ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2026

Ден 1

Сабота, 16. Мај 2026

Задача 1. Нека n е природен број, d е цел број таков што $n \geq d \geq 0$ и нека B_n е множеството од сите бинарни низи со должина n. Непразно подмножество S од B_n е *совршено во однос на* d, ако за секој $w \in B_n$ постои точно еден $u \in S$ кој што се разликува од w на најмногу d позиции. За $n = 227$ најдете ги сите природни броеви d такви што постои совршено подмножество S од B_n во однос на d.
(Пример: $d = 2$, $n = 4$, ако $S = \{1000, 1011, 1100, 1101\}$ тогаш за $w = 1111$ постојат 3 елементи од S кои се разликуваат од w во најмногу $d = 2$ позиции - следствено, S не е совршено во однос на d.)

Задача 2. Нека во $\triangle ABC$ точките M и N се на страната BC, S е пресекот на опишаните кружници околу $\triangle ABM$ и $\triangle ANC$, а S' е симетричната точка на S во однос на средината R на страната BC. Правата BS ја сече AC во P, а правата CS ја сече AB во Q. Докажете дека правите QM, PN и AS се сечат во една точка или се паралелни ако и само ако точките A, M, S' и C лежат на кружница.

Задача 3. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за секои позитивни реални броеви a, b, c важи:

$$\begin{aligned} a + f(b,c) &= f(a+b, a+c) \\ \min\{a, f(b,c)\} &= f(\min\{a,b\}, \min\{a,c\}) \\ f(f(a,b),c) &= f(a, f(b,c)) \,. \end{aligned}$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2026

Ден 2

Недела, 17. Мај 2026

Задача 4. Нека a и b се заемно прости позитивни цели броеви, и нека $c = a + b$. Дефинираме $A = \{\frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \ldots, \frac{a-1}{a}\}$, $B = \{\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \ldots, \frac{b-1}{b}\}$, и $C = \{\frac{1}{c}, \frac{2}{c}, \ldots, \frac{c-1}{c}\}$.
Докажете дека помеѓу секои два различни елементи на C постои елемент на $A \cup B$.

Задача 5. Нека P е внатрешна точка за $\triangle ABC$. Правите AP, BP, и CP ги сечат страните BC, CA, и AB во точките A_1, B_1, и C_1, соодветно. Нека L е пресечната точка на правите AP и B_1C_1. Точките M и N се средишни за отсечките BL и CL, соодветно. Правата MN ги сече BA, BP, CP и CA во точките Q, S, T, и R, соодветно. Докажете дека опишаните кружници на $\triangle AQR$ и $\triangle PST$ имаат заедничка точка на правата AP.

Задача 6. Во една држава има $n \geq 2$ градови. Некои парови градови се поврзани со директни двонасочни патишта; меѓу кои било два града има најмногу еден таков пат. Патната мрежа е поврзана, односно од секој град може да се стигне до кој било друг град патувајќи по низа патишта. Секој град е поврзан со парен број други градови.

Министерот за транспорт сака да воведе викенд-режим на сообраќајот на следниов начин. Секој пат се означува или како **само-сабота** или како **само-недела**, што значи дека може да се користи само во соодветниот ден. **Во секој град, бројот на инцидентни патишта означени како само-сабота и бројот на инцидентни патишта означени како само-недела се непарни или еднакви на нула.**

За да се постигне ова, дозволено е некои патишта трајно да се затворат. Нека N е најмалиот можен број патишта што мора да се затворат за преостанатите патишта да можат да се означат на овој начин (добиената патна мрежа не мора да остане поврзана).

Докажете дека N зависи само од n, и определете го N како функција од n.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.