33. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Недела, 5. Април 2026

Задача 1. Некои клетки (1×1 квадратчиња) од правоаголна мрежа се обоени така што секоја редица и секоја колона не содржи повеќе од n обоени клетки, каде $n \geq 2$ е даден број. За множество M од обоени клетки велиме дека е **добро** доколку за секои две клетки од M кои лежат во различни редици и различни колони постои обоена клетка што е во иста редица со едната и во иста колона со другата клетка.

Одредете го, зависно од n, најголемиот можен број елементи во добро множество M.

Задача 2. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажете дека

$$\frac{a(a-b)}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b(b-c)}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{c(c-a)}{\sqrt{a^2+1}} \geq 0\,.$$

Задача 3. Одредете ги сите позитивни цели броеви z за кои z, $z+7$ и $z+11$ се степени на прости броеви. (*Степен на прост број* е позитивен цел број од обликот p^n, каде што p е прост број, а n е позитивен цел број.)

Задача 4. Нека ABC е триаголник со ортоцентар H, и нека ω е кружницата со дијаметар AH. Избрани се точки $P, Q \in \omega$, $M \in AB$, $N \in AC$ такви што $PQ \parallel MN \parallel BC$. Нека K е средишна точка на отсечката BC, $T = AK \cap \omega$ и $S = PM \cap QN$. Докажете дека правите AS, BH и QT се конкурентни, т.е., се сечат во една заедничка точка или се паралелни.

Задача 5. Нека $n \geq 3$ е цел број. Секоја (единечна) клетка од $n \times n$ табла е обоена така што секои две соседни клетки (кои имаат заедничка страна) се различно обоени. Велиме дека боењето е **убаво** ако, за секоја клетка, ниту една боја не се појавува точно два пати ниту точно четири пати на нејзините соседни клетки.

Одредете го, зависно од n, најмалиот можен број бои при убаво боење.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 8 поени.