ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2026

Недела, 19. Април 2026

Задача 1. Нека $\triangle ABC$ е разностран со опишана кружница k. Од надворешната страна на $\triangle ABC$ се конструирани рамнокраки $\triangle BAK$, $\triangle BCL$ и $\triangle ACM$ со основи BA, CB и AC, сооодветно, така што $\angle ABK + \angle BCL + \angle CAM = 90^\circ$ и точките K, L, M не лежат на k. Нека S е втората пресечна точка на k со опишаната кружница на $\triangle AKM$, а вторите пресечни точка на k со LS, MS и KS се A', B' и C', соодветно. Докажете дека правите AA', BB' и CC' минуваат низ заедничка точка.

Задача 2. Определете ги сите позитивни цели броеви a, b такви што $a \mid b^2 + 1$ и $b \mid a^2 + 1$.

Задача 3. За низата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ велиме дека е *просечна* ако за секој ненегативен цел број i, важи $a_i \leq a_{i+1}$ и $a_{i+3} \leq a_i + a_{i+2}$. Определете го најмалиот позитивен цел број p за кој постои просечна низа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ таква што за секој ненегативен цел број i важи

$$\frac{a_{i+p}}{a_i} > \frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}}.$$

Задача 4. Нека G е сврзан граф со барем две темиња. Темињата на G претставуваат градови а ребрата двонасочни патишта. Вкупно k дипломати се распоредени во темињата на G. Секој *потег* се состои од избирање теме v кое има барем онолку дипломати колку што е степенот $\deg_G(v)$, и испраќање на по еден дипломат долж секое инцидетно ребро со v до соседните темиња на v.

Определете ја најголемата можна вредност за k таква што, за секое почетно распоредување на k дипломати во темињата на G, секоја можна низа од потези е конечна.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.