ТЕСТ ЗА ЈБМО 2026

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

22 мај 2026 година

Задача 1. Нека x, y и z се позитивни реални броеви така што $x+y+z=3$. Докажи дека

$$(2x-1)^3+(2y-1)^3+(2z-1)^3 \geqslant 3\,.$$

Кога важи равенство?

Решение 1. Имаме

$$\sum_{cyc}(2x-1)^3 = \quad \textbf{(2 поени)} \text{ - за развивање на кубовите}$$

$$\sum_{cyc}\left(8x^3-12x^2+6x-1\right) = \quad \textbf{(3 поени)} \text{ - за преуредување}$$

$$-3+2\sum_{cyc}x^3+6\sum_{cyc}x(x-1)^2 \geqslant \quad \textbf{(2 поени)} \text{ - за АМ-ГМ и квадрат е ненегативен}$$

$$-3+2\cdot 3\cdot\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = 3\,. \quad \textbf{(2 поени)} \text{ - за средување на изразот}$$

Равенство ќе важи само ако $x-1=y-1=z-1=0$, т.е. ако $x=y=z=1$. **(1 поен)** □

Решение 2. Ако некој од броевите е помал од $\frac{1}{2}$, тогаш најголемиот е поголем од 1. **(1 поен)** Нека тоа се $x>1$ и $y<\frac{1}{2}$ и направиме замена $a=2x-1>1$ и $b=1-2y$ за кое $0<b<1$. Имаме

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)>(a-b)(a^2-2ab+b^2)=(a-b)^3\,. \quad \textbf{(2 поени)}$$

Според ова со замена на y со $\frac{1}{2}$ и x со $x+y-\frac{1}{2}$ вредноста на левата страна од неравенството се намалува, па доволно е да го разгледаме случајот кога $x,y,z\geq\frac{1}{2}$. **(2 поени)**

Во овој случај можеме да ги користиме неравенствата меѓу срединитe. **(1 поен)** Добиваме

$$(2x-1)^3+(2y-1)^3+(2z-1)^3 \geqslant$$

$$\frac{1}{9}((2x-1)+(2y-1)+(2z-1))^3 = \quad \textbf{(2 поени)}$$

$$\frac{1}{9}(2(x+y+z)-3)^3=\frac{1}{9}\cdot 3^3=3\,. \quad \textbf{(1 поен)}$$

Равенство ќе важи само ако $2x-1=2y-1=2z-1$, т.е. ако $x=y=z=1$. **(1 поен)** □

Задача 2. Природниот број $n=\overline{x_1x_2\dots x_m}$ го викаме *извонреден* ако за него е исполнето

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_m^4\equiv x_1+x_2+\cdots+x_m \pmod 5\,.$$

Колку најмногу члена може да има низа од последователни извонредни броеви?

Решение. Бројот 1 е извонреден број, па постојат извонредни броеви. Уште повеќе, 5 и 6 се последователни извонредни броеви, па постои таква низа од 2 члена.

Нека $n=\overline{x_1x_2\dots x_m}$ и $n+1$ се извонредни броеви. Тогаш

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{m-1}^4+x_m^4\equiv x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}+x_m \pmod 5.$$

Нека $x_m\neq 9$. Тогаш $n+1=\overline{x_1x_2\dots x_{m-1}(x_m+1)}$ и важи

$$x_1^4+x_2^4+\cdots+x_{m-1}^4+(x_m+1)^4\equiv x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}+(x_m+1) \pmod 5. \quad \textbf{(2 поени)}$$

Да ја одземеме првата конгруенција од втората, добиваме:

$$(x_m+1)^4-x_m^4\equiv 1 \pmod 5\,. \quad \textbf{(1 поен)}$$

Според малата теорема на Ферма, за секој природен број x важи или $5 \mid x$ или $x^4 \equiv 1 \pmod 5$. Оттука заклучуваме дека $(x_m+1)^4 \equiv 1 \pmod 5$ и $x_m^4 \equiv 0 \pmod 5$, односно $x_m \in \{0, 5\}$. **(2 поени)**

Сега, да претпоставиме дека и $n+2 = \overline{x_1x_2\ldots x_{m-1}(x_m+2)}$ е извонреден број. Тогаш, слично како претходно, важи

$$(x_m+2)^4 - (x_m+1)^4 \equiv 1 \pmod 5,$$

што е контрадикција. **(2 поени)**

Ако $x_m = 9$, тогаш цифрата на единици на $n+1$ е 0. За $n+1$ ја применуваме претходната дискусија и ако $n+2$ е извонреден број, тогаш $n+3$ не може да биде извонреден. **(2 поен)**

Значи, низа од последователни извонредни броеви може да има најмногу 3 члена, при што цифрата на единици на најмалиот член е 9. Една таква низа е $99999, 100000, 100001$. **(1 поен)** $\square$

Забелешка:

- Наведен пример за извонреден број, без понатамошно решавање се вреднува со 0 поени.
- Наведен пример за низа од два последователни извонредни броеви се вреднува со 0 поени.
- Наведен пример за низа од три последователни извонредни броеви се вреднува со 1 поен.
- Формулација на теоремата на Ферма, без примена се вреднува со 0 поени.
- Заклучокот дека низа од последователни извонредни броеви може да има најмногу 3 члена, без наведен пример на низа што го задоволува тоа се вреднува со 0 поени.

Задача 3. Во остроаголниот $\triangle ABC$ со $AB > AC$ точките N, M и L се средини на страните AB, BC и CA, соодветно. Нека Γ е опишаната кружница околу $\triangle NML$, $E \neq M$ е втората пресечна точка на Γ со симетралата на BC и ω е кружницата опишана околу $\triangle BCE$. Правата низ E што е нормална на AC ја сече кружницата ω повторно во точката $G \neq E$. Нека $J \neq E$ е втората пресечна точка на кружниците Γ и ω.

Докажи дека точките G, N и J се колинеарни.

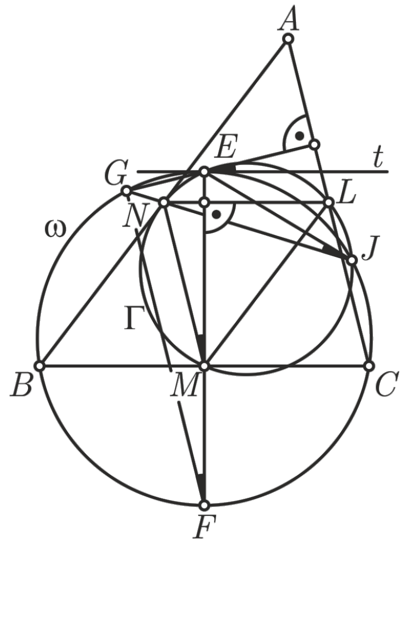
Решение 1. Да забележиме дека NM е средна линија во $\triangle ABC$ така што $NM \parallel AC$. Од паралелноста имаме $\angle NMB = \angle ACB$. Оттука имаме

$$\angle EMN = \angle EMB - \angle NMB = 90^\circ - \angle ACB\,.$$

Од тетивноста на $(ENMJ)$ имаме $\angle EJN = \angle EMN = 90^\circ - \angle ACB$. **(3 поени)**

Нека $F \neq E$ е пресекот на симетралата на BC и ω. **(1 поен)** Јасно EF е дијаметар во ω, бидејќи е симетралата на BC, па $\angle FGE = 90^\circ$. Значи $EG \perp GF$ и бидејќи $EG \perp AC$, според условите на задачата, добиваме $AC \parallel GF$. **(2 поени)**

Следствено, имаме $NM \parallel GF$, $\angle EFG = \angle EMN = 90^\circ - \angle ACB$. **(2 поени)** Од тетивноста на $(EJFG)$ имаме $\angle EJG = \angle EFG = 90^\circ - \angle ACB = \angle EJN$, од каде J, N и G се колинеарни, што требаше да се докаже. **(2 поени)** $\square$



Решение 2. Нека t е тангентата на ω во E. **(2 поени)** Бидејќи E е на симетралата на BC, како и центарот на ω, следува дека $t \parallel BC$. **(1 поен)** Сега од $GE \perp AC$, добиваме дека $\angle EJG$ е еднаков на аголот меѓу t и GE, т.е. на $90^\circ - \angle ACB$. **(2 поени)**

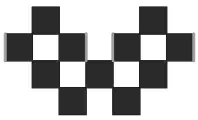
Од друга страна, бидејќи LN е средна линија $\triangle ABC$, важи $NL \parallel BC$ и оттука $NL \perp ME$. Сега бидејќи $\angle MNL = \angle ACB$ добиваме дека

$$\angle EJN = \angle EMN = 90^\circ - \angle MNL = 90^\circ - \angle ACB\,. \textbf{ (3 поени)}$$

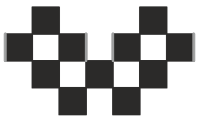
Бидејќи $\angle EJG = \angle EJN$, заклучуваме дека точките J, N и G се колинеарни. **(2 поени)** $\square$

Забелешка: Генерално се добиваат **(3 поени)** за **(корисно)** изразување на $\angle EJN$ преку аглите на триаголникот, **(5 поени)** за **(корисно)** изразување на $\angle EJG$ преку аглите на триаголникот и **(3 поени)** за завржување на доказот (овие поени може да се добијат само ако ученикот ги има претходните поени).

Задача 4. Христина има квадратен лист поделен на 500×500 единечни квадратчиња обоени црно - бело како шаховска табла. Таа исекла фигура од листот така што сечела само по страните на единечните квадратчиња, притоа внимавајќи по периметарот на фигурата да има само црни квадратчиња (на цртежот десно е прикажана една ваква фигура). Дали може фигурата што ја добила Христина да има периметар 2026?



Решение 1: Го разгледуваме бројот на вертикални линии по периметарот на добиената фигура во секоја хоризонтална линија. **(1 поен)** Почнувајќи од лево кон десно меѓу првите две вакви линии има за едно црно квадратче повеќе отколку бели (почнуваме и завршуваме на периметарот на фигурата, т.е. со црно квадратче). Истото важи за следните две линии и секои две следни до последните две во редот. **(2 поени)** (Во секој ред има парен број на вертикални линии по периметарот, така што секој последователен пар линии ја ограничува внатрешноста, т.е. надворешноста на фигурата - види цртеж.) Според ова за секои две вертикални линии има за точно едно црно квадратче повеќе отколку бели. **(1 поен)**



Слично, ако ги разгледуваме хоризонталните линии од периметарот во секоја колона, за секои две линии имаме едно црно квадратче повеќе од бели. **(2 поени.)**

Според ова за секое црно квадратче повеќе од бело имаме по четири линии на периметарот, т.е. периметарот е делив со 4. **(2 поени)**

Бидејќи 2026 не е делив со 4, заклучуваме дека периметарот на фигурата не може да биде 2026. **(2 поени)** $\square$

Решение 2: Периметарот на фигурата S изнесува:

$$\begin{aligned} \mathrm{Perim}(S) &= \\ |\{(B,W) | \text{црното квадратче } B \in S \text{ е соседно на белото } W \notin S\}| &= \textbf{(3 поени)} \\ |\{(B,W) | \text{црното } B \in S \text{ е соседно на белото } W\}| &- \\ |\{(B,W) | \text{црното } B \in S \text{ е соседно на белото } W \in S\}| &= \textbf{(2 поени)} \\ = 4|\{B \in S | B \text{ е црно}\}| - 4|\{W \in S | W \text{ е бело}\}|\,, & \end{aligned}$$

при што последното равенство е точно, бидејќи сите бели квадратчиња во S се заобиколени со црни квадратчиња кои се во S, бидејќи нема бели квадратчиња по периметарот на S. **(3 поени)**

Бидејќи 2026 не е делив со 4, заклучуваме дека периметарот на фигурата не може да биде 2026. **(2 поени)** $\square$