РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД LXIX ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2026
07.03.2026

Прва година

1. Најди ги сите природни броеви a за кои важи $\left(a^2+2a+9\right)^2+3a\left(a^2+2a+9\right)-4a^2=4131$.

Ќе ја разложиме левата страна на даденото равенство на множители.

Прв начин.

$$\begin{aligned}\left(a^2+2a+9\right)^2&+3a\left(a^2+2a+9\right)-4a^2=\\&=\left(a^2+2a+9\right)^2-a\left(a^2+2a+9\right)+4a\left(a^2+2a+9\right)-4a^2=\\&=\left(a^2+2a+9\right)\left(a^2+2a+9-a\right)+4a(a^2+2a+9-a)=\\&=\left(a^2+2a+9\right)\left(a^2+a+9\right)+4a(a^2+a+9)=\left(a^2+a+9\right)\left(a^2+6a+9\right)=\\&=\left(a^2+a+9\right)\left(a+3\right)^2\end{aligned}$$

Втор начин. Ќе направиме замена $a^2+2a+9=x$, со што тогаш равенството добива облик:

$$\begin{aligned}(a^2+2a+9)^2+3a\left(a^2+2a+9\right)-4a^2&=x^2+3ax-4a^2=x^2-ax+4ax-4a^2=\\&=x(x-a)+4a(x-a)=(x+4a)(x-a)=\\&=\left(a^2+6a+9\right)\left(a^2+a+9\right)=(a+3)^2\left(a^2+a+9\right).\end{aligned}$$

Сега зададеното равенство добива облик $\left(a^2+a+9\right)\left(a+3\right)^2=4131$.

Бидејќи $4131=3^5\cdot 17=(3^2)^2\cdot 51=9^2\cdot 51$, а $(a+3)^2$ е полн квадрат поголем или еднаков на 4^2, следува дека мора $(a+3)^2=9^2$ и $a^2+a+9=51$. Од тука $a=6$, а со проверка се потврдува дека важи $6^2+6+9=51$. Јасно, следува дека $a=6$ е единственото решение.

2. Одреди ги сите природни броеви n за кои важи $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$, каде $d_1<d_2<d_3<d_4$ се најмалите четири природни делители на бројот n.

Решение. Знаеме дека 1 е делител на секој природен број, па најмалиот од делителите е $d_1=1$.

Да претпоставиме дека бројот n е непарен. Тогаш сите негови делители се непарни, па може да запишеме

$$d_1=1,\ \ d_2=2a+1,\ \ d_3=2b+1,\ \ d_4=2c+1,$$

од каде имаме:

$$\begin{aligned}n&=1+(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2=\\&=1+4a^2+4a+1+4b^2+4b+1+4c^2+4c+1=\\&=4\left(a^2+a+b^2+b+c^2+c+1\right).\end{aligned}$$

Последново повлекува дека n е парен број, што противречи на претпоставката. Значи, бројот n мора да е парен, односно n е делив со 2, па вториот по големина делител е $d_2=2$.

Сега важи $n=1^2+2^2+d_3^2+d_4^2=5+d_3^2+d_4^2$, од каде збирот $d_3^2+d_4^2$ мора да е непарен број, односно еден од делителите d_3 и d_4 е непарен, а другиот е парен.

Да претпоставиме дека d_3 е непарен, но не е прост број. Тогаш d_3 има барем еден прост непарен делител $p,\ 3\le p<d_3,$ при што јасно, важи и $p\mid n$. Последново противречи дека d_3 е следниот по големина делител

на n. Значи мора d_3 да е прост, односно $d_3 = p \geq 3$, каде p е најмалиот непарен прост делител на n. Сега $n = 5 + p^2 + d_4^2$, каде d_4 е парен. За делителите важи $1 < 2 < p < d_4$, па ќе покажеме дека првиот следен по големина парен делител е точно $d_4 = 2p$.

Прво да забележиме дека $\text{НЗД}(2, p) = 1$ па $2p \mid n$. Од друга страна, ако $d_4 = 2k < 2p$, тогаш постои прост број $q \mid k, q \geq 3$ и $q < p$, јасно q непарен ($q \neq 2$). Но $q \mid n$ и $q < p$ па ова противречи изборот на p како најмалиот непарен прост делител на n.

Јасно тогаш мора $d_4 = 2p$ и важи $n = 1^2 + 2^2 + p^2 + (2p)^2 = 5 + 5p^2 = 5(1 + p^2)$.

За $p > 2$ имаме $p^2 + 1 > 5$ и уште $p^2 + 1$ е парен број. Заклучуваме дека n е делив со 5, па оттука $d_3 = p = 5$ и $d_4 = 2p = 10$.

Конечно, единствениот број што го задоволува условот на задачата е

$$n = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 1 + 4 + 25 + 100 = 130.$$

Забелешка. Доколку се претпостави дека d_3 е парен, јасно $d_3 \neq 2 \cdot 2$, се добива повторно дека d_3 има непарен прост делител, па тој мора да третиот во низата подредени делители. Со тоа се добиваат истите заклучоци како погоре.

3. На еден шаховски турнир учествувале n жени и $2n$ мажи. Секој од учесниците играл само по една партија со секој друг учесник. Односот на бројот на партии во кои победиле жени и бројот на партии во кои победиле мажи изнесува $7:5$. Одреди го бројот на мажи кои учествувале на турнирот, ако се знае дека ниту една партија не завршила со реми (т.е. нерешено).

Решение. Јасно, $n \geq 1$. Нека со x го означиме бројот на партии во кои жени победиле мажи. Следно, пресметуваме колку изнесува бројот на партии што ги одиграле две жени и бројот на партии што ги одиграле двајца мажи. Ако ги означиме жените-учесници со броеви $1, 2, \ldots, n$, тогаш жената со број 1 одиграла $n-1$ партија против другите жени, жената со број 2 одиграла $n-2$ партии против другите жени, па така сè до $(n-1)$-та жена која одиграла само една партија против другите жени (само против n-тата жена). Вкупниот број на одиграни партии е $(n-1) + (n-2) + \ldots + 1$, т.е. еднаков на збирот на првите $n-1$ природни броеви и изнесува $\frac{n(n-1)}{2}$. Со слична пресметка, бројот на партии што ги одиграле двајца мажи изнесува $\frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$. Бројот пак на партии што ги одиграле жени против мажи изнесува $n \cdot 2n = 2n^2$. Сега, следува дека бројот на победи кои ги оствариле жените изнесува $\frac{n(n-1)}{2} + x,$ додека бројот на победи кои ги оствариле мажите изнесува $n(2n-1) + 2n^2 - x$. Според условот на задачата имаме:

$$\left(\frac{n(n-1)}{2} + x\right) : \left(n(2n-1) + 2n^2 - x\right) = \frac{n^2 - n + 2x}{2} : \left(4n^2 - n - x\right) = \left(n^2 - n + 2x\right) : \left(8n^2 - 2n - 2x\right) = 7:5,$$

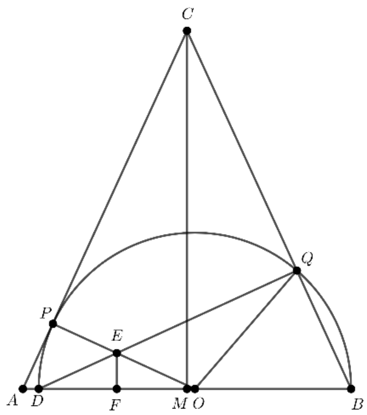
од каде следува:

$$7\left(8n^2 - 2n - 2x\right) = 5\left(n^2 - n + 2x\right)$$
$$56n^2 - 14n - 14x = 5n^2 - 5n + 10x$$
$$51n^2 - 9n = 24x$$
$$17n^2 - 3n = 8x$$

Бидејќи бројот на победи на жени во партиите со мажи не го надминува вкупниот број на одиграни партии, важи $x \leq 2n^2$, односно $8x \leq 16n^2$. Така се добива $17n^2 - 3n \leq 16n^2$, односно $n^2 - 3n \leq 0$. Јасно, по кратење се добива $n - 3 \leq 0,$ па можни решенија вредности за n се 1, 2 или 3. Со проверка се утврдува дека за $n = 1$ се добива $8x = 14$, а за $n = 2$ се добива дека $8x = 62$. Двата случаи не се можни бидејќи x е природен број. Од друга страна, за $n=3$ се добива $8x=144$, т.е. $x=18$. Значи, $n=3$, па следува дека бројот на мажи кои учествувале на турнирот е шест.

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник таков што $\overline{AC}=\overline{BC}$. Нека D е точка на страната AB таква што полукружницата со дијаметар BD и центар O ја допира страната AC во точка P и ја сече страната BC во точка Q. Радиусот OP ја сече правата DQ во точка E така што $5\overline{PE}=3\overline{DE}$. Пресметај го односот $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Решение. Бидејќи OP е радиус и BD е дијаметар на полукружницата, следува $\measuredangle APO=90°$ и $\measuredangle DQB=90°$. Од друга страна, бидејќи ΔABC е рамнокрак, следува $\measuredangle PAO=\measuredangle QBD$, односно заклучуваме дека $\Delta PAO\sim\Delta QBD$ како правоаголни триаголници со еднакви агли. Оттука, $\measuredangle AOP=\measuredangle BDQ$, односно $\measuredangle DOE=\measuredangle ODE$. Добиваме дека ΔDEO е рамнокрак со $\overline{DE}=\overline{OE}$. Од условот на задачата имаме и дека $\overline{PE}=\frac{3}{5}\overline{DE}=\frac{3}{5}\overline{OE}$. Бидејќи $\overline{OP}=\overline{OD}$ како радиуси на полукружницата, добиваме:



$\overline{OD}=\overline{OP}=\overline{PE}+\overline{OE}=\frac{3}{5}\overline{OE}+\overline{OE}=\frac{8}{5}\overline{OE}=\frac{8}{5}\overline{DE}$, од каде следува

$\overline{OE}=\overline{DE}=\frac{5}{8}\overline{OD}$.

Нека F е подножјето на висината од темето E во ΔDOE. Точката F е средина на страната OD, па $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{OD}$ и $\Delta EFD\sim\Delta BQD$ како правоаголни триаголници со еден заеднички агол. Следува:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}}=\frac{\frac{5}{8}\overline{OD}}{\frac{1}{2}\overline{OD}}=\frac{5}{4}.$$

Нека M е подножјето на висината од темето C во ΔABC. Бидејќи ΔABC е рамнокрак, M е средина на страната AB. Тогаш $\Delta CMB\sim\Delta DQB$ како правоаголни триаголници со еден заеднички агол. Следува:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{DQ}}=\frac{5}{4}.$$

Нека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=k$, т.е. $\overline{AB}=k\overline{BC}$. Бидејќи $\overline{BM}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{k\overline{BC}}{2}$, од Питагоровата теорема добиваме:

$$\overline{CM}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{\overline{BC}^2-\frac{k\overline{BC}^2}{2}}=\overline{BC}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}.$$

Оттука $\frac{5}{4}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CM}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k^2}{4}}}$, па тогаш $\frac{25}{16}=\frac{1}{1-\frac{k^2}{4}}$, од каде $25\left(1-\frac{k^2}{4}\right)=16$, т.е. $\frac{25k^2}{4}=9$. Сега $k^2=\frac{36}{25}$, односно $k=\frac{6}{5}$. Конечно, заклучуваме дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{6}{5}$.

Втора година

1. Нека a,b, $a\neq b$ се комплексни броеви при што $|a|^2=|b|^2=r>0$. Ако $a+\overline{b}+\overline{a}b\in\mathbb{R}$, докажи дека $\frac{ab}{a+b-1}\in\mathbb{R}$.

Решение 1. Јасно, $a,b\neq 0$ и од $|ab|^2=r^2\neq 0$, следува $ab\neq 0$. Од условот $a+\overline{b}+\overline{a}b\in\mathbb{R}$ имаме дека $a+\overline{b}+\overline{a}b=\overline{a+\overline{b}+\overline{a}b}=\overline{a}+b+a\overline{b}$, израз кој со користење на $a\overline{a}=b\overline{b}=r>0$ може да го презапишеме во облик $a+\frac{r}{b}+\frac{r}{a}b=\frac{r}{a}+b+a\frac{r}{b}$, т.е. $\frac{a^2b+ra+rb^2}{ab}=\frac{rb+ab^2+ra^2}{ab}$, $a^2b+ra+rb^2=rb+ab^2+ra^2$, $ab(a-b)+r(a-b)-r(a^2-b^2)=0$, односно $(a-b)(ab+r-r(a+b))=0.$ Од $a\neq b$, мора $ab+r-r(a+b)=0$, т.е. $ab=r(a+b-1).$ Ако $a+b=1$, тогаш $ab=0$. Останува $a+b-1\neq 0$, па $\frac{ab}{a+b-1}=r\in\mathbb{R}$, што требаше да се докаже.

Решение 2. Нека $a=x+iy, b=z+it$ и од условот во задачата имаме $x^2+y^2=z^2+t^2$ ... (1) и $\mathrm{Im}(x+iy+z-it+(x-iy)(z+it))=0$, т.е. $y-t-yz+tx=0$, т.е. $t(x-1)=y(z-1)$ .... (2).
Тогаш,

$$\frac{ab}{a+b-1}=\frac{(x+iy)(z+it)}{(x+z-1)+i(y+t)}=\frac{(xz-yt)+i(yz+xt)}{(x+z-1)+i(y+t)}\cdot\frac{(x+z-1)-i(y+t)}{(x+z-1)-i(y+t)}=$$

$$\frac{(x+z-1)(xz-yt)+(y+t)(yz+xt)+i\big((x+z-1)(yz+xt)-(y+t)(xz-yt)\big)}{(x+z-1)^2+(y+t)^2}.$$

Треба да покажеме дека $(x+z-1)(yz+xt)-(y+t)(xz-yt)=0$, т.е. $yz(z-1)+xt(x-1)+yt(y+t)=0$.
Користејќи го (2), имаме

$$yz(z-1)+xt(x-1)+yt(y+t)=yz(z-1)+xy(z-1)+yt(y+t)=y[(z-1)(z+x)+t(y+t)],$$

па останува да докажеме дека $y[(z-1)(z+x)+t(y+t)]=0$ ... (3).
Јасно, ако $y=0$ важи (3). Затоа нека $y\neq 0$. Од (1) имаме $(x-z)(z+x)=(t-y)(y+t)$. Ако $x-z=0$, тогаш од $a\neq b$ следува $y+t=0$ па од (2) имаме $-y(x-1)=y(x-1)$ и отука $x=z=1$. Сега јасно (3) важи.

Ако $x-z\neq 0$, $z+x=\frac{(t-y)(y+t)}{x-z}$ и добиваме

$$y[(z-1)\frac{(t-y)(y+t)}{x-z}+t(y+t)]=y(y+t)[(z-1)\frac{t-y}{x-z}+t]=y(y+t)\frac{zt-zy-t+y+tx-tz}{x-z}=$$

$$=y(y+t)\frac{-zy-t+y+tx}{x-z}$$

и имајќи го предвид (2) добиваме дека (3) важи.
Со тоа тврдењето е докажано.

2. Најди го реалниот параметар a така што системот $\begin{cases} x^2+y^2=2a+1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \end{cases}$ има точно три реални решенија.

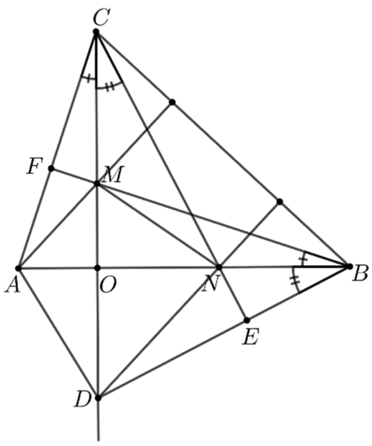
Решение. Јасно $x, y, a \neq 0$ и $2a+1>0$. Втората равенка е еквивалентна со $x+y=\frac{1}{a}xy$. Ако ја квадрираме, добиваме $x^2+2xy+y^2=\frac{1}{a^2}x^2y^2$, па ако од последната равенка ја одземеме првата равенка од системот добиваме $\frac{1}{a^2}x^2y^2-2xy-(2a+1)=0$. Последната равенка е квадратна равенка по xy, па решенија се

$$xy=\frac{1\pm\sqrt{1+\frac{2a+1}{a^2}}}{\frac{1}{a^2}}=\frac{1\pm\frac{a+1}{a}}{\frac{1}{a^2}}=a^2\pm a(a+1).$$

Ако $xy=2a^2+a=a(2a+1)$ тогаш $x+y=2a+1$, па x и y се решенија на квадратната равенка $z^2-(2a+1)z+a(2a+1)=0$. Ако $xy=-a$ тогаш $x+y=-1$, па x и y се решенија на квадратната равенка $z^2+z-a=0$. Ако првата квадратна равенка има две различни решенија, тогаш (x,y) и (y,x) се решенија на системот, а ако има едно решение $x=y$ тогаш (x,x) е решение на системот. Истото важи и за втората равенка. Бараме системот да има точно три реални решенија, значи можни се два случаи: првата равенка да има две реални решенија, а втората едно, или обратното. Дискриминантата на првата равенка е $D_1=(2a+1)^2-4a(2a+1)=(2a+1)(1-2a)$, а на втората $D_2=(-1)^2+4a=1+4a$. Ако првата равенка има две реални решенија а втората едно, важи $D_1>0, D_2=0$ и тогаш $(2a+1)(1-2a)>0, 1+4a=0$. Бидејќи $2a+1>0$, треба $1-2a>0$ и $a=-\frac{1}{4}$, па заклучуваме дека $a=-\frac{1}{4}$ е решение на овој систем (од неравенка и равенка). Ако втората равенка има две реални решенија, а првата едно, важи $D_1=0, D_2>0$ и тогаш $(2a+1)(1-2a)=0, 1+4a>0$. Бидејќи $2a+1>0$, треба $1-2a=0$ и $a>-\frac{1}{4}$ па заклучуваме дека $a=\frac{1}{2}$ е решение на овој систем од неравенка и равенка).

Значи, системот има точно три реални решенија кога $a=-\frac{1}{4}$ или $a=\frac{1}{2}$.

3. Нека во триаголникот ABC аголот во темето C е остар. Нека O е подножјето на висината спуштена од темето C и нека N е точка од отсечката OB. Точката M од висината OC е избрана така што $\measuredangle OBM=\measuredangle ACO$, а точката D е надворешна точка за триаголникот ABC, лежи на полуправата CO и $\measuredangle OBD=\measuredangle OCN$. Докажи дека триаголниците AOD и MON имаат еднакви плоштини.



Решение. Нека CN ја сече BD во точка E, а BM ја сече AC во точка F. Триаголниците CON и BEN се слични ($\measuredangle EBN=\measuredangle OCN$ по услов и $\measuredangle ENB=\measuredangle ONC$ како накрсни агли) па затоа $\measuredangle NEB=\measuredangle NOC=90^\circ$. Значи CE и BO се висини во триаголникот DBC кои се сечат во N, па затоа DN е нормална на BC. Слично, од $\Delta FMC\sim\Delta OMB$ следува дека BF е висина во триаголникот ABC па M е ортоцентарот на триаголникот ABC и затоа AM е нормална на BC. Тогаш, AM и DN се паралелни па $DNMA$ е трапез на кој пресек на дијагоналите му е точката O па затоа $P_{\Delta AOD}=P_{\Delta MON}$.

4. Докажи дека равенката $\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}=4$ има бесконечно многу решенија во множеството на природни броеви.

Решение. Да претпоставиме дека едно решение на равенката е подредениот пар природни броеви (x_1, y_1) каде што $x_1 \le y_1$. Со средување на дадената равенка, добиваме

$$x^2 - (4y-1)x + y^2 + y = 0,$$

која е квадратна равенка по x. Едно нејзино решение е x_1, па според Виетовите формули имаме дека второто решение е $4y_1 - 1 - x_1$. Да забележиме дека $4y_1 - 1 - x_1 \ge 4x_1 - 1 - x_1 = 3x_1 - 1 \ge 2x_1 > 0$, значи и $4y_1 - 1 - x_1$ е природен број. Сега следува дека и $(4y_1 - 1 - x_1, y_1)$ е решение на дадената равенка. Од тоа што равенката е симетрична, добиваме дека $(x_2, y_2) = (y_1, 4y_1 - 1 - x_1)$ е исто така решение. За да го завршиме доказот, да забележиме дека $x_2 + y_2 = 5y_1 - 1 - x_1 > x_1 + y_1$ и дека $(1,1)$ е едно решение на дадената равенка. Значи, користејќи ја опишаната постапка може да генерираме бесконечно многу решенија, или низа решенија во облик:

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,6) \to (6,21) \to \cdots$$

Трета година

1. Докажи дека за секој реален број x важи $\sin(3x)\cdot\sin^3 x+\cos(3x)\cdot\cos^3 x=\cos^3(2x)$.

Решение. За секој реален број x е исполнето дека

$$\sin(3x)=\sin(2x+x)=\sin(2x)\cos x+\cos(2x)\sin x=2\sin x\cos x\cos x+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\sin x=$$
$$=2\sin x\cos^2 x+\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=3\sin x\left(1-\sin^2 x\right)-\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x$$

и

$$\cos(3x)=\cos(2x+x)=\cos x\cos(2x)-\sin x\sin(2x)=\cos x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-2\sin x\sin x\cos x=$$
$$=\cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x=\cos^3 x-3\left(1-\cos^2 x\right)\cos x=$$
$$=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^3 x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Значи $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$ и $\cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x$, односно

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4} \text{ и } \cos^3 x=\frac{3\cos x+\cos(3x)}{4}. \quad \dots (1)$$

Со замена на последните равенства од (1) во левата страна на зададеното равенство, имаме дека

$$\sin(3x)\cdot\sin^3 x+\cos(3x)\cdot\cos^3 x=\sin(3x)\cdot\frac{3\sin x-\sin(3x)}{4}+\cos(3x)\cdot\frac{3\cos x+\cos(3x)}{4}=$$
$$=\frac{3\sin(3x)\sin x-\sin^2(3x)+3\cos(3x)\cos x+\cos^2(3x)}{4}=$$
$$=\frac{3\left(\cos(3x)\cos x+\sin(3x)\sin x\right)+\left(\cos^2(3x)-\sin^2(3x)\right)}{4}=\frac{3\cos(2x)+\cos(6x)}{4}.$$

Користејќи дека $\cos(3x)=4\cos^3 x-3\cos x$, имаме дека $\cos(6x)=\cos(3\cdot 2x)=4\cos^3(2x)-3\cos(2x)$.

Конечно добиваме дека

$$\sin(3x)\cdot\sin^3 x+\cos(3x)\cdot\cos^3 x=\frac{3\cos(2x)+\cos(6x)}{4}=\frac{3\cos(2x)+4\cos^3(2x)-3\cos(2x)}{4}=\cos^3(2x),$$

односно

$$\sin(3x)\cdot\sin^3 x+\cos(3x)\cdot\cos^3 x=\cos^3(2x), \text{ за секој реален број } x,$$

што и требаше да се докаже.

2. Во множеството на реалните броеви реши ја равенката

$$x\log_3^2(x-1)+4(x-1)\log_3(x-1)-16=0.$$

Решение. Јасно, $x-1>0$, односно $x>1$. Да воведеме смена $\log_3(x-1)=t$. Тогаш дадената равенка преминува во облик $xt^2+4(x-1)t-16=0$. Со решавање на квадратната равенка по t, добиваме дека

$$t_{1,2}=\frac{-4(x-1)\pm\sqrt{16(x-1)^2+64x}}{2x}=\frac{-4(x-1)\pm\sqrt{16x^2+32x+16}}{2x}=$$
$$=\frac{-4(x-1)\pm\sqrt{16(x+1)^2}}{2x}=\frac{-4(x-1)\pm 4(x+1)}{2x},$$

односно $t_1=\frac{-4x+4-4x-4}{2x}=\frac{-8x}{2x}=-4$ и $t_2=\frac{-4x+4+4x+4}{2x}=\frac{8}{2x}=\frac{4}{x}$. Според тоа разгледуваме два случаи:

Случај 1. Со замена за $t_1=-4$ во $\log_3(x-1)=t$ добиваме дека $\log_3(x-1)=-4$, односно $x-1=3^{-4}$, од каде следува дека $x=\frac{82}{81}$.

Случај 2. Со замена за $t_2=\frac{4}{x}$ во $\log_3(x-1)=t$ добиваме дека $\log_3(x-1)=\frac{4}{x}$, односно

$$(x-1)=3^{\frac{4}{x}}\Leftrightarrow(x-1)^x=3^4\Leftrightarrow(x-1)^x=81.$$

За $x=4$, добиваме дека важи $(x-1)^x=3^4=81$.

За $x>4$ добиваме дека $(x-1)^x>81$. Од друга страна, за $1<x<4$, добиваме дека $0<(x-1)^x<3^x<81$.

Според тоа, добиваме дека решенијата на дадената равенка се $x=\frac{82}{81}$ и $x=4$.

3. Нека $a,b,\ a>b$ се природни броеви така што бројот a дава остаток 1 при делење со b. Неравенката

$$|\log a-\log x|<\log b$$

има точно 10 решенија по x во множеството природни броеви. Најди ја минималната вредност на $a+b$.

Решение. Јасно $b\neq 1$ бидејќи 1 е делител на секој природен број и притоа $\log b>0$. Користејќи ги својствата на логаритми и апсолутна вредност, неравенката преминува во облик

$$-\log b<\log\frac{a}{x}<\log b,$$

од каде следува дека $\log\frac{bx}{a}>0$ и $\log\frac{ab}{x}>0$, односно $x>\frac{a}{b}$ и $ab>x$. Од условот дека a дава остаток 1 при делење со b, добиваме дека постои природен број k, така што $a=bk+1$. Од сето ова, добиваме дека

$$ab>x>\frac{a}{b}\Leftrightarrow(bk+1)b>x>\frac{bk+1}{b}\Leftrightarrow(bk+1)b>x>k+\frac{1}{b}.$$

Последното неравенство го одредува интервалот на кој се наоѓаат решенијата за x. Бидејќи $b\neq 1$ не е делител на a, а станува збор за природни броеви, горното неравенство преминува во $(bk+1)b-1\geq x\geq k+1$.

Неравенката има точно 10 решенија во множеството на природни броеви, па за должината на интервалот на кој припаѓаат решенијата важи $b(bk+1)-1-(k+1)+1=10,$ односно $k(b^2-1)+b=11$.

Случај 1. Ако $b=2$, тогаш $3k=9,k=3,a=7,a+b=9$.

Случај 2. За $b\geq 3$, $11=k(b^2-1)+b\geq 8k+3$, па $k=1$ и $b=3,a=4,a+b=7$.

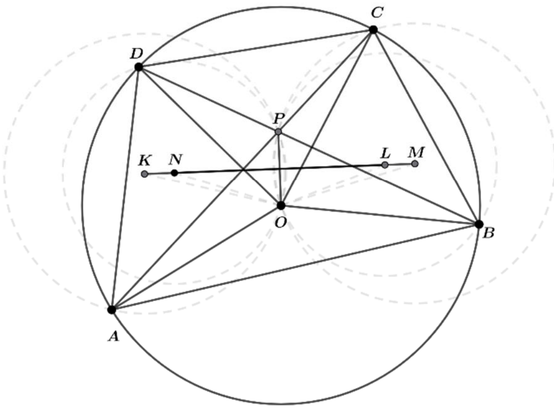
Значи минималната вредност на $a+b$ е 7.

4. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник со центар на опишана кружница O и $\overline{AB}>\overline{CD}$, така што аглите $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BCD$ се тапи. Нека P е пресекот на дијагоналите AC и BD. Нека центрите на опишаните кружници на триаголниците AOP, BOP, COP, DOP се K,L,M,N соодветно. Докажи дека $\overline{KL}=\overline{MN}$.

Решение. Од услов аглите $\measuredangle ADC=\alpha$ и $\measuredangle BCD=\beta$ се тапи и O лежи на различна страна од D,C спрема AC,BD соодветно. Според тоа, користејќи ја тетивноста на $ABCD$ и својството за централен и периферен агол, имаме $\measuredangle AOC=2(180^\circ-\alpha)=360^\circ-2\alpha$ и слично $\measuredangle BOD=360^\circ-2\beta$. Одовде, бидејќи $\overline{OC}=\overline{OA}$, триаголникот OAC е рамнокрак, па $\measuredangle OAC=\measuredangle OCA=\alpha-90^\circ$. Слично $\measuredangle OBD=\measuredangle ODB=\beta-90^\circ$.

Нека со $R_{\Delta AOP}$, $R_{\Delta BOP}$, $R_{\Delta COP}$ и $R_{\Delta DOP}$ ги означиме радиусите на опишаните кружници на триаголниците AOP, BOP, COP и DOP, соодветно.

Од синусна теорема во ΔAOP имаме $\dfrac{\overline{OP}}{\sin(\alpha-90^{\circ})}=2R_{\Delta AOP}$ т.е. $R_{\Delta AOP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\alpha}$.



Слично добиваме дека $R_{\Delta BOP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\beta}$, $R_{\Delta COP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\alpha}$ и $R_{\Delta DOP}=\dfrac{\overline{OP}}{-2\cos\beta}$.

Од косинусна теорема, за ΔKLO имаме дека

$$\overline{KL}^2=R_{\Delta AOP}^2+R_{\Delta BOP}^2-2R_{\Delta AOP}R_{\Delta BOP}\cos\left(\measuredangle KOL\right)=\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\beta}-\frac{\overline{OP}^2}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cos\left(\measuredangle KOL\right).$$

Слично, од косинусна теорема, за ΔNMO имаме дека

$$\overline{MN}^2=R_{\Delta COP}^2+R_{\Delta DOP}^2-2R_{\Delta COP}R_{\Delta DOP}\cos\left(\measuredangle MON\right)=\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\alpha}+\frac{\overline{OP}^2}{4\cos^2\beta}-\frac{\overline{OP}^2}{2\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cos\left(\measuredangle MON\right).$$

Останува да се споредат аглите $\measuredangle KOL$ и $\measuredangle MON$.

Триаголникот KOP е рамнокрак, па повторно користејќи својство на централен и периферен агол ($\measuredangle OKP$ централен за $\measuredangle OAP$) $2\measuredangle KOP+2(\alpha-90^{\circ})=180^{\circ}$ односно $\measuredangle KOP=180^{\circ}-\alpha$. Слично $\measuredangle POL=180^{\circ}-\beta$, $\measuredangle PON=180^{\circ}-\beta$, $\measuredangle POM=180^{\circ}-\alpha$. Тогаш,

$$\measuredangle KOP+\measuredangle POL=360^{\circ}-(\alpha+\beta)=\measuredangle PON+\measuredangle POM,$$

односно $\measuredangle KOL=\measuredangle MON$ што со споредување на горните равенства дава $\overline{KL}^2=\overline{MN}^2$, т.е. $\overline{KL}=\overline{MN}$, што требаше да се докаже.

Четврта година

1. Најди ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за сите $x,y\in\mathbb{N}$ важат следниве услови:

i) $f(f(2026))=2027$;

ii) $f(xy)=f(x)f(y)$;

iii) $f(x)\le x$.

Решение. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција што ги исполнува дадените услови. Нека $x,y\in\mathbb{N}$ се произволни. Тогаш, според ii) имаме:

$$f(f(xy))=f(f(x)f(y))=f(f(x))\cdot f(f(y)).$$

Според iii) важи $f(f(x))\le f(x)\le x$. Од $2026=2\cdot 1013$ следува дека

$$2027=f\left(f\left(2026\right)\right)=f\left(\left(f\left(2\right)\right)\cdot f\left(f\left(1013\right)\right)\le f\left(2\right)\cdot f\left(1013\right)\le 2\cdot 1013=2026,$$

што е контрадикција. Оттука заклучуваме дека таква функција не постои.

Забелешка. Задачата може да се реши и без користење на вториот услов.

2. Докажи дека равенката $x-\left[\sqrt{x}\right]^2=2026$ има бесконечно многу решенија во $\mathbb{R}$.

Забелешка. За $z\in\mathbb{R}$, $\left[z\right]=k \iff k\le z<k+1,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Нека x е решение на равенката. Јасно е дека $x>1$. Нека $k=\left[\sqrt{x}\right],\ k\ge 1$. Од $\sqrt{x}<\left[\sqrt{x}\right]+1$ следува дека $x<\left(k+1\right)^2$. Сега, од $x=k^2+2026<\left(k+1\right)^2$, добиваме дека $k>\frac{2025}{2}$. Оттука, $x=k^2+2026,$ каде што $k>\frac{2025}{2}$ е природен број.

Ќе покажеме дека за секое $k\in\mathbb{N}$, такво што $k>\frac{2025}{2}$, бројот $x=k^2+2026$ е решение на равенката. Тогаш $k^2<k^2+2026=k^2+2025+1<k^2+2k+1=\left(k+1\right)^2$, од каде следува дека $\left[\sqrt{x}\right]=\left[\sqrt{k^2+2026}\right]=k$ и $x-\left[\sqrt{x}\right]^2=\left(k^2+2026\right)-k^2=2026.$

Добивме дека навистина x е решение на равенката.

Заклучуваме дека дадената равенка има бесконечно многу решенија. Тоа се природните броеви $x=k^2+2026,$ каде што k е произволен природен број поголем или еднаков на $\left[\frac{2025}{2}\right]+1.$

3. Нека P е внатрешна точка на триаголникот ABC. Ги дефинираме аглите $\alpha=\measuredangle BPC-\measuredangle BAC,\ \ \beta=\measuredangle CPA-\measuredangle CBA,\ \ \gamma=\measuredangle APB-\measuredangle ACB.$ Докажи дека

$$\overline{PA}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAC}{\sin\alpha}=\overline{PB}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBA}{\sin\beta}=\overline{PC}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\gamma}.$$

Решение. Ги продолжуваме отсечките AP, BP и CP до нивниот пресек со опишаната кружницата на ΔABC во точките D, E и F, соодветно. Да го разгледаме ΔPEC. Имаме $\measuredangle PEC=\measuredangle BEC=\measuredangle A,$ како агли над иста кружен лак.

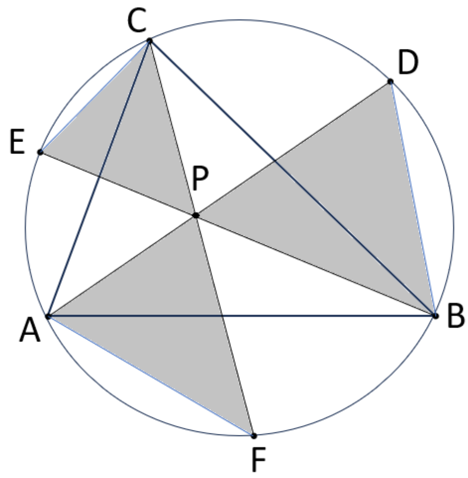
Понатаму, $\measuredangle BPC=180^\circ-\measuredangle EPC=\measuredangle PEC+\measuredangle ECP$, па добиваме дека $\measuredangle ECP=\measuredangle BPC-\measuredangle PEC=\alpha$.

Оттука, согласно синусната теорема за ΔPEC , добиваме дека важи $\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}}$.

Слично се покажува и дека $\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PF}}$.

Значи, доволно е да покажеме дека $\frac{\overline{PA}\cdot\overline{PC}}{\overline{PE}}=\frac{\overline{PB}\cdot\overline{PA}}{\overline{PF}}$,

односно $\frac{\overline{PC}}{\overline{PE}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PF}}$.



Сега, CF и BE се тетиви на опишаната кружница што се сечат во точката P , па важи теоремата за степен на точка во однос на кружница (за P во внатрешноста на кружницата) и добиваме

$$\overline{PC}\cdot\overline{PF}=\overline{PB}\cdot\overline{PE} ,$$

од каде заклучуваме дека последното равенство е точно.
На сличен начин се докажува и второто равенство (користиме синусна теорема во ΔPDB), со што доказот на двојното равенство од задачата е комплетиран.

4. Васил формирал низа така што ги запишал редоследно првите цифри на 2027 броеви, $3^0,3^1,3^2,\ldots,3^{2026}$. Притоа, забележал дека првата цифра на бројот 3^{2026} е 7 и дека цифрата 9 се појавува 93 пати како прва цифра. Ако цифрата 1 се појавува во низата вкупно S пати, а цифрата 2 вкупно T пати, најди го бројот $S+T$.

Решение. Ја разгледуваме низата a_n формирана од првите цифри на броевите $3^0,3^1,3^2,\ldots,3^{2026}$. Прво, да забележиме дека при множење со 3 , најголемиот едноцифрен број 9 дава производ 27 . Значи, при множење на било кој број со 3 , преносот од соседна цифра врз претходната може да биде 0 , 1 или 2 . Според тоа, да ги разгледаме можните случаи на следна прва цифра во низата.

1) Ако првата цифра на бројот 3^k е 1 , тогаш со пренос при множење првата цифра на бројот 3^{k+1} може да биде $3\cdot1+0=3,\ 3\cdot1+1=4$ или $3\cdot1+2=5$.
2) Ако првата цифра на бројот 3^k е 2 , тогаш со пренос при множење првата цифра на бројот 3^{k+1} може да биде $3\cdot2+0=6,\ 3\cdot2+1=7$ или $3\cdot2+2=8$.
3) На сличен начин се утврдува дека:

Прва цифра во 3^k	Прва цифра во 3^{k+1}
3	$9,\ 1$
$4,\ 5$	1
6	$1,\ 2$
$7,\ 8,\ 9$	2

Оттука, заклучуваме дека низата може да се претстави преку дисјунктни подредувања (блокови) од следниот облик:

$$p_1=(1,3,9),\ p_2=(1,3),\ p_3=(1,4),\ p_4=(1,5),\ p_5=(2,6),\ p_6=(2,7),\ p_7=(2,8).$$

Бидејќи првата цифра на 3^{2026} е 7 , јасно е дека последните два члена на оваа низа се 2 и 7 , односно таа завршува со блокот p_6 .

Нека N_i е бројот на блокови од облик p_i , за $i=1,2,\ldots,7.$ Имаме:

$$3N_1+2\left(N_2+N_3+N_4+N_5+N_6+N_7\right)=2027.$$

Бидејќи цифрата 9 се појавува 93 пати како првата, знаеме дека $N_1=93$, па во последното равенство се добива:

$$3 \cdot 93 + 2\left(N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7\right) = 2027$$
$$2\left(N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7\right) = 1748$$
$$N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 = 874$$

Добиваме $S + T = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 = 93 + 874 = 967$.