

30. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА
МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИАДА

Решенија на задачите со поени

9 мај 2026 година

Задача 1. Нека во остроаголниот $\triangle ABC$ точката D на страната BC е таква што $\angle ACB = 2\angle DAC$. Полуправата AD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во E , а D' е осно симетрична точка на точката D во однос на правата BE . Нека правата паралелна на AC низ D' ја сече AD во F и втората пресечна точка на правата BE со опишаната кружница околу $\triangle BFD$ е $G \neq B$. Докажи дека точките D' , E , G и F лежат на една кружница.

Решение 1. Од осната симетрија и периферни агли во опишаната кружница следува дека

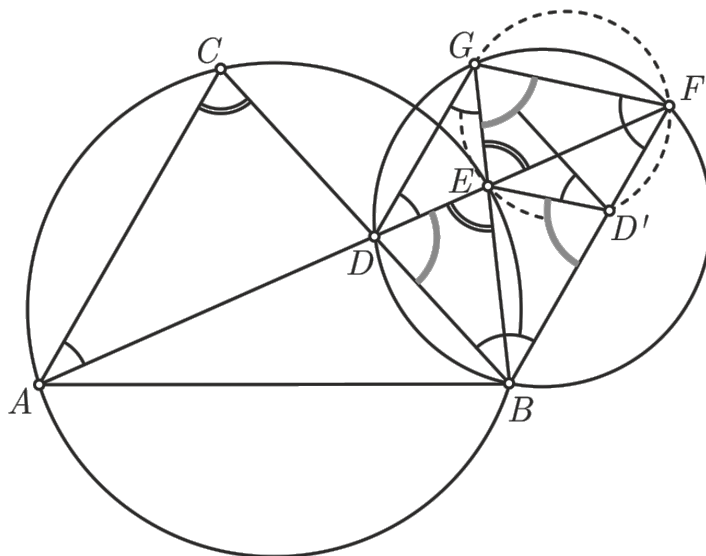
$$\angle D'BE = \angle EBD \equiv \angle EBC = \angle EAC \equiv \angle DAC = \frac{1}{2}\angle ACB. \quad (3 \text{ поени})$$

Според ова $\angle D'BD = \angle ACB$, т.е. $BD' \parallel AC$ (1 поен), па точките B , D' и F се колинеарни. (1 поен)

Сега од

$$\angle ED'B = \angle BDE \equiv \angle BDF = \angle BGF \equiv \angle EGF$$

следува дека $D'FGE$ е тетивен, што е еквивалентно на бараното. (3 поени) ■



Решение 2. Од периферни агли во дадените кружници и агли со паралелни краци следува дека

$$\angle AFD' = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AEB. \quad (3 \text{ поени})$$

Според ова $\angle D'BE = \angle EBC = \angle EAC$, т.е. $\angle AEB = \angle EFD' + \angle D'BE$, па точките B , D' и F се колинеарни (притоа $\angle D'BE = \angle EBC$ следува од осната симетрија на D и D'). (2 поени)

Освен тоа

$$\angle GFE \equiv \angle GFD = \angle GBD = \angle FBG = \angle FDG \equiv \angle EDG = \angle GD'E, \quad (2 \text{ поени})$$

од каде следува дека точките D' , E , G и F лежат на една кружница. (1 поен) ■

Решение 3. Од периферни агли во дадените кружници и агли со паралелни краци следува дека

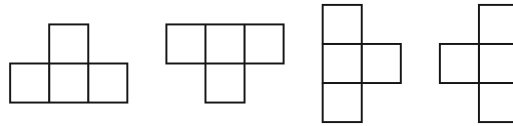
$$\angle AFD' = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AEB. \quad (3 \text{ поени})$$

Освен тоа

$$\angle GFD = \angle GBD \equiv \angle EBC = \angle EAC = \frac{1}{2}\angle AEB, \quad (2 \text{ поени})$$

па $\angle GFD' = \angle AEB = \angle BED'$ (2 поени), од каде следува дека точките D' , E , G и F лежат на една кружница. (1 поен) ■

Задача 2. Најди ги сите природни броеви n за кои $n \times n$ квадратна табла може целосно да се поплочи без поклопување со „Т-тетромина“ (фигурите прикажани подолу).



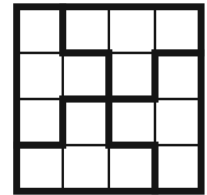
Забелешка. За поплочувањето велиме дека е целосно и без преклопување ако секое единечно квадратче од таблата е покриено со единечно квадратче од точно едно тетромينو и секое тетромينو е целосно во таблата.

Решение. Тврдиме дека бараното може да се стори ако и само ако $4 \mid n$. **(1 поен)**

Табла со димензии 4×4 може да се поплочи како на цртежот десно, а ако $n > 4$ и $4 \mid n$, тогаш $n \times n$ таблата може да се подели на 4×4 поттабли, па и да се поплочи. **(2 поени)**

Од друга страна, да претпоставиме дека $n \times n$ табла може да се поплочи со Т-тетромина. Бидејќи секое тетромينو се состои од 4 квадратчиња, мора да имаме $4 \mid n^2$, од каде следува дека $2 \mid n$. **(1 поен)**

Сега, да ја обоиме таблата со црна и бела боја како шаховска табла. Да забележиме дека бројот на црни и на бели полиња е ист и еднаков на $\frac{n^2}{2}$. Понатаму, да забележиме дека секое тетромينو содржи или три црни и едно бело поле (нека нивниот број е A) или три бели и едно црно поле (нека нивниот број е B). **(2 поени)**



Така, за вкупните броеви на црни и бели полиња имаме $3A + B = \frac{1}{2}n^2 = 3B + A$, па добиваме $A = B$ и $4A = \frac{1}{2}n^2$. Конечно, ова имплицира дека $4 \mid \frac{1}{2}n^2$, па мора да имаме $4 \mid n$. **(2 поени)** ■

Задача 3. Докажи дека секои четири ненегативни реални броеви x_1, x_2, x_3 и x_4 , такви што важат $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ и $x_3^2 + x_4^2, x_4^2 + x_1^2, x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ го задоволуваат неравенството:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_2 + x_3}{x_4^2 + x_1^2} + \frac{x_3 + x_4}{x_1^2 + x_2^2} \geq 4.$$

За кои x_1, x_2, x_3 и x_4 се достигнува равенство?

Решение 1. Нека $x_1 + x_2 = a$ и $x_3 + x_4 = b = 1 - a$ **(1 поен)**. Добиваме:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_2 + x_3}{x_4^2 + x_1^2} + \frac{x_3 + x_4}{x_1^2 + x_2^2} \geq \frac{x_1 + x_2}{x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2} + \frac{x_3 + x_4}{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} = \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}. \quad \text{(3 поени)}$$

Од $x_1^2 + x_2^2, x_3^2 + x_4^2 \neq 0$, следува дека a и b се позитивни. Според ова можеме да го користиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина по што добиваме:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{a^2b^2}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{\frac{a+b}{2}} = 4. \quad \text{(3 поени)}$$

Равенство важи ако и само ако $x_2 = x_3 = 0$ и $x_1 = a = b = x_4 = \frac{1}{2}$. **(1 поен)** ■

Решение 2. Користејќи го равенството $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ и тоа што броевите се ненегативни добиваме:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_2 + x_3}{x_4^2 + x_1^2} + \frac{x_3 + x_4}{x_1^2 + x_2^2} \geq \frac{x_1 + x_2}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_3 + x_4}{x_1^2 + x_2^2} = \\ & \frac{(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{(x_3 + x_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{x_1^2 + x_2^2} = \quad \text{(3 поени)} \\ & \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{(x_3 + x_4)^2}{x_1^2 + x_2^2} + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} \right) \geq \\ & \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{2\sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}\sqrt{x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} \geq 2 + 2 = 4. \quad \text{(3 поени)} \end{aligned}$$

Притоа користиме неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина и $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2$ кое е точно за секои ненегативни реални броеви a и b . **(1 поен)**

Равенството може да е исполнето само ако $x_2 + x_3 = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$, т.е. само ако $x_2 = x_3 = 0$ и $x_1 = x_4 = \frac{1}{2}$. **(1 поен)** ■

Задача 4. За природен број велиме дека е *единечно делив* ако е делив со секоја од своите цифри, но не е делив со квадратот на ниту една од своите цифри. Колку најмногу различни цифри може да има единечно делив број? Дали има конечно единечно деливи броеви со тој број на различни цифри? Образложи го одговорот.

Решение. Прво ќе докажеме дека ваков број може да има најмногу 5 различни цифри.

Од условот на задачата 0 и 1 не можат да бидат цифри во единечно делив број ($0^2 = 0$ и $1^2 = 1$). Освен тоа ако 2 е цифра во бројот, тогаш ниту 4, ниту 8 не можат да бидат цифри во него и обратно (ако 4 или 8 е цифра во бројот, тогаш 2 не е). Слично ако 3 е цифра во ваков број, тогаш 9 не е и обратно. Според ова од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 8 и 9 може да има најмногу 3 во единечно делив број.

Ако претпоставиме дека бројот ја има цифрата 5, тогаш тој е непарен (не смее да завршува на 0), па има најмногу три различни цифри, т.е. 5, 7 и една од цифрите 3 или 9 (вакви броеви се 357735 и 975555).

Ако ја нема цифрата 5 од претходната дискусија заклучуваме дека може да ги има 6 и 7 и најмногу 3 од останатите цифри. Ако има 6, тогаш не може да ги има 4 и 9, ниту 8 и 9, па единствениот начин да има 5 различни цифри е ако тоа се 3, 4, 6, 7 и 8. Нивниот најмал заеднички содржател е 168 и бараниот број мора да е делив со него. Освен тоа бројот поделен со 168 не смее да биде делив со 2, 3 ни 7. **(3 поени)**

Лема 1: Постои единечно делив број кој ги има цифрите 3, 4, 6, 7 и 8.

Доказ 1: За да најдеме еден број кој ги задоволува својствата почнуваме од 168 (или друг содржател на 168 кој завршува на 4, 6 или 8). Потоа бидејќи 1 не е дозволена цифра, додаваме содржател на 168 кој завршува на две нули, а третата цифра од десно е 2 или 6 (за да се добие 3 или 7). Првиот ваков број е $4368 = 168(1 + 25)$, но во него нема 7, па треба да ја продолжиме постапката (или да најдеме друг број). Ако во следниот чекор додадеме $168 \cdot 375$ добиваме 67368. Во овој број нема 4, па додаваме 1680000 и добиваме 1747368. На крај како во првиот чекор додаваме $168 \cdot 250000$ и добиваме 43747368. Бидејќи 260401 не се дели со ниту еден од броевите 2, 3 и 7 ова е единечно делив број кој има точно 5 различни цифри. **(2 поени)** \square

Доказ 2: Прво ќе докажеме дека за секој непарен број n кој не е делив со 5 постои број кој има само единици за цифри и е делив со n . Ако ги разгледаме броевите e_i кои се состојат од i единици, меѓу првите $n + 1$ ќе има два кои даваат ист остаток при делење со n . Јасно нивната разлика $e_j - e_i = 10^i e_{j-i}$ е делива со n . Бидејќи n е непарен и не е делив со 5, важи $n \mid e_{j-i}$.

Конкретно за оваа задача не интересира број кој е делив со 21 и број делив со $21^2 = 441$. Тоа се броевите e_6 и e_{126} . Дополнително е важно дека $\frac{111111}{21} = 5291$ е непарен и не е делив ниту со 3 ниту со 7.

Сега бројот $8e_6$ е делив со $8 \cdot 21 = 168$, но не е делив со квадратите на 3, 4 ни 7. Јасно броевите $c \cdot e_{126} \cdot 10^k$ се деливи со 168^2 за секој $c \in \{3, 4, 6, 7\}$ и $k \geq 6$, па единечно делив број може да се добие како збир

$$z = 8e_6 + 7e_{126} \cdot 10^6 + 6e_{126} \cdot 10^{132} + 4e_{126} \cdot 10^{258} + 3e_{126} \cdot 10^{384}.$$

Бидејќи сите собироци освен $8e_6$ се деливи со 168^2 заклучуваме дека збирот е делив со 168, но не е делив со 3^2 , 4^2 ниту 7^2 . **(3 поени)** \square

Лема 2: Постојат бесконечно многу единечно деливи броеви кои ги имаат цифрите 3, 4, 6, 7 и 8.

Доказ 1: Нека b е еден ваков број со k цифри (на пример $b = 43747368$, $k = 8$). Ги разгледуваме броевите $a_0 = 1, a_1 = 1 + 10^k, \dots, a_i = 1 + 10^k + \dots + 10^{ki}, \dots$. За секој $i \in \mathbb{N}_0$ бројот ba_i ги има цифрите 3, 4, 6, 7 и 8 и е делив со нив. Јасно за $i \equiv 2 \pmod{3}$, a_i е делив со 3, па ba_i не е единечно делив. Освен тоа за некои од броевите (најмногу секој втор ако $k \equiv 4 \pmod{6}$) a_i може да биде делив со 7. Но, во секој случај најмалку два од секои шест вакви последователни броеви не се деливи ниту со 3 ниту со 7. Освен тоа тие се непарни, па таков ba_i е единечно делив и има бесконечно многу вакви броеви. **(3 поени)** \square

Доказ 2: Како во вториот доказ на претходната лема заклучуваме дека од единечно делив број z со додавање на $3 \cdot e_{126} \cdot 10^k$, каде k е бројот на цифри на z се добива нов единечно делив број, т.е. постојат бесконечно многу единечно деливи броеви. **(2 поени)** \square

Од Лема 2 следува дека има бесконечно многу единечно деливи броеви кои имаат 5 различни цифри (3, 4, 6, 7 и 8). \blacksquare

Забелешка: Помал број 8433768 може да се добие ако додадеме $168 \cdot 200$, па $168 \cdot 50000$, а најмалиот број кој ги задоволува условите е 3467688 - не може да има петцифрен единечно делив број, бидејќи тогаш збирот на цифрите ќе е 28 и бројот не е делив со 3. Ако претпоставиме дека единечно делив број има 6 цифри бидејќи е делив со 3, цифрата што се повторува мора да биде 8, но тогаш збирот на цифрите е 36 и бројот е делив со $3^2 = 9$.

Задача 5. На овогодинашната ЈБМО ќе учествуваат парен број натпреварувачи. Секој од нив има помалку познаници отколку непознаници меѓу конкурентите. Докажете дека организаторите можат да ги седнат сите натпреварувачи во клуби по двајца така што во ниту една клуба не седат познаници.

Забелешка. Релацијата „познанство“ е симетрична.

Решение 1. Разгледуваме едноставен граф G чии темиња се натпреварувачите, а ребра непознанства-та. Согласно условите на задачата, $|V(G)| = 2n$ и $(\forall v \in V(G)) \deg_G(v) \geq n$. Побарувањето на задачата е да се докаже дека графот G има 1-фактор т.е. скелетен 1-регуларен подграф. (За подграф од G велиме дека е *скелетен* доколку има исто множество темиња со G . За граф велиме дека е 1-регуларен доколку секое теме има степен 1.) **(1п)**

Нека F е 1-регуларен подграф од G со најголем можен број на темиња. **(1п)** Јасно $|V(F)|$ е парен број. Да претпоставиме дека $V(F) \subsetneq V(G)$. Тогаш $|V(F)| \leq 2n - 2$. Значи, постојат темиња $u, w \in V(G) \setminus V(F)$. Не е можно $uw \in E(G)$ (во спротивно, $(V(F) \cup \{u, w\}, E(F) \cup \{uw\})$ би бил 1-регуларен подграф од G што е поголем од F). **(1п)**

Нека $xy \in E(F)$ е произволно. За ребро од G кое има еден завршеток во множеството $\{u, w\}$ и еден завршеток во множеството $\{x, y\}$ велиме дека е *добро*. Тврдиме дека не постојат независни добри ребра (за фиксно $xy \in E(F)$). (За две ребра велиме дека се *независни* доколку немаат заеднички крај.) **(1п)** Навистина, во спротивно, б.г.о. $ux, wy \in E(G)$; тогаш $(V(F) \cup \{u, w\}, E(F) \oplus \{ux, xy, wy\})$ би бил 1-регуларен подграф од G што е поголем од F . **(1п)** Но тоа значи дека постојат најмногу две добри ребра (за фиксно $xy \in E(F)$). Со други зборови, произволно ребро $xy \in E(F)$ допринесува најмногу 2 кон збирот $\deg_G(u) + \deg_G(w)$. **(1п)** Следствено,

$$\deg_G(u) + \deg_G(w) \leq^* 2|E(F)| = |V(F)| \leq 2n - 2. \quad \mathbf{(1п)}$$

(За неравенството \leq^* е искористено дека секое ребро од G чиј завршеток е теме од $\{u, w\}$, како втор завршеток мора да има теме од $V(F)$.) Но, неравенството $\deg_G(u) + \deg_G(w) \leq 2n - 2$ противречи на $(\forall v \in V(G)) \deg_G(v) \geq n$. **(1п)** ■

Решение 2. Да претпоставиме дека ваква распределба е невозможна. Одбираме распределба во која на најмал број клуби седат познаници. **(1п)**

При оваа распределба постојат познаници A и B кои седат на иста клуба. Нека има a клуби на кои A не ги познава обата натпреварувачи и b клуби на кои B не ги познава обата натпреварувачи. Ако B ги познава натпреварувачите на споменатите a клуби, тогаш тој познава најмалку

$$1 + 2a + (n - 1) - (a + b) = n + a - b$$

натпреварувачи (имено, го познава A , ги познава сите натпреварувачи на a -те клуби и познава по еден натпреварувач на останатите $(n - 1) - (a + b)$ клуби). Слично, ако A ги познава сите натпреварувачи на споменатите b клуби, тогаш тој познава најмалку

$$1 + 2b + (n - 1) - (a + b) = n + b - a$$

натпреварувачи. **(2п)** Но тогаш збирот на бројот на познаници на A и бројот на познаници на B е барем $2n$, што противречи на условот на задачата (секој натпреварувач познава најмногу $\lfloor \frac{2n-1}{2} \rfloor = n - 1$ натпреварувачи). **(1п)**

Заклучуваме дека постои клуба на која едниот од A и B не ги познава обата натпреварувачи, а другиот не познава барем еден. **(1п)** Затоа можеме да одбереме натпреварувачи C и D кои седат на иста клуба, така што A не го познава C и B не го познава D . **(1п)** Сега можеме да направиме прераспределба на натпреварувачите (A да седи со C , а B да седи со D) со што се намалува бројот на клуби на кои има познаници. **(1п)** Ова е контрадикција на претпоставената минималност на распределбата. Следствено, постои распределба при која бројот на клуби на кои седат познаници е 0, т.е. бараната распределба е можна. **(1п)** ■