ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2026

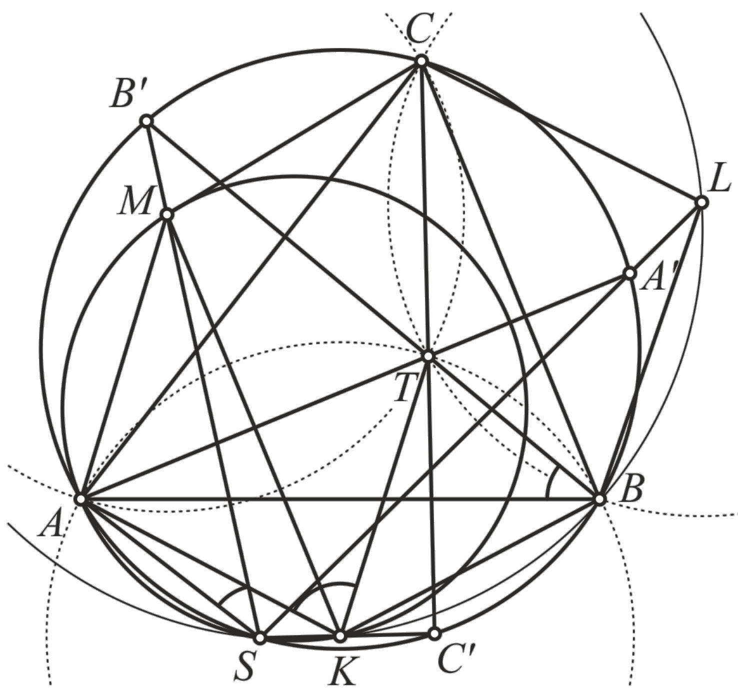
РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 1. Нека $\triangle ABC$ е разностран со опишана кружница k. Од надворешната страна на $\triangle ABC$ се конструирани рамнокраки $\triangle BAK$, $\triangle BCL$ и $\triangle ACM$ со основи BA, CB и AC, соодветно, така што $\angle ABK + \angle BCL + \angle CAM = 90^\circ$ и точките K, L, M не лежат на k. Нека S е втората пресечна точка на k со опишаната кружница на $\triangle AKM$, а вторите пресечни точка на k со LS, MS и KS се A', B' и C', соодветно. Докажете дека правите AA', BB' и CC' минуваат низ заедничка точка.

Решение. Нека $T \neq A$ е втората пресечна точка на кружниците со центри K и M кои минуваат низ точката A. За аглите важи

$$\angle BTC = 180^\circ - \angle ATB + 180^\circ - \angle CTA = \tfrac{1}{2}\angle BKA + \tfrac{1}{2}\angle AMC =$$
$$90^\circ - \angle ABK + 90^\circ - \angle CAM = 90^\circ + \angle BCL = 180^\circ - \tfrac{1}{2}\angle CLB.$$

Следствено, точката T лежи и на кружницата со центар L која минува низ B и C. **(3п)**



Бидејќи $AKTM$ е делтоид, имаме

$$\angle B'BA = \angle B'SA \equiv \angle MSA = \angle MKA = \tfrac{1}{2}\angle TKA = \angle TBA.$$

Оттука, точката T лежи на BB'. Слично,

$$\angle ACC' = 180^\circ - \angle C'SA \equiv 180^\circ - \angle KSA = \angle AMK = \tfrac{1}{2}\angle AMT = \angle ACT\,,$$

па точката T лежи и на CC'. **(3п)**

За да докажеме дека T лежи и на AA', прво докажуваме дека S, K, B и L лежат на кружница. Ова следува од

$$\angle KLB = \frac{1}{2}\angle TLB = \angle TCB \equiv \angle C'CB = \angle C'SB \equiv KSB\,,$$

што е точно бидејќи и $BLTK$ е делтоид. Конечно,

$$\angle BAA' = \angle BSA' \equiv \angle BSL = \angle BKL = \frac{1}{2}\angle BKT = \angle BAT,$$

повлекува дека T лежи на AA'. **(3п)**

Заклучуваме дека правите AA', BB' и CC' минуваат низ заедничка точка (имено, низ T). **(1п)** $\square$

Задача 2. Определете ги сите позитивни цели броеви a, b такви што $a \mid b^2+1$ и $b \mid a^2+1$.

Одговор: Сите решенија се (F_1, F_2), и (F_{2n-1}, F_{2n+1}) и (F_{2n+1}, F_{2n-1}) за $n \geq 1$, каде $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ е низата на Фибоначи со $F_1 = F_2 = 1$. **(1п)**

Решение. За позитивни цели броеви a, b такви што $a \mid b^2+1$ и $b \mid a^2+1$ велиме дека се *добар пар*. Јасно, секои вакви a, b се заемно прости (ако $p|a$ и $p|b$, тогаш $p|b^2$ и $p|b^2+1$, противречност). Специјално, $a = b$ повлекува $(a, b) = (1, 1)$. **(1п)**

Тврдење 1. *(Опаѓање) Нека $1 < a < b$ и (a, b) е добар пар. Нека $c = (a^2+1)/b$. Тогаш $1 \leq c < a$ и (c, a) е добар пар.*

Доказ. Очигледно, $c \in \mathbb{Z}^+$ и $c \mid a^2+1$. Од $b > a$ имаме $c \leq (a^2+1)/a < a+1$. Ако $c = a$, тогаш $b = (a^2+1)/a$ не е цел број освен за $a = 1$, противречност. Значи $c < a$. Останува да покажеме дека $a \mid c^2+1$. Од $a \mid b^2+1$ имаме $b^2 \equiv -1 \pmod a$. Исто $cb = a^2+1 \equiv 1 \pmod a$, па $c \equiv b^{-1} \pmod a$. Следствено, $b^2(c^2+1) \equiv 1 + b^2 \equiv 0 \pmod a$. Од $\gcd(a, b) = 1$, b^2 е инвертибилен mod a, па $a \mid c^2+1$. **(3п)** $\diamond$

Тврдење 2. *Единствен добар пар $(1, t)$ со $1 < t$ е $(1, 2)$.*

Доказ. Од $t|1^2+1 = 2$ имаме $t \in \{1, 2\}$. Бидејќи $t > 1$, заклучуваме дека $t = 2$. Непосредна проверка потврдува дека $(1, 2)$ е добар пар. **(1п)** $\diamond$

Дефинираме низа $x_1 = 1, x_2 = 2$ и $x_{n+1} = (x_n^2+1)/x_{n-1}$.

Тврдње 3. *Секој пар (x_n, x_{n+1}) е добар пар, и секој добар пар (a, b) со $a < b$ се состои од последователни членови на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Доказ. Според Тврдењето 1, започнувајќи од произволен добар пар (a, b) со $1 < a \leq b$, можеме строго да ја опаѓаме првата координата сè додека не дојдеме до добар пар од облик $(1, t)$ со $1 < t$, кој (според Тврдење 2) е единствено $(1, t) = (1, 2)$. Заклучуваме дека секој добар пар (a, b) со $1 < a \leq b$ се состои од два последователни члена на низата генерирана од $(1, 2)$ со рекурзијата $x_{n+1}x_{n_1} = x_n^2 + 1$. **(2п)** $\diamond$

Да го пресметаме x_n. Идентитетот на Фибоначи $F_{2n+1}F_{2n-3} - F_{2n-1}^2 = 1$ (изведен од $F_mF_{n-1} - F_{m-1}F_n = (-1)^n F_{m-n}$ земајќи $m = 2n-1, n = 2n-2$), ни дава $(F_{2n-1}^2+1)/F_{2n-3} = F_{2n+1}$. За $x_1 = F_1 = 1$ и $x_2 = F_3 = 2$, непосредна индукција ни дава дека $x_n = F_{2n-1}$ за секој n. Значи, паровите решенија се точно $(a, b) = (F_{2n-1}, F_{2n+1})$ за $n \geq 1$, дополнително паровите добиени од овие со заменување на местата на a, b, и парот $(1, 1)$. **(2п)** $\square$

Забелешка. Алтернативно решение на задачата се заснова на тоа дека даден пар (a, b) од позитивни цели броеви е добар ако и само ако $ab \mid a^2+b^2+1$, што од друга страна имплицира дека $\frac{a^2+b^2+1}{ab} = 3$ (добро познат пример за техниката Vieta jumping). Последното води до заклучок дека добрите парови се добиваат од секои два последователни члена на низата определена со : $x_1 = x_2 = 1$ и $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$. Општиот член на оваа низа се добива едноставно користејќи ја основната теорија за диференцни равенки.

Задача 3. За низата $a_0, a_1, a_2, \ldots$ велиме дека е *просечна* ако за секој ненегативен цел број i, важи $a_i \le a_{i+1}$ и $a_{i+3} \le a_i + a_{i+2}$. Определете го најмалиот позитивен цел број p за кој постои просечна низа $a_0, a_1, a_2, \ldots$ таква што за секој ненегативен цел број i важи

$$\frac{a_{i+p}}{a_i} > \frac{a_{i+1}}{a_i} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} + \cdots + \frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}}.$$

Решение. Ќе докажеме дека $p = 6$ е најмалиот позитивен цел број што ги задоволува условите нз задачата. **(1п)**
Ја разгледуваме геометриската прогресија $a_i = q^i$, со коефициент $q = \sqrt[3]{3}$. Забележуваме дека важат $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$ и $\sqrt[3]{3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 < \frac{27}{8}$. Од $q > 1$, $a_{i+3} = 3a_i < a_i + q^2 a_i = a_i + a_{i+2}$ и

$$\frac{a_{i+6}}{a_i} = q^6 = 9 = 6 \cdot \frac{3}{2} > 6q = \frac{a_{i+6}}{a_{i+5}} + \frac{a_{i+5}}{a_{i+4}} + \frac{a_{i+4}}{a_{i+3}} + \frac{a_{i+3}}{a_{i+2}} + \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i},$$

следува дека условите се исполнети за $p = 6$. **(2п)**
Да претпоставиме дека неравенството од условот е исполнето за некој $p < 6$.
За $p = 1$ имаме $\frac{a_{i+p}}{a_i} = \frac{a_{i+1}}{a_i}$ - контрадикција.
За секој $p \in \{2, 3, 4, 5\}$, од дадените услови и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина следува дека $\frac{a_{i+p}}{a_i} > \frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}} + \cdots + \frac{a_{i+1}}{a_i} \ge p\sqrt[p]{\frac{a_{i+p}}{a_{i+p-1}} \cdots \frac{a_{i+1}}{a_i}} = p\sqrt[p]{\frac{a_{i+p}}{a_i}}$, т.е., $\frac{a_{i+p}}{a_i} > \sqrt[p-1]{p^p}$, за секој ненегативен цел број i.
Сега $a_{j+1} \le a_j + a_{j-1} \le 2a_j$ важи за секој позитивен цел број j и имаме:

- За $p = 2$ важи $a_{i+2} \le 2a_{i+1} \le 4a_i = 2^2 a_i$ - контрадикција.
- За $p = 3$ важи $a_{i+3} \le a_{i+2} + a_i \le 5a_i < \sqrt{27} a_i = \sqrt{3^3} a_i$ - контрадикција.
- За $p = 4$ од $\frac{a_{i+4}}{a_i} > \sqrt[3]{4^4} = 2 \cdot \sqrt[3]{32} > 6$ следува дека постои индекс i, таков што $\frac{a_{i+4}}{a_{i+3}} > \sqrt[3]{4} > \frac{3}{2}$. Сега $a_{i+1} > a_{i+4} - a_{i+3} > (1 - \frac{2}{3}) a_{i+4} = \frac{1}{3} a_{i+4}$, повлекува дека $a_{i+4} < 3a_{i+1} < 6a_i < \sqrt[3]{4^4} a_i$, што е контрадикција.
- За $p = 5$ важи $\frac{a_{i+5}}{a_i} > \sqrt[4]{5^5} > 5\sqrt{2} > 7$. Според ова постои индекс $i > 2$ за кој $\frac{a_{i+1}}{a_i} = q \ge \sqrt[4]{5}$. Од $a_{i-2} \ge a_{i+1} - a_i \ge (q-1) a_i$ добиваме

  $$a_{i+3} \le a_{i+2} + a_i \le a_{i+1} + a_{i-1} + a_i \le a_i + a_{i-2} + 2a_i = 3a_i + a_{i-2} \le (1 + \tfrac{3}{q-1}) a_{i-2}.$$

  Ако $q \ge \frac{3}{2}$, тогаш добиваме $7a_{i-2} < a_{i+3} \le (1 + \frac{3}{q-1}) a_{i-2} \le 7a_{i-2}$, што е контрадикција. Следува дека $\frac{3}{2} > q > \sqrt[4]{5}$. Сега бидејќи важи $q^4 \cdot \frac{a_{j+1}}{a_j} \ge \frac{a_{j+5}}{a_j} \ge 5 \cdot \sqrt[4]{5}$, заклучуваме дека $\frac{a_{j+1}}{a_j} \ge \frac{80}{81} \cdot \sqrt[4]{5} > \sqrt{2} > \frac{7}{5}$, за секој $j \ge 1$ $((\frac{80}{81})^4 \cdot 5 > \frac{77 \cdot 5}{81} > 4)$. Оттука

  $$a_{i+3} \le a_{i+2} + a_i \le a_{i+1} + a_{i-1} + a_i \le a_i + a_{i-2} + \tfrac{5}{7} a_i + a_i = \tfrac{19}{7} a_i + a_{i-2} \le \tfrac{45}{7} a_{i-2} < 7a_{i-2},$$

  што повторно е контрадикција.

Заклучуваме дека условите на задачата не се исполнети за $p \le 5$. **(7п)** □

Објаснувања за распределбата на поени:

- (1 поен) Точен одговор, т.е. наведување на граничната вредност $p = 6$ (дел **A** од доказот).
- (2 поена) Конструкција на соодветна низа за $p = 6$ (дел **B** од доказот).
- (7 поени) Доказ дека нема помала граница (дел **C** од доказот).

Доколку доказот на **C** е нецелосен може да се добијат поени според следната листа:

- **C1:** Доказ на неравенството $\frac{a_{i+p}}{a_i} > \sqrt[p-1]{p^p}$. **(1п)**
- **C2:** Доказ за $p \le 3$. **(2п)**
- **C3:** Доказ за $p = 4$. **(2п)**
- **C4:** Доказ за $p = 5$. **(4п)**

Притоа, **C1** не се собира со останатите (**C1**+**C2**=**C2**, **C1**+**C3**=**C3**, **C1**+**C4**=**C1**), а при собирање на останатите се намалува еден поен (**C2**+**C3 - (3п)**, **C2**+**C4 - (5п)**, **C3**+**C4 - (5п)**). Парцијалните поени добиени од **C** се додаваат на останатите.

Задача 4. Нека G е сврзан граф со барем две темиња. Темињата на G претставуваат градови а ребрата двонасочни патишта. Вкупно k дипломати се распоредени во темињата на G. Секој *потег* се состои од избирање теме v кое има барем онолку дипломати колку што е степенот $\deg_G(v)$, и испраќање на по еден дипломат должж секое инцидетно ребро со v до соседните темиња на v.

Определете ја најголемата можна вредност за k таква што, за секое почетно распоредување на k дипломати во темињата на G, секоја можна низа од потези е конечна.

Решение. *Одговор:* Нека m е бројот на ребра на G. За секое почетно распоредување на k дипломати во темињата на G, секоја можна низа од потези е конечна ако и само ако $k \leq m-1$. **(1п)**

Прв дел. Ќе покажеме дека ако $k \leq m-1$ тогаш секоја можна низа од потези е конечна независно од почетното распоредување на дипломатите. Изложуваме два доказа.

Доказ 1. Да претпоставиме дека за некое почетно распоредување на дипломатите постои бесконечна низа од потези. Постојат конечно многу распоредувања на дипломатите во темињата (градовите), што повлекува дека некое распоредување мора да се повтори (при бесконечната низа потези). Нека таква е конфигурацијата A; постои низа од потези $S = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ која започнува од A и резултира со A. **(1п)**

Нека C_1 и C_2 се две соседни темиња, и m_1 (одн. m_2) се бројот на потези содржани во S при кои испраќаме дипломати од C_1 (одн. C_2). Ако $m_1 > m_2$, тогаш C_2 добило повеќе дипломати од C_1 одошто испратило дипломати во C_1. Следствено, со оглед дека во C_2 има еднаков број дипломати на почетокот и крајот на S, постои теме C_3 такво што повеќе дипломати се испратени од C_2 во C_3 одошто возвратно. Со други зборови, $m_2 > m_3$. Итерирајќи го ова аргументирање, и имајќи предвид дека бројот на темиња е конечен, постои циклус од темиња $C_1C_2 \ldots C_lC_1$ такви што $m_1 > m_2 > m_3 > \cdots > m_l > m_1$, противречност. Значи, секои две соседни темиња допринесуваат подеднакво во S. Со оглед дека G е сврзан, заклучуваме и дека секое теме е „рамноправно“ т.е. допринесува подеднакво во S.

Рамноправноста на секои две соседни темиња (и фактот дека при секоја конфигурација единствено што нè интересира за секое теме е колку, а не кои, дипломати се распоредни во тоа теме) ни овозможува на секое ребро да му придружиме дипломат - имено, на ребро C_1C_2 му го придружуваме дипломатот првично распреден во C_1 или C_2 кој прв го користи реброто C_1C_2 при потезите од низата S (тој дипломат е секогаш во еден од краевите на тоа ребро во текот на S). **(2п)**

Да забележиме дека ова придружување е инјективно, што повлекува дека $k \geq m$, противречност. **(1п)** □

Доказ 2. При потег од темето v, велиме дека v „исфрла“ дипломати. Ќе го користиме следново помошно тврдење.

Тврдење. *Ако постои бесконечна низа од потези, тогаш секое теме од G исфрла бесконечно многу пати. Специјално, секое теме исфрла барем еднаш.*
Доказ. Во секој момент од процесот, постои теме w во кое има барем $\deg(w)$ дипломати. Низата од потези е бесконечна, што повлекува дека постои теме v кое исфлра бескончено

многу пати. При секое исфрлање на v, по еден дипломат преминува во секое соседно теме на v. Доколку постои сосед u на v кој исфрла само конечно многу пати, тогаш после конечно многу потези гледано од последното исфлање од u, темето u ќе има акумулирано доволно дипломати (имено, барем $\deg(u)$) за да може повторно да исфрла. Од ова заклучуваме дека секој сосед u на v исфрла бесконечно многу пати. Така, бидејќи G е сврзан, со итерирање на претходниот заклучок имаме дека секое теме исфрла бесконечно многу пати. **(1п)** $\diamond$

Нека е дадена бесконечна низа од потези S. За секое ребро e, го разгледуваме првиот дипломат што го користи e (за да прејде од едниот во другиот крај на e) при некој потег од S. Му го придружуваме на e тој дипломат. Можеме да сметаме дека во сите подоцнежни исфрлања придружениот дипломат секогаш е во еден од краевите на e. Така, придружувањето е инјективно. **(2п)** Почетното распоредување има помалку дипломати од ребра. Значи, постои ребро на кое не му е придружен дипломат. Следствено, темињата кои се краеви на такво ребро никогаш не исфрлаат. Имајќи го предвид горното тврдење, добиваме противречност. **(1п)** $\square$

Втор дел. Ќе покажеме дека ако $k \geq m$ тогаш постои конечно распоредување на дипломатите при кое процесот на исфрлање никогаш не се стабилизира т.е. трае бесконечно.

Избираме m дипломати и ги боиме во бело, а останите дипломати ги боиме во црно. Избираме една ациклична ориентација на G, т.е. секое ребро го насочуваме т.ш. нема насочени циклуси; еквивалетно, избираме линеарно подредување на темињата $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и секое ребро го насочуваме кон завршетокот со поголем индекс. **(1п)** Нека е почетна конфигурација при која во секое теме u има $\deg^{+}(u)$ бели дипломати. Ги распоредуваме црните дипломати (доколку ги има) произволно. **(1п)** Со оглед дека диграфот е ацикличен, постои теме-извор (на пример, такво е v_1). Значи постои теме v со барем $\deg(v)$ дипломати (точно $\deg(v)$ бели дипломати). Исфрламе од v и ја менуваме насоката на секое ребро инцидентно со v. **(1п)** Новодобиената ориентација е повторно ациклична и бројот на бели диломати во секое теме u е (повторно) еднаков на излезниот степен $\deg^{+}(u)$. **(1п)** Значи, постои теме-извор, и процесот на исфрлање може да повтори (бесконечно). **(1п)** $\square$