY}}{\overline{LY}} = \frac{\overline{RY}}{\overline{TY}} \cdot \frac{\overline{QY}}{\overline{SY}}\,. \quad \textbf{(2п)}$$

Комбинирајќи двете равенства, добиваме

$$\overline{AY} \cdot \overline{XY} = \frac{\overline{AY}}{\overline{PY}} \cdot \overline{SY} \cdot \overline{TY} = \frac{\overline{RY}}{\overline{TY}} \cdot \frac{\overline{QY}}{\overline{SY}} \cdot \overline{SY} \cdot \overline{TY} = \overline{QY} \cdot \overline{RY}\,.$$

Од степен на точка, X припаѓа на опишаната кружница на $\triangle AQR$. **(1п)** ⋄

Доказ 3. Нека $X \neq P$ е вториот пресек на AP со опишаната кружница на $\triangle PST$. Од степен на точка Y кон опишаната кружница на $\triangle PST$, добиваме $\overline{PY} \cdot \overline{XY} = \overline{SY} \cdot \overline{TY}$, **(1п)** Нека Y е пресечната точка на правите AP и MN.
Дефинираме хомотетија χ со центар Y, таква што $\chi(S) = Q$. Користејќи ги $SL \parallel BQ \equiv BA$, $BP \equiv BS \parallel QL$ и $TL \parallel CR \equiv CA$, добиваме $\chi(L) = A$, $\chi(P) = L$ и $\chi(T) = R$, **(2п)** следствено

$$\overline{AY} \cdot \overline{XY} = \frac{\overline{AY}}{\overline{LY}} \cdot \frac{\overline{LY}}{\overline{PY}} \cdot \overline{SY} \cdot \overline{TY} = \frac{\overline{RY}}{\overline{TY}} \cdot \frac{\overline{QY}}{\overline{SY}} \cdot \overline{SY} \cdot \overline{TY} = \overline{QY} \cdot \overline{RY}\,,$$

од степен на точка. X припаѓа на опишаната кружница на $\triangle AQR$. **(1п)** ⋄

Лема 2 го комплетира доказот. □

Забелешки за распределбата на поени:

- За решение кое не го дискутира случајот кога $B_1C_1 \parallel BC$ се крати 1 поен.
- Поени од различни докази на истата лема не се адитивни.
- Првиот поен од доказите 1, 2 или 3 на Лема 2 не е адитивен со парцијални поени од Лема 1.

Задача 6. Во една држава има $n \geq 2$ градови. Некои парови градови се поврзани со директни двонасочни патишта; меѓу кои било два града има најмногу еден таков пат. Патната мрежа е поврзана, односно од секој град може да се стигне до кој било друг град патувајќи по низа патишта. Секој град е поврзан со парен број други градови.

Министерот за транспорт сака да воведе викенд-режим на сообраќајот на следниов начин. Секој пат се означува или како **само-сабота** или како **само-недела**, што значи дека може да се користи само во соодветниот ден. **Во секој град, бројот на инцидентни патишта означени како само-сабота и бројот на инцидентни патишта означени како само-недела се непарни или еднакви на нула.**

За да се постигне ова, дозволено е некои патишта трајно да се затворат. Нека N е најмалиот можен број патишта што мора да се затворат за преостанатите патишта да можат да се означат на овој начин (добиената патна мрежа не мора да остане поврзана).

Докажете дека N зависи само од n, и определете го N како функција од n.

Решение. Да го набљудуваме проблемот во контекст на сврзан едноставен граф G: градовите се темињата, а директните двонасочни патишта се ребрата на G. Секое теме има парен степен и $N \geq 0$ е најмалиот можен број ребра, $e_1, \ldots, e_N$, чие отстранување резултира со граф $G - \{e_1, \ldots, e_N\}$ кој дозволува ребрено боење со множество бои $\{\text{сабота}, \text{недела}\}$ (или било кое друго 2-множество) такво што секое теме v ја користи секоја инцидентна боја непарен број пати. Ќе докажеме дека N е еднаков на $n \pmod 2$, т.е.,

$$N = \begin{cases} 0 & : \text{ако } \ 2 \mid n\,, \\ 1 & : \text{ако } \ 2 \nmid n\,. \end{cases}$$

Најпрво докажуваме дека $N = 0$ ако n е парен.

Тврдење 1. Секој сврзан граф од парен ред (број на темиња) има скелетен подграф во кој сите темиња имаат непарни степени.

Доказ. Нека $v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$ е произволна енумерација на темињата. Со оглед дека графот е сврзан, за секој $i = 1, \ldots, k$ постои пат P_i помеѓу v_{2i-1} и v_{2i}. Скелетниот подграф со множество ребра $E(P_1) \oplus E(P_2) \oplus \cdots \oplus E(P_k)$ (тука $\oplus$ означува симетрична разлика) ја има посакуваната особина. Навистина, степенот на секое теме v_j е непарен во однос на точно еден од скелетните подграфови $[E(P_i)]$ (имено, за $i = \lceil j/2 \rceil$). **(1п)** $\diamond$

Ако n е парен, тогаш нека H_1 е „непарен“ скелетен подграф од G (т.е. скелетен подграф во кој сите темиња имаат непарни степени, постоењето на H_1 е содржината на Тврдење 1). Имајќи предвид дека секое теме има парен степен во однос на G, скелетниот подграф $H_2 := G - E(H_1)$ е истотака непарен. Да го обоиме секое ребро од H_1 со бојата **сабота**, и секое ребро од H_2 со бојата **недела**. Ова докажува дека $N = 0$. **(1п)**

Во продолжение, претпоставуваме дека n е непарен. Оваа претпоставка повлекува дека $N > 0$. Навистина, во спротивно, G дозволува ребрено 2-боење такво што за секое теме v секоја боја c се појавува непарен број пати на $E_G(v)$ (со оглед дека сите темени степени во однос на G се парни и позитивни); но, ова би значело дека секоја боја класа $[c]$ индуцира непарен скелетен подграф од G - невозможно, бидејќи во однос на секој граф вкупниот број на темиња со непарни степени е парен (директна последица на т.н. лема за ракување). **(1п)**

За да докажеме дека $N \leq 1$, го користиме следново.

Тврдење 2. Постојат две соседни темиња w и u во G такви што графовите $G - w$ и $G - \{w, u\}$ се сврзани.

Доказ. Нека P е пат во G со најголема можна должина, нека w е еден завршеток на P, и нека u е соседното теме на w во P. Покажуваме дека $G - w$ и $G - \{w, u\}$ се сврзани. Екстремалниот избор на P (пат со максимум должина) повлекува дека $N_G(w) \subseteq V(P - w)$. Со оглед дека

$P-w$ е сврзан подграф од $G-w$, сигурно е дека $G-w$ е сврзан. Да претпоставиме дека $G-\{w,u\}$ не е сврзан. Тогаш, бидејќи $P-\{w,u\}$ е сврзан подграф од $G-\{w,u\}$, мора да постои компонента D од $G-\{w,u\}$ со $V(P)\cap V(D)=\emptyset$. Како што веќе забележавме, од изборот на P како најдолг пат во G, w не е сосед со ниту едно теме во $V(G)-V(P)$. Значи, мора да постои теме $x\in V(D)$ кое е сосед на u. Бидејќи D е компонента на $G-\{w,u\}$, и $\deg_G(x)\geq 2$ при што $xw\notin E(G)$, постои теме $y\in V(D)\backslash\{x\}$ кое е сосед на x. Но, тогаш $P-wu+ux+xy$ е пат подолг од P, противречност. **(1п)** $\diamond$

Нека w и u се како во Тврдење 2. За графот $G-wu$ ќе го конструираме посакуваното ребрено 2-боење. Нека $G'=G-w$. Забележуваме дека: G' е сврзан граф од парен ред $n'=n-1$, темето u има непарен степен $\deg_{G'}(u)=\deg_G(u)-1$, и $G'-u$ е сврзан.

Од Тврдење 1, G' има непарен скелетен подграф H, т.е., $V(H)=V(G)\backslash\{w\}$ и секое теме $\neq w$ има непарен степен во однос на H. Избираме таков непарен скелетен подграф H од G' со најголем можен степен $\deg_{H'}(u)$. Тогаш $\deg_H(u)=\deg_{G'}(u)(=\deg_G(u)-1)$. **(1п)** Во спротивно, со оглед дека $E_{G'}(u)\backslash E_H(u)$ има парен број ребра, постојат $x,y\in E_{G'}(u)\backslash E_H(u)$. Бидејќи $G'-u$ е сврзан, постои пат P во $G'-u$ со завршетоци x и y. Да го набљудуваме циклусот $C=P+xu+yu$ како скелетен подграф од G'. Тогаш $H':=H\oplus C$ е непарен скелетен подграф од G'; притоа, бидејќи $E_{H'}(u)=E_H(u)\cup\{xu,yu\}$, важи $\deg_{H'}(u)=\deg_H(u)$ што противречи на екстремалниот избор на H. Ова потврдува дека $\deg_H(u)=\deg_{G'}(u)(=\deg_G(u)-1)$. **(1п)**

Следствено, ставајќи $K:=G-(\{wu\}\cup E(H))$, имаме: $\deg_K(u)=0$, степенот $\deg_K(w)=\deg_G(w)-1$ е непарен, и за секое теме $v\in V(G)\backslash\{w,u\}$ степенот $\deg_K(v)=\deg_G(v)-\deg_H(v)$ е истотака непарен. Значи, со боење на $E(H)$ (одн. $E(K)$) во бојата **сабота** (одн. **недела**) го добиваме посакуваното ребрено 2-боење на $G-wu$.

Ова го комплетира доказот дека $N=1$ ако n е непарен (и ≥ 2). **(1п)** $\square$