

33. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 1. Некои клетки (1×1 квадратчиња) од правоаголна мрежа се обоени така што секоја редица и секоја колона не содржи повеќе од n обоени клетки, каде $n \geq 2$ е даден број. За множество M од обоени клетки велиме дека е **добро** доколку за секои две клетки од M кои лежат во различни редици и различни колони постои обоена клетка што е во иста редица со едната и во иста колона со другата клетка.

Одредете го, зависно од n , најголемиот можен број елементи во добро множество M .

Решение. Ќе докажеме дека најголемиот можен број елементи во добро множество изнесува n^2 . **(1п)** Притоа, ако $|M| = n^2$ за некое добро множество M тогаш M се состои од пресекот на n редици и n колони.

Нека R (одн. C) го означува множеството редици (одн. колони) од правоаголната мрежа. Разгледуваме добро множество M . Ја моделираме правоаголната мрежа како едноставен бипартитен граф $G[R, C]$, чии ребра се обоените клетки; според условот, максимумот степен $\Delta(G) = n$. Да забележиме дека M е подмножество од $E(G)$ со следнава особина: за секои две несоседни ребра од M постои ребро во G соседно со двете.

Нека G' е подграфот од G индуциран од ребрата во M , т.е., $G' = G[M]$. Избираме $xy \in M = E(G')$ такво што $d = \deg_{G'}(x) = \Delta(G')$. **(1п)** Можеме да претпоставиме дека $x \in R, y \in C$. Нека $R' = N_G(y)$ и $C' = N_G(x)$. Со $E_G[A, B]$ (одн. $E_{G'}[A, B]$) го означуваме множеството од оние ребра во G (одн. во G') што имаат еден завршеток во A и еден завршеток во B . Според особината на M , имаме $E_{G'}[R - R', C - C'] = \emptyset$. **(1п)**

Тврдeње. Нека $x' \in R' - x$ е такво што $E_{G'}[x', C - C'] \neq \emptyset$. Тогаш $N_{G'}(x) \subseteq N_G(x')$.

Доказ. Нека $x'z \in E_{G'}[z, C - C']$ и разгледуваме произволно теме $w \in N_{G'}(x)$. Со оглед дека $E_G[x, C - C'] = \emptyset$, особината на M применета врз ребрата xw и $x'z$ повлекува дека $w \in N_G(x')$. **(1п)** ◇

Следствено, за секое теме $x' \in R' - x$ најмногу $\Delta(G) - d$ ребра од $E_{G'}[R' - x, C - C']$ се инцидентни со x' . **(1п)** Комбинирајќи ги овие заклучоци со неравенствата $|R'| \leq \Delta(G)$ и $|C'| \leq \Delta(G)$, имаме

$$\begin{aligned} |M| = |E(G')| &= |E_{G'}[R, C']| + |E_{G'}[R' - x, C - C']| \\ &\leq d|C'| + (\Delta(G) - d)(|R'| - 1) \\ &\leq d\Delta(G) + (\Delta(G) - d)(\Delta(G) - 1) \\ &= \Delta^2(G) - \Delta(G) + d \\ &\leq \Delta^2(G). \quad \mathbf{(3п)} \end{aligned}$$

Дополнително, можеме да забележиме дека: ако $M = n^2$ тогаш, ставајќи $C' = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, постојат n редици r_1, r_2, \dots, r_n така што $M = \{r_1, r_2, \dots, r_n\} \times \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. □

Објаснувања за распределбата на поени:

- (1 поен) За точен одговор.
- (1 поен) Разгледување клетка $xy \in M$ од линија (редица или колона во $R \times C$) која има најброен пресек со M .
- (1 поен) Претпоставувајќи дека $x \in R$ и $y \in C$, заклучок дека ниту една клетка од $(R - R') \times (C - C')$ не припаѓа на M , каде $R' = \{r' : r'y \text{ е обоена}\}$ и $C' = \{c' : xc' \text{ е обоена}\}$.

- (1 поен) Доказ на тврдењето.
- (1 поен) Заклучок дека за секоја редица $r' \in R-r$, не повеќе од $n-d$ клетки од $r' \times (C-C')$ се во M .
- (3 поена) Дедукција дека $|M| \leq n^2$.

Задача 2. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажете дека

$$\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}} \geq 0.$$

Решение 1. Имајќи предвид дека неравенството е циклично, можеме без губење од општоста да претпоставуваме дека b е медијана на a, b, c , т.е., $(b-a)(b-c) \leq 0$. Имаме

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}} \right) \stackrel{(1)}{=} \quad (2p) \\ & \sum_{cyc} \frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}} + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{\sqrt{b^2+1}} \geq \\ & \frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b^2-c^2}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c^2-a^2}{\sqrt{a^2+1}} \stackrel{(2)}{=} \quad (2п) \\ & (a^2-b^2) \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \right) + (b^2-c^2) \left(\frac{1}{\sqrt{c^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \right) \end{aligned}$$

Со оглед дека $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ монотонно опаѓа како функција од x , првиот собирок во претходниот израз е ненегативен. **(1п)**

Да забележиме дека и вториот собирок е ненегативен. Имено, изразот во првата заградата има ист знак со $b-c$, додека изразот во втората заграда има ист знак со $a-c$, што повлекува дека нивниот производ има ист знак со

$$(b-c)(a-c) = (b-c)^2 - (b-a)(b-c) \geq 0.$$

Значи, обата собирока се ненегативни, оттаму и нивниот збир е ненегативен, од што следува посакуваното неравенство. **(3п)** □

Решение 2. Имаме

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}} \right) \stackrel{(1)}{=} \quad (2p) \\ & \sum_{cyc} \frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}} + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{\sqrt{b^2+1}} \geq \\ & \frac{a^2-b^2}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b^2-c^2}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c^2-a^2}{\sqrt{a^2+1}} \stackrel{(2')}{=} \quad (2п) \\ & = \sum_{cyc} \frac{a^2+1}{\sqrt{b^2+1}} - \sum_{cyc} \sqrt{a^2+1} \stackrel{(3)}{\geq} \quad (4п) \\ & \frac{\left(\sum_{cyc} \sqrt{a^2+1} \right)^2}{\sum_{cyc} \sqrt{a^2+1}} - \sum_{cyc} \sqrt{a^2+1} = 0, \end{aligned}$$

каде последното неравенство следува од неравенството на Коши-Шварц во облик на Артур Енгелс (познато и како *Лема на Титу Андрееску*). □

Објаснувања за распределбата на поени:

- (2 поена) Презапишување на неравенството во облик (1).

- (2 поена) Презапишување на неравенството во облик (2) или (2').
- (1 + 3 = 4 поени) Довршување после (2): еден поен за аргумент дека првиот собирок е ненегативен; три поена за аргумент дека вториот собирок е ненегативен под претпоставка дека b е медијана.
- (4 поени) Довршување директно после (2) или (2').
- Парцијални поени не се доделуваат за презапишување на неравенството во облик различен од (1), (2) и (2') без довршување на целосно решение или редукција до еден од споменатите облици.

Задача 3. Одредете ги сите позитивни цели броеви z за кои z , $z + 7$ и $z + 11$ се степени на прости броеви. (*Степен на прост број* е позитивен цел број од обликот p^n , каде што p е прост број, а n е позитивен цел број.)

Решение. Ги бараме позитивните цели броеви z такви што z , $z + 7$, $z + 11$ се степени на прости броеви (броеви од облик p^k каде p е прост и $k \geq 1$).

Најпрво аргументираме дека z не може да е непарен. Да претпоставиме, заради добивање противречност, дека z е непарен. Тогаш $z + 7$ и $z + 11$ се обата парни, што повлекува дека се степени на 2. Единствени степени на 2 кои се разликуваат за 4 се 4 и 8, бидејќи $2^m - 2^n = 4 \Rightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 2^2 \Rightarrow 2^n = 2^2$, $2^{m-n} - 1 = 1 \Rightarrow (2^n, 2^m) = (4, 8)$. Оттука $z + 7 = 4$, $z + 11 = 8$, па $z = -3$, противречност. Значи z е парен, што повлекува дека е степен на 2. Следствено, $z = 2^a$ за некој $a \geq 1$. **(1п)**

Модул 3, имаме $z \equiv_3 (-1)^a$. Значи, точно еден од $z + 7$, $z + 11$ е делив со 3: (i) ако a е непарен, тогаш $z + 7 \equiv 0 \pmod{3}$, па $z + 7 = 3^b$; (ii) ако a е парен, тогаш $z + 11 \equiv 0 \pmod{3}$, па $z + 11 = 3^b$. **(1п)**

Ги разгледуваме одделно овие два случаја.

Случај 1. a е непарен. Тогаш $2^a + 7 = 3^b$. Редуцираме модул 8. За $a \geq 3$ и непарен, $2^a \equiv 0 \pmod{8}$, па $3^b \equiv 7 \pmod{8}$, што е невозможно бидејќи $3^b \equiv 1$ или $3 \pmod{8}$. Значи $a \leq 1$, што повлекува $a = 1$, и $2^1 + 7 = 9 = 3^2$, па $b = 2$. Така $z = 2$, $z + 7 = 9 = 3^2$ и $z + 11 = 13$ (прост). Заклучуваме дека $z = 2$ задоволува. **(2п)**

Случај 2. a е парен. Тогаш $2^a + 11 = 3^b$. Забележуваме дека $a \neq 2$ со оглед дека $2^2 + 11 = 15$ не е степен на 3. Следствено, $a = 4$ или $a \geq 6$. Ако $a = 4$ тогаш $2^4 + 11 = 27 = 3^3$, па $b = 3$. Ова ни дава $z = 16$ и непосредно проверуваме дека $z + 7 = 23$ (прост), $z + 11 = 27 = 3^3$ (степен на прост). Заклучуваме дека $z = 16$ задоволува. **(1п)** Во продолжение претпоставуваме дека $a \geq 6$. Да се потсетиме дека за заемно прости цели броеви x и m , со $\text{ord}_m(x)$ го означуваме најмалиот позитивен цел број k таков што $x^k \equiv 1 \pmod{m}$ (овој параметар се нарекува *ред на x модуло m* ; следствено, $x^r \equiv x^s \pmod{m} \Leftrightarrow r \equiv s \pmod{\text{ord}_m(x)}$); оттаму, $\text{ord}_m(x) \mid \varphi(m)$. Сега, од $a \geq 6$, имаме $2^a \equiv 0 \pmod{64}$, па $3^k \equiv 11 \pmod{64}$. Имајќи предвид дека $\text{ord}_{64}(3) = 16$ (непосредна проверка користејќи дека $\varphi(64) = 2^5$ имплицира $\text{ord}_{64}(3) = 2^c$ за некој $1 \leq c \leq 5$) и $3^7 \equiv 11 \pmod{64}$, што ни дава дека $k \equiv 7 \pmod{16}$. Следствено, $3^k \equiv 3^7 \equiv 11 \pmod{17}$, па $17 \mid (3^k - 11) = 2^a$, противречност. **(2п)**

Заклучок: Единствено за броевите $z = 2$ и $z = 16$ важи дека z , $z + 7$, $z + 11$ се степени на прости броеви. **(1п)** □

Објаснувања за распределбата на поени:

- (1 поен) Заклучок дека z е степен на 2.
- (1 поен) Заклучок дека зависно од тоа дали a е непарен или парен, $z + 7$ или $z + 11$ е степен на 3.
- (2 поена) Решение на равенката $2^a + 7 = 3^b$ при ограничување a непарен.
- (1 поен) Решение на равенката $2^a + 11 = 3^b$ при ограничувања a парен и ≤ 4 .
- (2 поена) Доказ дека равенката $2^a + 11 = 3^b$ нема решенија во позитивни цели броеви a, b такви што a е парен и ≥ 6 .

- (1 поен) Заклучок дека единствени можни вредности за z се 2 и 16.

Задача 4. Нека ABC е триаголник со ортоцентар H , и нека ω е кружницата со дијаметар AH . Избрани се точки $P, Q \in \omega$, $M \in AB$, $N \in AC$ такви што $PQ \parallel MN \parallel BC$. Нека K е средишна точка на отсечката BC , $T = AK \cap \omega$ и $S = PM \cap QN$. Докажете дека правите AS, BH и QT се конкурентни, т.е., се сечат во една заедничка точка или се паралелни.

Решение. Ќе го користиме следново помошно тврдење:

Лема. Ако $ABCDEF$ е шестаголник таков што $ABEF$ и $BCDE$ се тетивни, и $AF \parallel CD$, тогаш $ABCDEF$ е впишан во коника.

Доказ: Нека $X = AE \cap BC, Y = DE \cap BF$ и $Z = DE \cap AF$.

Имаме

$$\begin{aligned} \angle BXE &= 180^\circ - \angle XEB - \angle EBX = 180^\circ - \angle AFB - \angle EDC = \\ &180^\circ - \angle ZFY - \angle YZF = \angle FYZ = \angle BYE, \end{aligned}$$

значи четириаголникот $BXYE$ е тетивен. **(1п)** Со оглед дека правите AF и BE се антипаралелни, следува дека $XY \parallel AF \parallel CD$, па за дадениот шестаголник е применлива теоремата на Паскал во однос на подредувањето $AEDCBF$. Од обратната теорема на Паскал, $AEDCBF$ е впишан во коника. **(2п)** \square

Нека $E = BH \cap AC$ и $F = CH \cap AB$. Овие точки лежат на кружницата ω , и четириаголникот $MNEF$ е тетивен бидејќи $MN \parallel BC$. Од лемата, применлива е теоремата Паскал за шестаголникот $PMFQNE$, што повлекува $S = A = (QF \cap PE)$. **(2п)**

Конечно, нека $X = QT \cap AS$ и $Y = QE \cap AS$. Бидејќи EF е антипаралелна на BC , AK е A -симедијана за $\triangle AEF$, па $(A, T; E, F) = -1$. Следствено,

$$\begin{aligned} -1 = (A, T; E, F) &\stackrel{Q}{=} (A, X; Y, QF \cap AS) = \\ &(A, X; Y, QF \cap PE) \stackrel{E}{=} (A, EX \cap \omega; Q, P) \quad \mathbf{(2п)} \end{aligned}$$

Од друга страна, $APHQ$ е ромб, па $(A, H; Q, P) = -1$. Значи $EX \cap \omega = H$, што и требаше да се докаже. **(1п)** \square

Објаснувања за распределбата на поени:

- (1 поен) Доказ дека четириаголникот $BXYE$ е тетивен.
- (2 поена) Заклучок дека темињата на шестаголникот лежат на коника.
- *Забелешка:* Поените од претходните две ставки се доделуваат и доколку се покажани аналогни тврдења во специјалниот случај ($ABCDEF \rightarrow PENMFQ$ или аналогна пермутација).
- (2 поена) Доказ дека S, A и $QF \cap PE$ се колинеарни.
- (2 поена) Доказ дека двојниот однос $(A, EX \cap \omega; Q, P) = -1$.
- (1 поен) Заклучок дека $EX \cap \omega = H$.

Задача 5. Нека $n \geq 3$ е цел број. Секоја (единечна) клетка од $n \times n$ табла е обоена така што секои две соседни клетки (кои имаат заедничка страна) се различно обоени. Велиме дека боењето е **убаво** ако, за секоја клетка, ниту една боја не се појавува точно два пати ниту точно четири пати на нејзините соседни клетки.

Одредете го, зависно од n , најмалиот можен број бои при убаво боење.

Решение. Ќе докажеме дека за секој $n \geq 3$, најмалиот број бои доволни за убаво боење на $n \times n$ табла е 5. **(1п)** Најпрво демонстрираме дека 5 бои се секогаш доволни. За клетка (r, c)

(со $1 \leq r \leq n, 1 \leq c \leq n$) дефинираме боја $\varphi(r, c) \equiv r + 2c \pmod{5}$. Така соседите на клетката (r, c) имаат бои $\varphi(r, c) \pm 1$ (вертикално) и $\varphi(r, c) \pm 2$ (хоризонтално). По модул 5, четирите вредности $\varphi(r, c) \pm 1, \varphi(r, c) \pm 2$ се порано различни и воедно се разликуваат од $\varphi(r, c)$. Значи, секоја внатрешна клетка гледа четири различно обоени соседни клетки, секоја рабна клетка гледа три различно обоени соседни клетки, и секоја аголна клетка гледа две различно обоени соседни клетки. Заклучуваме дека дефинираното φ е убаво 5-боење за секој $n \geq 3$. **(1п)**

За да докажеме дека 5 бои се секогаш потребни, аргументираме со противречност (*reductio ad absurdum*). Да претпоставиме дека ϕ е убаво 4-боење на дадена $n \times n$ табла за некој $n \geq 3$. Изведуваме противречност разгледувајќи два случаја во однос на парноста на n .

Случај 1. n е непарен. Да ја разгледаме следната низа од $n - 1$ парови единечни клетки (сп. Слика 1):

$$\{(1, 2), (2, 1)\}, \{(2, 3), (3, 2)\}, \dots, \{(n-1, n), (n, n-1)\}.$$

Секои два последователни пара формираат околина на внатрешна клетка од главната дијагонала. Дополнително, двете клетки од првиот пар ја формираат околината на аголната клетка $(1, 1)$; значи $\phi(1, 2) \neq \phi(2, 1)$. Следно, околината на внатрешната клетка $(2, 2)$ повлекува $\phi(2, 3) = \phi(3, 2)$. Потоа, во однос на внатрешната клетка $(3, 3)$, имаме $\phi(3, 4) \neq \phi(4, 3)$, итн. Заклучуваме дека паровите кои ја сочинуваат разгледуваната низа алтернираат помеѓу дихроматски и монохроматски. **(1п)**

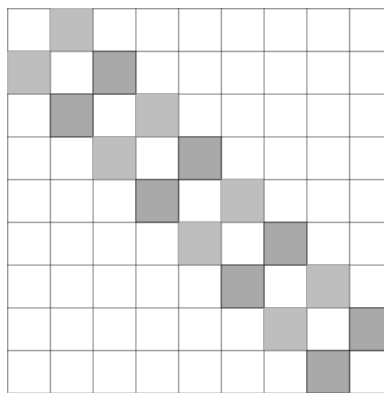


FIGURE 1. На дадената 9×9 табла, разгледуваните парови се наизменично прикажани како светло сиви и темно сиви. Забележуваме дека вкупниот број парови е парен (имено, $8 = 9 - 1$).

Оттука, со оглед дека правиот пар е дихроматски, последниот пар е монохроматски (тука користиме дека $n - 1$ е парен). Но, последниот пар, $\{(n-1, n), (n, n-1)\}$, ја формира околината на аголна клетка (имено, на клетката (n, n)); значи последниот пар не може да е монохроматски. Ова е посакуваната противречност. **(1п)**

Случај 2. n е парен. Да ја разгледаме следната низа од $n - 2$ парови единечни клетки (сп. Слика 2):

$$\{(1, 3), (2, 2)\}, \{(2, 4), (3, 3)\}, \dots, \{(n-2, n), (n-1, n-1)\}.$$

Повторно, секои два последователни пара формираат околина на внатрешна точка, што повлекува дека паровите алтернираат помеѓу монохроматски и дихроматски (при ϕ). **(1п)** Земајќи ја предвид симетријата и фактот дека $n - 2$ е парен, без губење на општоста можеме да претпоставиме дека првиот пар е дихроматски.

Така, со пермутирање на боите доколку е потребно, имаме дека $\phi(1, 1) = 1, \phi(1, 2) = 2, \phi(1, 3) = 3$ и $\phi(2, 2) = 4$. Со оглед дека боењето е правилно (првиот услов), важи $\phi(2, 1) = 3$. Применувајќи го вториот услов за рабната клетка $(2, 1)$, добиваме $\phi(3, 1) = 2$. Но, тогаш

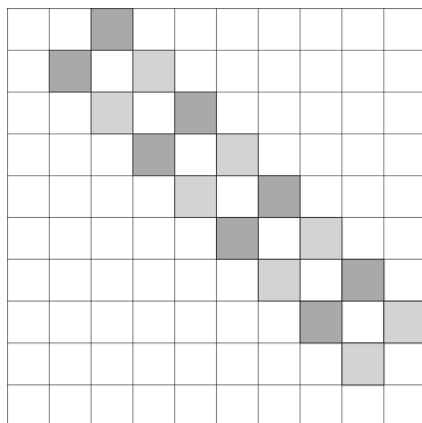


FIGURE 2. На дадената 10×10 табла, разгледуваните парови се наизменично прикажани како темно сиви и светло сиви. Забележуваме дека вкупниот број парови е парен (имено, $8 = 10 - 2$).

ϕ не може да се прошири врз клетките $(2, 3)$ и $(3, 2)$ и притоа да остане убаво. Навистина, околината на внатрешната клетка $(2, 2)$ ја формираат клетките $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, од кои првите две се обоени со 2 и 3, соодветно, што повлекува дека последните две се еднаквообоени во боја од множеството $\{2, 3\}$; од друга страна, со оглед дека боењето е правилно, бојата 2 е забранета за $(3, 2)$ (бидејќи $\phi(3, 1) = 2$) и бојата 3 е забранета за $(2, 3)$ (бидејќи $\phi(1, 3) = 3$). Ова е посакуваната противречност. **(3п)** \square

Објаснувања за распределбата на поени:

- (1 поен) За точен одговор: Независно од n , најмалиот број на бои доволни за убаво боење е 5.
- (1 поен) Конструкција на убаво 5-боење за секој n .
- (1 поен) При претпоставка дека n е непарен и убаво 4-боење е можно, заклучок дека паровите клетки што ја пресекуваат главната дијагонала алтернираат помеѓу монохроматски и дихроматски.
- (1 поен) Комплетирање на *reductio ad absurdum* од претпоставката за убаво 4-боење за некој непарен n .
- (1 поен) При претпоставка дека n е парен и убаво 4-боење е можно, заклучок дека паровите клетки што ја пресекуваат дијагоналата над главната дијагонала алтернираат помеѓу монохроматски и дихроматски.
- (3 поена) Комплетирање на *reductio ad absurdum* од претпоставката за убаво 4-боење за некој парен n .

