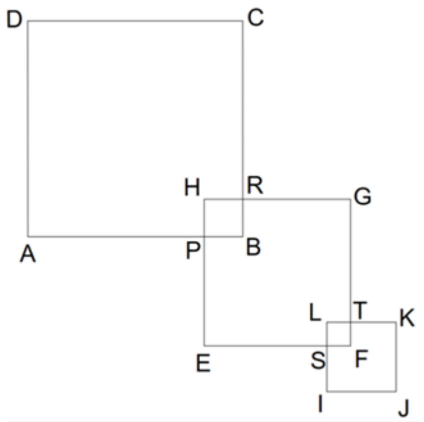
ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

6 одделение

1. Четирицифрениот број n е содржател на бројот 5. Сите цифри на бројот n се различни меѓу себе и различни од нула. Ако од записот на бројот n се избришат цифрите на стотките и десетките, се добива двоцифрен број делив со 9. Ако пак, од записот на бројот n се избришат цифрите на десетките и единиците, се добива двоцифрен број делив со 4. Определи го најголемиот четирицифрен број n за кој важат сите горенаведени особини.

2. Во ходник се наредени 20 светилки во редица и означени со броевите од 1 до 20. На почетокот, сите светилки се исклучени. Секоја светилка има само едно копче за вклучување или исклучување, така што ако светилката е исклучена, со притискање на копчето, таа се вклучува, а ако светилка е вклучена, со притискање на копчето таа се исклучува. Низ ходникот поминуваат 20 луѓе, еден по еден. Секој човек го притиска копчето на светилките означени со броеви кои се деливи со неговиот реден број на влегување (така, човекот кој влегува петти во ходникот има реден број 5 и го притиска копчето на светилките означени со броевите 5, 10, 15 и 20). Образложи зошто откако ќе поминат сите 20 луѓе, светилката означена со број 20 ќе биде исклучена.

3. Страните на квадратите $ABCD$, $EFGH$ и $IJKL$, дадени на сликата, се однесуваат како $3:2:1$, соодветно. Должината на страната на квадратот $PBRH$ е $5\,\text{cm}$, а должината на страната на квадратот $SFTL$ е $3\,\text{cm}$. Ако периметарот на фигурата $APESIJKTGRCDA$ е еднаков на $208\,\text{cm}$, пресметај ја нејзината плоштина.



4. Ана подготвувала лимонада мешајќи лимонов концентрат и вода. Притоа, водата зафаќала 10% од вкупниот волумен на нејзината мешавина. Бидејќи лимонадата била прекисела, таа одлучила да ја разреди и додала уште 200 ml вода. Во новата разредена мешавина, водата зафаќа 50% од вкупниот волумен. Колку мililитри изнесувал волуменот на лимонадата пред Ана да ја разреди?

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

7 одделение

1. Туристичка агенција нуди патување со следните попусти:

- 10% поевтино, ако се уплати од 7 до 13 дена пред денот на тргнување,
- 25% поевтино, ако се уплати од 14 до 29 дена пред денот на тргнување и
- 40% поевтино, ако се уплати 30 и повеќе дена пред денот на тргнување.

Патник уплатил 21000 денари за тоа патување. Ако уплатил еден ден подоцна, патувањето ќе го чинело 4200 денари повеќе. Колку дена пред денот на тргнување, патникот ја направил уплатата?

2. Определи го бројот на природни броеви помали или еднакви на 2026 кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?

3. Определи ги сите парови природни броеви m и n за кои важи равенството $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{17}$.

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC $\left(\overline{AC}=\overline{BC}\right)$ со агол при врвот од $100°$. Нека T е точка во внатрешноста на дадениот триаголник, така што $\measuredangle TAC = 10°$ и $\measuredangle ACT = 20°$. Пресметај ја големината на $\measuredangle CTB$.

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

7 одделение

1. Туристичка агенција нуди патување со следните попусти:

- 10% поевтино, ако се уплати од 7 до 13 дена пред денот на тргнување,
- 25% поевтино, ако се уплати од 14 до 29 дена пред денот на тргнување и
- 40% поевтино, ако се уплати 30 и повеќе дена пред денот на тргнување.

Патник уплатил 21000 денари за тоа патување. Ако уплатил еден ден подоцна, патувањето ќе го чинело 4200 денари повеќе. Колку дена пред денот на тргнување, патникот ја направил уплатата?

2. Определи го бројот на природни броеви помали или еднакви на 2026 кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?

3. Определи ги сите парови природни броеви m и n за кои важи равенството $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{17}$.

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC $\left(\overline{AC}=\overline{BC}\right)$ со агол при врвот од $100°$. Нека T е точка во внатрешноста на дадениот триаголник, така што $\measuredangle TAC = 10°$ и $\measuredangle ACT = 20°$. Пресметај ја големината на $\measuredangle CTB$.

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

8 одделение

1. Пресметај $x^{2026}+2026y$, ако за реалните броеви x и y важи $x^2+4y^2-2x+20y+26=0$.

2. Нека p, q и r се прости броеви и нивниот производ е еднаков на природниот број n. Определи ги сите можни вредности на n, за кои важи равенството $(p+1)q(r+1)=n+138$.

3. Даден е четириаголникот $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC}=18$ cm и $\overline{BD}=24$ cm и аголот меѓу нив е $30°$. Нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот $ABCD$, соодветно.

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

б) Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

4. Аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија е за 20 поголема од аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри. Колку сестри има Петар, ако аритметичката средина на годините на Петар, неговите сестри, Јаков, Калина и Евгенија е за 10 помала од аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија?

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

8 одделение

1. Пресметај $x^{2026}+2026y$, ако за реалните броеви x и y важи $x^2+4y^2-2x+20y+26=0$.

2. Нека p, q и r се прости броеви и нивниот производ е еднаков на природниот број n. Определи ги сите можни вредности на n, за кои важи равенството $(p+1)q(r+1)=n+138$.

3. Даден е четириаголникот $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC}=18$ cm и $\overline{BD}=24$ cm и аголот меѓу нив е $30°$. Нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот $ABCD$, соодветно.

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

б) Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

4. Аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија е за 20 поголема од аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри. Колку сестри има Петар, ако аритметичката средина на годините на Петар, неговите сестри, Јаков, Калина и Евгенија е за 10 помала од аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија?

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

9 одделение

1. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2026}$ се природни броеви и нека

$$x = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2025}) \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2026})$$

и

$$y = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}) \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2025}) .$$

Што е точно: $x < y$, $x = y$ или $x > y$? Образложи го одговорот.

2. Даден е рамностран триаголник ABC со страна a. Нека P е произволна точка од помалиот кружен лак AC од опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{BP}$.

3. Нека n е природен број. Претстави го бројот $m = 6^{8n} + 6^{4n+1} + 1$ како збир од квадратите на три различни природни броеви.

4. Нека ABC е триаголник, точката D е средина на страната AB и E е точка на страната BC таква што $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EC}$. Ако $\measuredangle CDA = \measuredangle BAE$, тогаш $\measuredangle BAC = 90°$. Докажи!

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
18.4.2026 година

9 одделение

1. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2026}$ се природни броеви и нека

$$x = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2025}) \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2026})$$

и

$$y = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}) \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2025}) .$$

Што е точно: $x < y$, $x = y$ или $x > y$? Образложи го одговорот.

2. Даден е рамностран триаголник ABC со страна a. Нека P е произволна точка од помалиот кружен лак AC од опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{BP}$.

3. Нека n е природен број. Претстави го бројот $m = 6^{8n} + 6^{4n+1} + 1$ како збир од квадратите на три различни природни броеви.

4. Нека ABC е триаголник, точката D е средина на страната AB и E е точка на страната BC таква што $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EC}$. Ако $\measuredangle CDA = \measuredangle BAE$, тогаш $\measuredangle BAC = 90°$. Докажи!

Време за работа 180 минути.

Секоја точно решена задача се вреднува со по 25 поени.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Четирицифрениот број n е содржател на бројот 5. Сите цифри на бројот n се различни меѓу себе и различни од нула. Ако од записот на бројот n се избришат цифрите на стотките и десетките, се добива двоцифрен број делив со 9. Ако пак, од записот на бројот n се избришат цифрите на десетките и единиците, се добива двоцифрен број делив со 4. Определи го најголемиот четирицифрен број n за кој важат сите горенаведени особини.

Решение. Нека $n = \overline{abcd}$. Од условот бројот n да е содржател на 5, следува дека неговата последна цифра мора да биде 0 или 5. Бидејќи сите цифри на n се различни од нула, заклучуваме дека $d = 5$, па $n = \overline{abcd} = \overline{abc5}$. (**5 поени**)

Ако од записот на бројот $n = \overline{abc5}$ ги избришеме цифрата на стотките b и цифрата на десетките c, го добиваме двоцифрениот број $\overline{a5}$. Според условот, овој број е делив со 9, па следува дека 9 е делител на збирот на неговите цифри $a + 5$. Ова е задоволено единствено за $a = 4$, од каде следува $n = \overline{abcd} = \overline{4bc5}$. (**5 поени**)

Ако сега, од записот на бројот $n = \overline{4bc5}$ ги избришеме цифрата на десетките c и цифрата на единиците $d = 5$, го добиваме двоцифрениот број $\overline{4b}$. Според условот, овој број е делив со 4, па $b \in \{0, 4, 8\}$. Но, сите цифри на бројот $n = \overline{4bc5}$ треба да се различни меѓу себе и различни од нула, па следува дека $b = 8$. Според тоа, добиваме $n = \overline{abcd} = \overline{48c5}$. (**5 поени**)

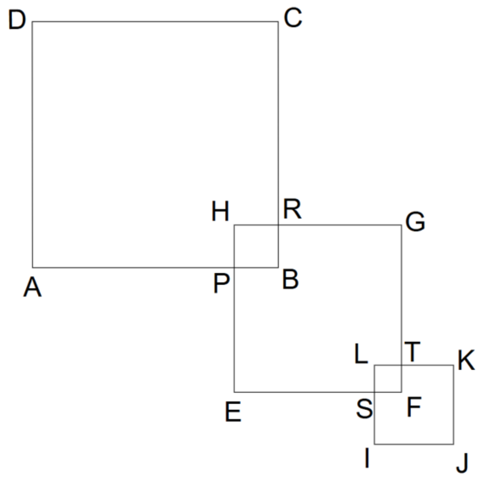
Бидејќи цифрата c мора да биде различна од веќе употребените цифри 4, 8 и 5, и различна од нула, добиваме дека $c \in \{1, 2, 3, 6, 7, 9\}$. (**5 поени**) Според тоа, најголемиот четирицифрен број n за кој важат сите наведени услови е $n = 4895$. (**5 поени**)

2. Во ходник се наредени 20 светилки во редица и означени со броевите од 1 до 20. На почетокот, сите светилки се исклучени. Секоја светилка има само едно копче за вклучување или исклучување, така што ако светилката е исклучена, со притискање на копчето, таа се вклучува, а ако светилка е вклучена, со притискање на копчето таа се исклучува. Низ ходникот поминуваат 20 луѓе, еден по еден. Секој човек го притиска копчето на светилките означени со броеви кои се деливи со неговиот реден број на влегување (така, човекот кој влегува петти во ходникот има реден број 5 и го притиска копчето на светилките означени со броевите 5, 10, 15 и 20). Образложи зошто откако ќе поминат сите 20 луѓе, светилката означена со број 20 ќе биде исклучена.

Решение. Првиот човек кој влегува во ходникот има реден број на влегување 1 и го притиска копчето на светилките означени со броеви кои се деливи со 1, т.е. копчето на светилките означени со броевите од 1 до 20. Вториот човек има реден број на влегување 2 и го притиска копчето на светилките означени со броеви деливи со 2, т.е. копчето на светилките означени со броевите: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 и 20. Третиот човек има реден број на влегување 3 и го притиска копчето на светилките означени со броеви деливи со 3, т.е. копчето на светилките означени со броевите: 3, 6, 9, 12, 15 и 18. Постапката продолжува понатаму. Заклучуваме дека 20-тиот човек има реден број на влегување 20 и го притиска копчето на светилките означени со број делив со 20, односно само копчето на светилката означена со бројот 20 (**5 поени**) Значи копчето на светилката означена со бројот 20 ќе го притиснат луѓето чиј реден број на влегување е делител на 20. Делители на 20 се: 1, 2, 4, 5, 10 и 20, па копчето на светилката со број 20 ќе го притиснат луѓето со реден број 1, 2, 4, 5, 10 и 20, односно првиот, вториот, четвртиот, петтиот, десеттиот и дваесеттиот човек. (**10 поени**) Бидејќи на почетокот сите светилки се исклучени, првиот ќе ја вклучи, вториот ќе ја исклучи, четвртиот ќе ја вклучи, петтиот ќе ја исклучи, десеттиот ќе ја вклучи, а 20-тиот човек ќе ја исклучи светилката со број 20. Значи, на крај, откако низ ходникот ќе поминат сите 20 луѓе, светилката со број 20 ќе биде исклучена. (**10 поени**)

3. Страните на квадратите $ABCD$, $EFGH$ и $IJKL$, дадени на сликата, се однесуваат како $3:2:1$, соодветно. Должината на страната на квадратот $PBRH$ е $5\,\text{cm}$, а должината на страната на квадратот $SFTL$ е $3\,\text{cm}$. Ако периметарот на фигурата $APESIJKTGRCDA$ е еднаков на $208\,\text{cm}$, пресметај ја нејзината плоштина.

Решение. Прв начин: Нека страните на квадратите *ABCD*, *EFGH* и *IJKL* ги означиме со a, b и c, соодветно, а нивните периметри со L_1, L_2 и L_3, соодветно. Од условот на задачата имаме дека $a : b : c = 3 : 2 : 1$, од каде следува дека $a = 3k, b = 2k$ и $c = k$, за некој број $k > 0$. (**5 поени**) Тогаш периметарот L на фигурата *APESIJKTGRCDA* се добива кога од збирот на периметрите на квадратите $ABCD, EFGH$ и $IJKL$, се одземаат периметрите на квадратите $PBRH$ и $SFTL$, т.е.



$$L = L_1 + L_2 + L_3 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 4a + 4b + 4c - 32 = 12k + 8k + 4k - 32 = 24k - 32.$$

Од условот на задачата имаме $24k - 32 = 208$, од каде следува дека $k = \frac{240}{24} = 10$. (**10 поени**)

Значи страната на квадратот $ABCD$ е $a = 3 \cdot 10 = 30$ cm, страната на квадратот $EFGH$ е $b = 2 \cdot 10 = 20$ cm и страната на $IJKL$ е $c = 10$ cm. (**5 поени**)

Плоштината на фигурата *APESIJKTGRCDA* се добива кога од збирот на плоштините на квадратите $ABCD, EFGH$ и $IJKL$, се одземаат плоштините на квадратите $PBRH$ и $SFTL$, т.е.

$$P = 30^2 + 20^2 + 10^2 - 5^2 - 3^2 = 900 + 400 + 100 - 25 - 9 = 1366 \text{ cm}^2. \text{ (**5 поени**)}$$

Втор начин: Нека страните на квадратите *ABCD*, *EFGH* и *IJKL* ги означиме со a, b и c, соодветно. Од условот на задачата имаме дека $a : b : c = 3 : 2 : 1$, од каде следува дека $a = 3k, b = 2k$ и $c = k$, за некој број $k > 0$. (**5 поени**) Бидејќи $\overline{PB} = \overline{BR} = \overline{RH} = \overline{HP} = 5$ cm, $\overline{SF} = \overline{FT} = \overline{TL} = \overline{LS} = 3$ cm, следува:

$$\overline{AP} = \overline{RC} = a - 5 = 3k - 5,$$

$$\overline{PE} = \overline{GR} = b - 5 = 2k - 5,$$

$$\overline{ES} = \overline{TG} = b - 3 = 2k - 3,$$

$$\overline{SI} = \overline{KT} = c - 3 = k - 3.$$

Периметарот L на фигурата *APESIJKTGRCDA* е 208 cm, па добиваме:

$$L = \overline{AP} + \overline{PE} + \overline{ES} + \overline{SI} + \overline{IJ} + \overline{JK} + \overline{KT} + \overline{TG} + \overline{GR} + \overline{RC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 208 \text{ cm, т.е.}$$
$$2 \cdot 3k + 2 \cdot (3k - 5) + 2 \cdot (2k - 5) + 2 \cdot (2k - 3) + 2 \cdot (k - 3) + 2k = 208,$$

од каде следува дека $k = \frac{240}{24} = 10$. (**10 поени**) Значи страната на квадратот $ABCD$ е $a = 3 \cdot 10 = 30$ cm, страната на квадратот $EFGH$ е $b = 2 \cdot 10 = 20$ cm и страната на $IJKL$ е $c = 10$ cm. (**5 поени**)

Плоштината на фигурата *APESIJKTGRCDA* се добива кога од збирот од плоштините на квадратите $ABCD, EFGH$ и $IJKL$, се одземаат плоштините на квадратите $PBRH$ и $SFTL$, т.е.

$$P = 30^2 + 20^2 + 10^2 - 5^2 - 3^2 = 900 + 400 + 100 - 25 - 9 = 1366 \text{ cm}^2. \text{ (**5 поени**)}$$

4. Ана подготвувала лимонада мешајќи лимонов концентрат и вода. Притоа, водата зафаќала 10% од вкупниот волумен на нејзината мешавина. Бидејќи лимонадата била прекисела, таа одлучила да ја разреди и додала уште 200 ml вода. Во новата разредена мешавина, водата зафаќа 50% од вкупниот волумен. Колку милилитри изнесувал волуменот на лимонадата пред Ана да ја разреди?

Решение. Прв начин: Нека волуменот (изразен во милилитри) на првичната мешавина е V. Од оваа мешавина, 10% биле вода, значи имало 0,1V ml вода, а 0,9V ml лимонов концентрат (**5 поени**).
Потоа, Ана додала 200 ml вода, па новата разредена мешавина има волумен (V+200) ml. Притоа водата зафаќа волумен (0,1V+200) ml (**8 поени**), а од условот на задачата тоа е 50% од вкупниот волумен на новата разредена мешавина, па имаме

$$0{,}1V+200=0{,}5(V+200).$$

Од последната равенка добиваме 0,1V+200=0,5V+100, односно 200−100=0,5V−0,1V. Според тоа, 100=0,4V од каде следува V=100 : 0,4=1000 : 4=250 (**12 поени**).
Првичната мешавина, односно неразредената лимонада зафаќала волумен од 250 ml.

Втор начин: Нека волуменот (изразен во милилитри) на првичната мешавина е V. Од оваа мешавина, 10% биле вода, значи имало 0,1V ml вода, а 0,9V ml лимонов концентрат (**5 поени**).

Потоа, Ана додала 200 ml вода, па новата разредена мешавина има волумен (V+200) ml. Од условот на задачата водата зафаќа 50% од вкупниот волумен на новата разредена мешавина, па следува дека и лимоновиот концентрат зафаќа 50% од вкупниот волумен на новата разредена мешавина, а тоа е 0,5(V+200). (**8 поени**) Бидејќи Ана додала само вода, волуменот на лимоновиот концентат останал ист во двете мешавини, па ја добиваме равенката

$$0{,}9V=0{,}5(V+200).$$

Од последната равенка добиваме $0{,}9V=0{,}5V+100$, односно $0{,}9V-0{,}5V=100$. Според тоа, $0{,}4V=100$ од каде следува $V=100:0{,}4=1000:4=250$ (**12 поени**).
Првичната мешавина, односно неразредената лимонада зафаќала волумен од 250 ml.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Туристичка агенција нуди патување со следните попусти:

- 10% поевтино, ако се уплати од 7 до 13 дена пред денот на тргнување,
- 25% поевтино, ако се уплати од 14 до 29 дена пред денот на тргнување и
- 40% поевтино, ако се уплати 30 и повеќе дена пред денот на тргнување.

Патник уплатил 21000 денари за тоа патување. Ако уплатил еден ден подоцна, патувањето ќе го чинело 4200 денари повеќе. Колку дена пред денот на тргнување, патникот ја направил уплатата?

Решение. Прв начин: Нека со x ја означиме цената на патувањето без попуст. Според условите на задачата, можеме да заклучиме дека патникот искористил некој од попустите. Да ги разгледаме поединечно трите случаи. Ако патникот уплатил 7 дена пред денот на тргнување, тогаш важи $0{,}9x=21000$, т.е. за цената без попуст би имале $x=\frac{70000}{3}\approx 23333{,}(3)$. Тогаш, според условот на задачата, ако уплатил ден покасно, односно шестиот ден пред тргнувањето, ќе требало да уплати 21000+4200=25200, односно таа би била цената без попуст. Но таа цена е различна од цената без попуст која ја добиваме под оваа претпоставка, што значи дека претпоставката е грешна, односно не е можно патникот да уплатил 7 дена пред денот на тргнување. (**10 поени**)
Ако патникот уплатил 14 дена пред денот на тргнување, тогаш важи $0{,}75x=21000$, т.е. за цената без попуст би имале $x=\frac{210000}{75}=28000$. Тогаш, според условот на задачата, ако уплатил ден покасно, односно тринаесеттиот ден пред тргнувањето, ќе требало да уплати $0{,}9\cdot 28000=25200$ денари, што е точно за 4200 денари повеќе од 21000, колку што го чинело патувањето. (**10 поени**)
Заклучуваме дека патникот го уплатил патувањето 14 дена пред денот на тргнување, што го исклучува третиот случај. (**5 поени**)

2. Определи го бројот на природни броеви помали или еднакви на 2026 кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?

Решение. Прв начин: За да преброиме колку од природните броеви кои се помали или еднакви на 2026, не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9, и 15, прво ќе ги преброиме сите природни броеви помали или еднакви на 2026 што се деливи со тие броеви.
Броеви деливи со 6 има 337, бидејќи 2026 : 6 = 337 и остаток 4. (**2 поени**)
Броеви деливи со 9 има 225, бидејќи 2026 : 9 = 225 и остаток 1. (**2 поени**)
Броеви деливи со 15 има 135, бидејќи 2026 : 15 = 135 и остаток 1. (**2 поени**)
Ако ги собереме сите овие броеви, некои броеви сме ги изброиле повеќепати.
Броевите деливи и со 6 и со 9, односно со НЗС(6, 9) = 18, сме ги броеле двапати. Исто така, броевите деливи со НЗС(6, 15) = 30 сме ги броеле двапати, а двапати сме ги броеле и броевите деливи со НЗС(9, 15) = 45.
Броевите кои истовремено се деливи со 6, 9 и 15, т.е. со НЗС(6, 9, 15) = 90 сме ги броеле трипати.
Броеви деливи со 18 има 112, бидејќи 2026 : 18 = 112 и остаток 10. (**3 поени**)
Броеви деливи со 30 има 67, бидејќи 2026 : 30 = 67 и остаток 16. (**3 поени**)
Броеви деливи со 45 има 45, бидејќи 2026 : 45 = 45 и остаток 1. (**3 поени**)
Броеви деливи со 90 има 22, бидејќи 2026 : 90 = 22 и остаток 46. (**3 поени**)
Добиваме дека природни броеви помали или еднакви на 2026 што се деливи со 6, 9 или 15 има

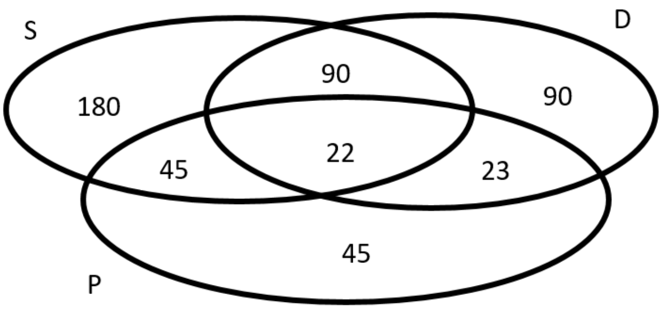
$$337+225+135-(112+67+45)+22=697-224+22=495.$$

Тогаш, бројот на бараните броеви е: 2026 – 495 = 1531.

Значи, природни броеви помали или еднакви на 2026 што не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15 има 1531. (**7 поени**)

<u>Втор начин</u>: Задачата може да се реши и со помош на Венов дијаграм. Нека S е множеството на сите броеви помали или еднакви на 2026 кои се деливи со бројот 6, D е множеството на сите броеви помали или еднакви на 2026 кои се деливи со бројот 9, а P е множеството на сите броеви помали или еднакви на 2026 кои се деливи со бројот 15.
Броеви кои истовремено се деливи со 6, 9 и 15, т.е. со НЗС(6, 9, 15) = 90 има 22, бидејќи 2026 : 90 = **22** и остаток 46. Тоа значи дека $|S\cap D\cap P| = 22$. (**3 поени**)
Броеви деливи и со 6 и со 9, односно со НЗС(6, 9) = 18 има 112, бидејќи 2026 : 18 = 112 и остаток 10. Според тоа, $|S\cap D| = 112$, па бројот на елементи кои се во пресекот на S и D, а не се во P е 112-22=90**.** (**3 поени**)
Броеви деливи и со 9 и со 15, односно со НЗС(9, 15) = 45 има 45, бидејќи 2026 : 45 = 45 и остаток 1. Според тоа, $|D\cap P| = 45$, па бројот на елементи кои се во пресекот на D и P, а не се во S е 45-23=23**.** (**3 поени**)
Броеви деливи и со 6 и со 15, односно со НЗС(6, 15) = 30 има 67, бидејќи 2026 : 30 = 67 и остаток 16. Според тоа, $|S\cap P| = 67$, па бројот на елементи кои се во пресекот на S и P, а не се во D е 67-22=45**.** (**3 поени**)
Броеви деливи со бројот 6 има 337, бидејќи 2026 : 6 = 337 и остаток 4. Според тоа, бројот на елементи кои се во S, но не се во D и P е 337-22-45-90=**180.** (**3 поени**)

Броеви деливи со 9 има 225, бидејќи 2026 : 9 = 225 и остаток 1. Според тоа, бројот на елементи кои се во D, но не се во S и P е 225-22-90-23=**90.** (**3 поени**)
Броеви деливи со 15 има 135, бидејќи 2026 : 15 = 135 и остаток 1. Според тоа, бројот на елементи кои се во P, но не се во S и D е 135-22-45-22=**45.** (**3 поени**)
Броеви кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15 има 2026-(22+90+23+45+180+90+45)=2026-495=1531. (**4 поени**)



3. Определи ги сите парови природни броеви m и n за кои важи равенството $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{17}$.

Решение. <u>Прв начин:</u> Даденото равенство го запишуваме во облик

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{17}\Leftrightarrow\frac{n-m}{mn}=\frac{1}{17}\Leftrightarrow 17(n-m)=mn.$$ (**5 поени**)

Јасно, $n-m>0$, односно $n>m$. Исто така, да забележиме дека $m<17$. Во спротивно, ако $m\geq 17$, добиваме дека

$$17(n-m)=mn\Leftrightarrow 17n-17m=nm\Leftrightarrow 17m=17n-nm\Leftrightarrow 17m=n(17-m),$$

односно дека $17m\leq 0$ што не важи, бидејќи m и n се природни броеви. Значи, 17 е делител на n, односно $n=17k$, за некој природен број k. (**10 поени**) Со замена во равенството $17(n-m)=mn$, добиваме дека $m=\frac{17k}{k+1}$. (**5 поени**) Бидејќи m е природен број, добиваме дека $k+1=17$, односно $k=16$, од каде следува дека $m=16$ и $n=272$. Значи, единствен пар природни броеви кој ги задоволува условите на задачата е $(16,272)$. (**5 поени**)

<u>Втор начин:</u> Даденото равенство го запишуваме во облик

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=\frac{1}{17} \Leftrightarrow \frac{n-m}{mn}=\frac{1}{17} \Leftrightarrow 17(n-m)=mn. \text{ (**5 поени**)}$$

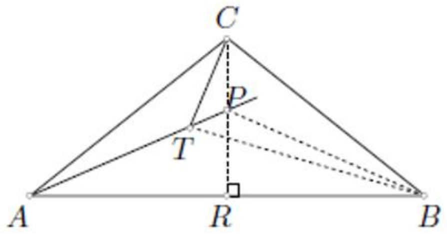
Понатаму,

$$17n - 17m = mn \Leftrightarrow 17n-17m-mn+17^2=17^2$$

$$\Leftrightarrow 17(n+17)-m(17+n)=17^2 \Leftrightarrow (n+17)(17-m)=289. \text{ (**10 поени**)}$$

Делители на 289 се само броевите: 1, 17 и 289. Бидејќи n е природен број, тогаш $n + 17 > 17$. Тоа значи дека вредноста на изразот $n + 17$ мора да биде делител на 289 кој е поголем од 17, а единствен таков делител е 289. Значи $n + 17 = 289$ од каде $n = 289 - 17 = 272$. Тогаш $17 - m = 1$ од каде добиваме $m = 16$. Значи, единствен пар природни броеви кој ги задоволува условите на задачата е $(16,272)$. (**10 поени**)

4. Даден е рамнокрак триаголник ABC $\left(\overline{AC}=\overline{BC}\right)$ со агол при врвот од $100°$. Нека T е точка во внатрешноста на дадениот триаголник, така што $\measuredangle TAC = 10°$ и $\measuredangle ACT = 20°$. Пресметај ја големината на $\measuredangle CTB$.



Решение. Од условот на задачата, рамнокракиот триаголник ABC има агли при основата

$$\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=\frac{180°-100°}{2}=40°. \text{ (**3 поени**)}$$

Нека точката R е подножјето на висината спуштена од темето C кон основата AB и нека точката P е пресечната точка на полуправата AT и висината CR. Од рамнокракоста на ΔABC, следува дека CR е висина и симетрала на $\measuredangle ACB$, па $\measuredangle ACR=\frac{1}{2}\measuredangle ACB=50°$. Според тоа, имаме дека

$\measuredangle TCR=\measuredangle ACR-\measuredangle ACT=50°-20°=30°$.

$\measuredangle PTC=180°-\measuredangle ATC=180°-150°=30°$, што значи дека $\triangle TPC$ е рамнокрак со краци $\overline{PT}=\overline{PC}$. Оттука $\measuredangle TPC=180°-30°-30°=120°$. (**8 поени**)

Од тоа што P лежи на висината CR на рамнокракиот триаголник ABC, триаголникот ABP е исто така рамнокрак со агол $\measuredangle BAP=\measuredangle BAC-\measuredangle TAC=40°-10°=30°$, па

$$\measuredangle APB=180°-(\measuredangle BAP+\measuredangle ABP)=180°-(30°+30°)=120°. \text{ (**7 поени**)}$$

Сега, $\measuredangle BPC=360°-(\measuredangle TPC+\measuredangle TPB)=360°-(120°+120°)=120°$. Следува дека $\triangle PTB\cong\triangle PCB$ според признакот САС ($\overline{PT}=\overline{PC}$, заедничка страна BP и $\measuredangle TPB=\measuredangle CPB=120°$). (**5 поени**) Следува дека $\measuredangle PTB=\measuredangle PCB=50°$. Конечно, добиваме дека $\measuredangle CTB=\measuredangle CTP+\measuredangle PTB=30°+50°=80°$. (**2 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Пресметај $x^{2026}+2026y$, ако за реалните броеви x и y важи $x^2+4y^2-2x+20y+26=0$.

Решение.

$$x^2+4y^2-2x+20y+26=x^2-2x+1+4y^2+20y+25=$$

$$=\left(x^2-2\cdot x\cdot 1+1\right)+\left((2y)^2+2\cdot 2y\cdot 5+5^2\right)=(x-1)^2+(2y+5)^2=0 \quad \text{(**12 поени**)}$$

Бидејќи $(x-1)^2\geq 0$ и $(2y+5)^2\geq 0$, за секој реален број x и y, следува дека нивниот збир ќе биде нула само ако $(x-1)^2=0$ и $(2y+5)^2=0$, т.е. $x=1, y=-\frac{5}{2}$. (**8 поени**) Според тоа,

$$x^{2026}+2026y=1^{2026}+2026\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)=1-1013\cdot 5=1-5065=-5064. \text{ (**5 поени**)}$$

2. Нека p, q и r се прости броеви и нивниот производ е еднаков на природниот број n. Определи ги сите можни вредности на n, за кои важи равенството $(p+1)q(r+1)=n+138$.

Решение. Бидејќи $pqr=n$, се добива

$$(p+1)q(r+1)=pqr+138 \Leftrightarrow pqr+pq+qr+q=pqr+138 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow pq+qr+q=138 \Leftrightarrow q(p+r+1)=138. \text{ (**5 поени**)}$$

Бидејќи q е прост број и $138=2\cdot3\cdot23$ можни се следните случаи: *q=2, p+r+1=69* или *q=3, p+r+1=46* или *q=23, p+r+1=6.* (**6 поени**)

Ќе ги испитаме сите три случаи:

1) Ако *q=2, p+r+1=69,* се добива *p+r=68.* Мора да се и *p* и *r* непарни прости броеви, бидејќи единствен прост парен број е *2,* па ако *p=r=2,* тогаш не важи *p+r=68.* Непарни прости броеви помали од 68 се: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67. Равенството *p+r=68,* важи за паровите броеви: (7, 61), (61,7), (31,37) и (37,31). Бидејќи $pqr=n$, следува дека $n=7\cdot2\cdot61=61\cdot2\cdot7=854$ или $n=31\cdot2\cdot37=37\cdot2\cdot31=2294$. (**4 поени**)

2) Ако *q=3, p+r+1=46,* се добива *p+r=45.* Значи мора еден од броевите во збирот да е парен, а другиот непарен број, т.е. мора еден од нив да е бројот 2 (како единствен прост парен број), а другиот 43. Тогаш $n=2\cdot3\cdot43=43\cdot3\cdot2=258$. (**3 поени**)

3) Ако *q=23, p+r+1=6,* се добива *p+r=5.* Значи мора еден од броевите во збирот да е бројот 2, а другиот 3. Тогаш $n=2\cdot23\cdot3=3\cdot23\cdot2=138$. (**4 поени**)

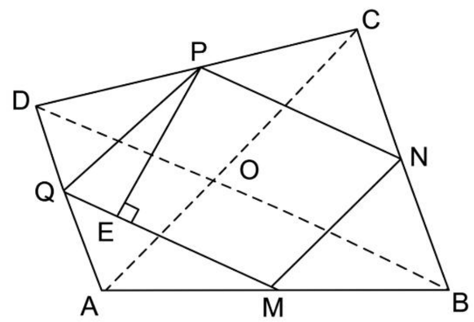
Конечно, равенството важи за *n=854, n=2294, n=258* и *n=138.* (**3 поени**)

3. Даден е четириаголникот $ABCD$ со дијагонали $\overline{AC}=18$ cm и $\overline{BD}=24$ cm и аголот меѓу нив е 30°. Нека M, N, P и Q се средините на страните AB, BC, CD и DA на четириаголникот $ABCD$, соодветно.

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

б) Определи ја плоштината на четириаголникот $MNPQ$.

Решение. а) Бидејќи M,N,P и Q се средини на страните AB,BC,CD и DA, соодветно, следува дека MN е средна линија за триаголникот ABC, па затоа $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}\, и\, MN \parallel AC.$ PQ е средна линија за триаголникот ACD, па затоа $\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}\, и\, PQ \parallel AC.$ Значи $\overline{MN}=\overline{PQ}=9cm\, и\, MN \parallel PQ.$ (1) сантиметрите исправени



Слично, MQ е средна линија за триаголникот ABD, па $\overline{MQ}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ и $MQ \parallel BD.$ PN е средна линија за триаголникот BCD, па $\overline{PN}=\frac{1}{2}\overline{BD}\, и\, PN \parallel BD.$ Значи $\overline{MQ}=\overline{PN}=12cm\, и\, MQ \parallel PN.$ (2)

Од (1) и (2) следува дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм. (**10 поени**)

б) Нека E е подножјето на висината спуштена од точката P кон страната MQ на паралелограмот $MNPQ$. Бидејќи $PE \perp MQ$, следува дека $\angle PEQ=90^\circ$. Исто така $\angle PQE=\angle AOD=30^\circ$, како агли со паралелни краци. Значи триаголникот QPE е со агли $30°, 60°$ и $90°$, па $\overline{PE} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{9}{2}$ cm. (**10 поени**) За плоштината на четириаголникот $MNPQ$ имаме $P_{MNPQ} = \overline{MQ} \cdot \overline{PE} = 12\,\text{cm} \cdot \frac{9}{2}\text{cm} = 54\,\text{cm}^2$. (**5 поени**)

4. Аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија е за 20 поголема од аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри. Колку сестри има Петар, ако аритметичката средина на годините на Петар, неговите сестри, Јаков, Калина и Евгенија е за 10 помала од аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија?

Решение. Прв начин. Нека S е збирот на годините на Петар и неговите сестри, а n е бројот на неговите сестри. Нека a, b и c се годините на Јаков, Калина и Евгенија, соодветно. Од условот дека аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија е за 20 поголема од аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри, добиваме дека

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{S}{n+1} + 20. \text{ (1) } (\textbf{6 поени})$$

Од тоа што аритметичката средина од годините на Петар, неговите сестри, Јаков, Калина и Евгенија е за 10 помала од аритметичката средина од годините на Јаков, Калина и Евгенија, добиваме дека

$$\frac{a+b+c+S}{n+4} = \frac{a+b+c}{3} - 10 \Leftrightarrow a+b+c+S = (n+4)\left(\frac{a+b+c}{3} - 10\right). \text{ (2) } (\textbf{6 поени})$$

Од (1) имаме дека $a+b+c = \frac{3S}{n+1} + 60$. Со замена на последното равенство во (2), добиваме дека

$$a+b+c+S = (n+4)\left(\frac{a+b+c}{3} - 10\right) \Leftrightarrow \frac{3S}{n+1} + 60 + S = (n+4)\left(\frac{S}{n+1} + 20 - 10\right). (\textbf{5 поени})$$

Со средување на последниот израз, добиваме дека

$$\frac{3S}{n+1} + 60 + S = (n+4)\left(\frac{S}{n+1} + 20 - 10\right) \Leftrightarrow \frac{3S + (60+S)(n+1)}{n+1} = \frac{(n+4)(S + 10(n+1))}{n+1} \Leftrightarrow (\textbf{3 поени})$$

$$\Leftrightarrow 3S + (60+S)(n+1) = (n+4)(S+10(n+1)) \Leftrightarrow 3S + 60n + 60 + Sn + S = Sn + 4S + 10(n+1)(n+4) \Leftrightarrow (\textbf{3 поени})$$

$$\Leftrightarrow 60n + 60 = 10(n+1)(n+4) \Leftrightarrow 60(n+1) = 10(n+1)(n+4) \Leftrightarrow n+4 = 6 \Leftrightarrow n = 2. (\textbf{2 поени})$$

Според тоа, следува дека Петар има две сестри.

Втор начин. Аритметичката средина на годините на Јаков, Калина и Евгенија да ја означиме со x. Тогаш збирот на нивните години е $3x$. Нека Петар има $m-1$ сестри, и нека аритметичката средина на годините на Петар и неговите сестри е y. Тогаш збирот на нивните години е my. (**3 поени**) Од условот на задачата имаме $x = y + 20$ (**7 поени**) и $x = \frac{3x+my}{3+m} + 10$ (**7 поени**). Со замена на x од првото во второто равенство, добиваме $y + 20 = \frac{3y+60+my}{3+m} + 10$. (**2 поени**) Оттука $(y+10)(3+m) = 3y + 60 + my$, т.е. $10m = 30$, па $m = 3$. Значи, Петар има 2 сестри. (**6 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2026}$ се природни броеви и нека

$$x = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2025}) \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2026})$$

и

$$y = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}) \cdot (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2025}) .$$

Што е точно: $x < y$, $x = y$ или $x > y$? Образложи го одговорот.

Решение. Прв начин. Нека $k = a_2 + a_3 + a_4 + \ \ldots + \ a_{2025}$. (**5 поени**) Тогаш

$$x = (a_1 + k)(k + a_{2026}) \text{ и } y = (a_1 + k + \ a_{2026})k .$$ (**10 поени**)

Нивната разлика е

$$x - y = (a_1 + k)(k + a_{2026}) - (a_1 + k + a_{2026})k =$$

$$= a_1 k + a_1 a_{2026} + k^2 + k a_{2026} - a_1 k - k^2 - k a_{2026} = a_1 a_{2026}$$ (**7 поени**) .

Бидејќи a_1 и a_{2026} се природни броеви важи $a_1 a_{2026} > 0$. Значи $x - y > 0$, т.е. $x > y$. (**3 поени**)

Втор начин. Нека $k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ \ldots + \ a_{2025}$. (**5 поени**) Тогаш

$$x = k(k - a_1 + a_{2026}) \text{ и } y = (k + \ a_{2026})(k - a_1).$$ (**10 поени**)

Нивната разлика е

$$x - y = k(k - a_1 + a_{2026}) - (k + \ a_{2026})(k - a_1) =$$

$$= k^2 - k a_1 + k a_{2026} - k^2 + k a_1 - a_{2026} k + a_{2026} a_{2021} = a_1 a_{2026} .$$ (**7 поени**)

Бидејќи a_1 и a_{2026} се природни броеви важи $a_1 a_{2026} > 0$. Значи $x - y > 0$, т.е. $x > y$. (**3 поени**)

2. Даден е рамностран триаголник ABC со страна a . Нека P е произволна точка од помалиот кружен лак AC од опишаната кружница околу триаголникот ABC . Докажи дека $\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{BP}$.

Решение. Нека страната на рамностраниот триаголник ABC е a . Нека D е пресечна точка на AC и BP. Тогаш

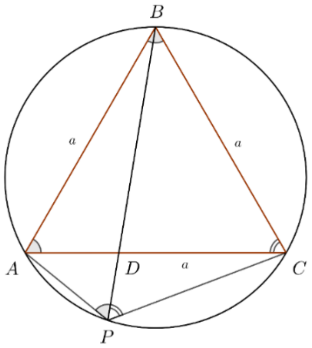
$$\measuredangle APB = \measuredangle ACB = \measuredangle CAB = 60^\circ .$$ (**5 поени**)

Бидејќи $\measuredangle APB = \measuredangle DAB$ и $\measuredangle ABP$ е заеднички за триаголниците APB и DAB, следува дека тие се слични. Оттука $\overline{AP}:\overline{AD} = \overline{BP}:\overline{BA}$, па

$$\overline{AP} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BP}}{a} \qquad (1)$$ (**8** поени)

Исто така, бидејќи $\measuredangle CPB = \measuredangle DCB$ и $\measuredangle CBP$ е заеднички за триаголниците CPB и DCB, тие се слични. Оттука $\overline{CP}:\overline{DC} = \overline{BP}:\overline{BC}$, па

$$\overline{CP} = \overline{DC} \cdot \frac{\overline{BP}}{a} \qquad (2)$$ (**8** поени)



Со собирање на равенствата (1) и (2) добиваме

$$\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BP}}{a} + \overline{DC} \cdot \frac{\overline{BP}}{a} = \frac{\overline{BP}}{a}(\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{\overline{BP}}{a} \cdot a \ = \overline{BP} .$$ (**4** поени)

3. Нека n е природен број. Претстави го бројот $m = 6^{8n} + 6^{4n+1} + 1$ како збир од квадратите на три различни природни броеви.

Решение.

$$m = 6^{8n} + 6^{4n+1} + 1 =$$

$$= 6^{8n} + 6 \cdot 6^{4n} + 1 = 6^{8n} + 2 \cdot 6^{4n} + 4 \cdot 6^{4n} + 1 =$$

$$= ((6^{4n})^2 + 2 \cdot 6^{4n} + 1) + 2^2 \cdot (6^{2n})^2 =$$

$$= (6^{4n} + 1)^2 + (2 \cdot 6^{2n})^2.$$ (**8 поени**)

Од формулата $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ добиваме дека важи, $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab,$ па следува дека

$$m = (6^{4n} + 1 - 2 \cdot 6^{2n})^2 + 2 \cdot (6^{4n} + 1) \cdot 2 \cdot 6^{2n} =$$

$$= [(6^{2n})^2 - 2 \cdot 6^{2n} + 1]^2 + 4 \cdot 6^{4n+2n} + 4 \cdot 6^{2n} =$$

$$= [(6^{2n} - 1)^2]^2 + 4 \cdot 6^{6n} + 4 \cdot 6^{2n} =$$

$$= [(6^{2n} - 1)^2]^2 + 2^2 \cdot (6^{3n})^2 + 2^2 \cdot (6^n)^2 =$$

$$= [(6^{2n} - 1)^2]^2 + (2 \cdot 6^{3n})^2 + (2 \cdot 6^n)^2 \,.$$ (**12 поени**)

Бројот $(6^{2n} - 1)^2$ е непарен природен број за секој природен број n. Броевите $2 \cdot 6^{3n}$ и $2 \cdot 6^n$ се парни природни броеви, но, заради $2 \cdot 6^{3n} > 2 \cdot 6^n$ за секој природен број n, тие се различни меѓу себе. Заклучуваме дека трите броеви $(6^{2n} - 1)^2$, $2 \cdot 6^{3n}$ и $2 \cdot 6^n$ се природни и различни меѓу себе. Добиеното претставување е бараното претставување на бројот m како збир од квадратите на три различни природни броеви. (**5 поени**)

Втор начин.

$$m = 6^{8n} + 6^{4n+1} + 1 = 6^{8n} + 6 \cdot 6^{4n} + 1 = 6^{8n} + 2 \cdot 6^{4n} + 4 \cdot 6^{4n} + 1 =$$

$$= ((6^{4n})^2 + 2 \cdot 6^{4n} + 1) + 2^2 \cdot (6^{2n})^2 = (6^{4n} + 1)^2 + (2 \cdot 6^{2n})^2 =$$ **(8 поени)**

$$= (6^{4n} + 1)^2 + (2 \cdot 6^{2n})^2 - 2 \cdot (6^{4n} + 1)(2 \cdot 6^{2n}) + 2 \cdot (6^{4n} + 1)(2 \cdot 6^{2n}) =$$

$$= (6^{4n} + 1 - 2 \cdot 6^{2n})^2 + 2 \cdot (6^{4n} + 1)(2 \cdot 6^{2n}) = [(6^{2n})^2 - 2 \cdot 6^{2n} + 1]^2 + 4 \cdot 6^{4n+2n} + 4 \cdot 6^{2n} =$$

$$= [(6^{2n} - 1)^2]^2 + 4 \cdot 6^{6n} + 4 \cdot 6^{2n} = [(6^{2n} - 1)^2]^2 + 2^2 \cdot (6^{3n})^2 + 2^2 \cdot (6^n)^2 =$$

$$= [(6^{2n} - 1)^2]^2 + (2 \cdot 6^{3n})^2 + (2 \cdot 6^n)^2 \,.$$ **(12 поени)**

Бројот $(6^{2n} - 1)^2$ е непарен природен број за секој природен број n. Броевите $2 \cdot 6^{3n}$ и $2 \cdot 6^n$ се парни природни броеви, но, заради $2 \cdot 6^{3n} > 2 \cdot 6^n$ за секој природен број n, тие се различни меѓу себе. Заклучуваме дека трите броеви $(6^{2n} - 1)^2$, $2 \cdot 6^{3n}$ и $2 \cdot 6^n$ се природни и различни меѓу себе. Добиеното претставување е бараното претставување на бројот m како збир од квадратите на три различни природни броеви. (**5 поени**)

4. Нека ABC е триаголник, точката D е средина на страната AB и E е точка на страната BC таква што $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{EC}$. Ако $\measuredangle CDA = \measuredangle BAE$, тогаш $\measuredangle BAC = 90^\circ$. Докажи!

Решение. Нека p е права низ точката C паралелна со правата AE и нека S е пресечна точка на p со правата BA. (**10 поени**) Имаме дека

$$\measuredangle ASC = \measuredangle BAE = \measuredangle CDA \,.$$

Значи, триаголникот DCS е рамнокрак и $\overline{CD} = \overline{CS}$. (**2 поени**) Од триаголникот BCS, според Талесовата теорема за пропорционални отсечки добиваме дека

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AS}}.$$

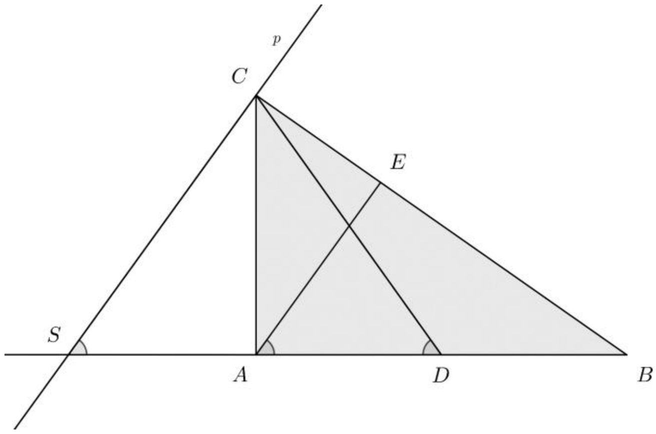
Од условите на задачата следува

$$2 = \frac{2 \cdot \overline{AD}}{\overline{AS}},$$

од каде

$$\overline{AD} = \overline{AS}.$$ (**10 поени**)

Значи, CA е тежишна линија на рамнокракиот триаголник DCS. Но, исто така, CA е и висина во триаголникот DCS. Значи, $\measuredangle BAC = 90^\circ$. (**3 поени**)



p
C
E
S
A
D
B