РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД
РЕГИОНАЛНИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
14.3.2026 година

Важна напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.
Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.
Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа соодветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.
****

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IV ОДДЕЛЕНИЕ

1. Матеј и Стефан многу сакаат да читаат книги. Во следнава табела се дадени податоци за бројот на книгите кои ги прочитале во три години.

	Број на прочитани книги во првата година	Број на прочитани книги во втората година	Број на прочитани книги во третата година
Матеј	♥♥♥	♥♥	♥♥♥♥
Стефан	♥♥♥♥	♥♥♥	♥♥♥♥♥
♥ = 12 прочитани книги			

Со помош на податоците од табелата, одговори:

а) Колку книги прочитал Матеј во првите две години?
б) Колку вкупно книги прочитале двајцата во третата година?
в) Колку пати е поголем бројот на книги што ги прочитал Матеј во третата во однос на втората година?
г) Кој прочитал повеќе книги во сите три години, и за колку повеќе?
д) Колку вкупно книги прочитале двајцата во сите три години?

Прво решение. а) Во првата година Матеј прочитал $3\cdot12=36$ книги. Во втората година прочитал $2\cdot12=24$ книги. Во првите две години прочитал вкупно $36+24=60$ книги. (**5 поени**)

б) Во третата година Матеј прочитал $4\cdot12=48$ книги, а Стефан прочитал $5\cdot12=60$ книги. Значи, двајцата вкупно прочитале $48+60=108$ книги во третата година. (**5 поени**)

в) Во третата година Матеј прочитал $4\cdot12=48$ книги, а во втората прочитал $2\cdot12=24$ книги. Значи во третата година Матеј прочитал два пати повеќе книги отколку во втората година. (**5 поени**)

г) Во сите три години, Матеј прочитал $9\cdot12=108$ книги, а Стефан $12\cdot12=144$ книги. Значи, Стефан прочитал $144-108=36$ книги повеќе од Матеј. (**5 поени**)

д) Двајцата прочитале вкупно $108+144=252$ книги во сите три години. (**5 поени**)

Второ решение. а) Матеј прочитал $(3+2)\cdot12=5\cdot12=60$ книги во првите две години. (**5 поени**)

б) Во третата година двајцата прочитале вкупно $(4+5)\cdot12=9\cdot12=108$ книги. (**5 поени**) в) Бројот на книги што ги прочитал Матеј во третата година е претставен со 4 , а бројот на книги што ги прочитал во втората година е претставен со 2 , па заклучуваме дека во третата година Матеј прочитал два пати повеќе книги отколку во втората година. (**5 поени**)

г) Бројот на книги што ги прочитал Матеј во сите три години е претставен со 9 , а бројот на книги што ги прочитал Стефан во сите три години е претставен со 12 . Заклучуваме дека бројот на книги што ги прочитал Стефан е за 3  поголем од бројот на книги што ги прочитал Матеј. Според тоа, Матеј прочитал $3 \cdot 12 = 36$ книги повеќе од Матеј. (**5 поени**)

д) **В**купниот број книги што ги прочитале двајцата во сите три години е 21 , односно $21 \cdot 12 = 252$ книги.

2. (**Нумерус 51-1, Конкурсни задачи, 4.-5. одделение, задача 4358**) Во еден букет има бели, црвени и жолти ружи. Вкупно има 15 ружи, од кои 7 се црвени, а жолтите се за 2 повеќе од белите. Колку жолти ружи има во букетот?

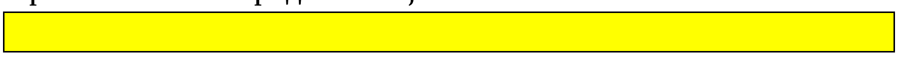
Решение. Нека црвени ружи се Ц = 7 , белите се Б . Тогаш, жолтите ружи се Ж=Б+2 . (**10 поени**) Бидејќи Ц+Б+Ж=15, имаме 7+Б+Б+2=15, односно 2Б+9=15, т.е. 2Б=6 , па Б=3. (**10 поени**) Следува има 3+2= 5 жолти ружи. (**5 поени**)

3. (**Нумерус 51-1, Конкурсни задачи, 4. одделение, задача 4354**) Ги разгледуваме сите четирицифрени броеви што може да се запишат со помош на цифрите 0, 1, 2 и 3. Од нив запиши ги сите непарни броеви со различни цифри кои се наоѓаат помеѓу 1300 и 3000, а потоа пресметај го нивниот збир.

Решение: Со помош на цифрите 0, 1, 2 и 3 треба да се запишат четирицифрени броеви со различни цифри, од каде заклучуваме дека секоја од цифрите 0, 1, 2 и 3 се јавува точно еднаш. Непарни четирицифрени броеви во кои секоја од цифрите 0, 1, 2 и 3 се јавува точно еднаш, а кои се поголеми од 1300 и помали од 3000 се: 2013 (**5 поени**), 2031 (**5 поени**), 2103 (**5 поени**) и 2301 (**5 поени**). Нивниот збир е 2013+ 2031+ 2103+ 2301 = 8448 (**5 поени**).

4. Во еден забавен парк секој ден се планираат одреден број билети за дневна продажба. На крајот на еден ден продавачот утврдил дека се продале $\frac{3}{5}$ од планираните билети, а непродадени останале 24 билети. Колку билети биле планирани да се продадат тој ден?

Прво решение. Од условот на задачата имаме дека продадените билети се $\frac{3}{5}$ од планираните билети. Тогаш непродадени останале $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ од планираните билети (**10 поени**). Од тоа што бројот на непродадени билети е 24, следува дека $\frac{2}{5}$ од планираните билети е 24, па заклучуваме дека $\frac{1}{5}$ од планираните билети е $24:2=12$ (**8 поени**). Тогаш бројот на планираните билети е $12 \cdot 5 = 60$. (**7 поени**)
Второ решение. Ќе го користиме методот на отсечка. Нека дадената отсечка (лента) го претставува вкупниот број планирани билети за продажба кој е непознат.



Вкупен број планирани билети

Од условот на задачата имаме дека $\frac{3}{5}$ од планираните билети се продадени, па затоа дадената отсечка ќе ја поделиме на пет еднакви дела (**3 поени**), од кои првите 3 дела го претставуваат бројот на продадени билети (**3 поени**), а последните два дела го претставуваат бројот на непродадени билети (**3 поени**).

$\frac{3}{5}$ се продадени 24 непродадени

Бидејќи два дела од отсечката претставуваат 24 билети (**3 поени**), заклучуваме дека еден дел од отсечката претставува 24:2=12 билети (**6 поени**). Добиваме дека се продале $3 \cdot 12 = 36$ билети (**4 поени**), од каде следува дека за тој ден вкупно биле планирани 36+24=60 билети (**3 поени**).

Трето решение. Нека со x го означиме бројот на планирани билети за продажба за тој ден. Тогаш од условот на задачата имаме дека $\frac{3}{5}x$ е бројот на продадени билети (**5 поени**), а непродадени останале $x - \frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ (**10 поени**). Од тоа што бројот на непродадени билети е 24, важи дека $\frac{2}{5}x = 24$ (**5 поени**), па оттука следува дека $x = 60$ (**5 поени**).

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА V ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 50-4, Конкурсни задачи, 4.-5. одделение, задача 4313**) Неколку другарчиња решиле за роденденот на Андреј да му купат заеднички подарок. Ако секој од нив даде по 200 денари, за да го купат планираниот подарок ќе им недостасуваат 400 денари. Ако пак секој од нив даде по 300 денари, ќе им останат неискористени 300 денари. Колку чини подарокот што сакаат да го купат другарчињата на Андреј?

Решение. Нека со x го означиме бројот на деца што учествуваат во купување на заедничкиот подарок. Ако секој даде 200 денари, ќе недостасуваат 400 денари за да се купи подарокот, односно за подарокот им требаат $200x + 400$ ден. (**5 поени**). Од друга страна, ако секој даде 300 денари, ќе останат 300 денари вишок, што значи за цената на подарокот треба $300x - 300$ ден. (**5 поени**). Со изедначување на двата изрази добиени за цената на подарокот добиваме $200x - 400 = 300x + 300$ (**5 поени**). А оттука $x = 7$ (**5 поени**). Значи, во купување на заедничкиот подарок учествуваат 7 деца, а цената на подарокот е $200 \cdot 7 + 400 = 300 \cdot 7 - 300 = 1800$ денари (**5 поени**).

2. Мила замислила еден број од втората десетка и еден број од третата десетка. Збирот на цифрите на единиците на овие два броја е 7, а разликата помеѓу двата броја е 11. Кои броеви ги замислила Мила?

Прво решение. Бидејќи важи $7 = 7 + 0 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$, можни се следниве решенија за цифрите на единиците на првиот и вториот број: 0 и 7, 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1, 7 и 0 (**10 поени**). Броеви од втората и третата десетка кои го задоволуваат условот збирот на цифрите на единиците да е 7, се: 20 и 27, 11 и 26, 12 и 25, 13 и 24, 14 и 23, 15 и 22, 16 и 21, и 17 и 30 (**10 поени**). Од нив, само броевите 13 и 24 го задоволуваат вториот услов, односно нивната разлика е 11. Значи, Мила ги замислила броевите 13 и 24. (**5 поени**)

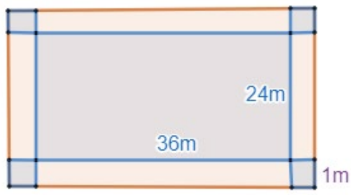
Второ решение. Броеви од втората десетка се: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 и 20, а од третата: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 и 30. (**5 поени**) Бидејќи збирот на цифрите на единиците на двата броја што ги замислила Мила е 7, заклучуваме дека првиот и вториот број може да завршуваат на: 0 и 7, 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, 4 и 3, 5 и 2, 6 и 1, или пак, 7 и 0 (**10 поени**).

Ги разгледуваме броевите чиј што збир на единици е 7, па го добиваме следното:

- ако првиот број завршува на 0, вториот завршува на 7 → 20 и 27
- ако првиот број завршува на 1, вториот завршува на 6 → 11 и 26
- ако првиот број завршува на 2, вториот завршува на 5 → 12 и 25
- ако првиот број завршува на 3, вториот завршува на 4 → 13 и 24
- ако првиот број завршува на 4, вториот завршува на 3 → 14 и 23
- ако првиот број завршува на 5, вториот завршува на 2 → 15 и 22
- ако првиот број завршува на 6, вториот завршува на 1 → 16 и 21
- ако првиот број завршува на 7, вториот завршува на 0 → 17 и 30. (**5 поени**)

Од наведените броеви, само 13 и 24 се разликуваат за 11. Значи, Мила ги замислила броевите 13 и 24. (**5 поени**)

3. (**Нумерус 51-1, Конкурсни задачи, 5. одделение, задача 4363**) Парк во форма на правоаголник е долг 36 m и широк 24 m. Околу целиот парк се прави патека широка 1 m (однадвор). Ако за бојадисување на 1 m^2 од патеката се потребни 0,5 литри боја, тогаш колку литри боја се потребни за бојадисување на целата патека?



Прво решение. Од условот на задачата добиваме дека плоштината на паркот е еднаква на $36\text{m}\cdot 24\text{m}=864\text{m}^2$ (**5 поени**). Бидејќи патеката е широка 1m, паркот заедно со патеката е правоаголник со должина 38m и ширина 26m (**5 поени**). Тогаш, плоштината на паркот заедно со патеката е еднаква на $38\text{m}\cdot 26\text{m}=988\text{m}^2$ (**5 поени**). Според тоа, патеката има плоштина $988\text{m}^2-864\text{m}^2=124\text{m}^2$ (**5 поени**). Бидејќи за 1m^2 се потребни $0,5=\frac{1}{2}$ литри боја, за целата патека се потребни $\frac{1}{2}\cdot 124=62$ литри боја (**5 поени**).

Второ решение. Плоштината на патеката може да се пресмета и на следниот начин: Делот од патеката по должината на двете поголеми страни на паркот (со должина 36m) се два правоаголника со должина 36m и ширина 1m. Овој дел од патеката има плоштина:

$$2\cdot 36\text{m}\cdot 1\text{m}=72\text{m}^2.$$ (**5 поени**)

Делот од патеката по должината на двете помали страни на паркот (со должина 24m) се два правоаголника со должина 24m и ширина 1m. Овој дел од патеката има плоштина:

$$2\cdot 24\text{m}\cdot 1\text{m}=48\text{m}^2$$ (**5 поени**).

Остануваат уште четири квадрати со страна 1m за да биде целосна патеката, чија плоштина е $4\cdot 1\text{m}\cdot 1\text{m}=4\text{m}^2$ (**5 поени**). Според ова, вкупната плоштина на патеката е:

$$72\text{m}^2+48\text{m}^2+4\text{ m}^2=124\text{m}^2$$ (**5 поени**).

Па конечно, ќе бидат потребни $124\cdot 0,5=62$ литри боја (**5 поени**).

4. Една печатница добила нарачка да отпечати одреден број постери за четири дена. Првиот ден отпечатила 20% од вкупно нарачаните постери. Вториот ден отпечатила 50% од преостанатите неотпечатени постери. Третиот ден отпечатила 50% од преостанатите неотпечатени постери. Четвртиот ден ги отпечатила преостанатите 30 постери. Колку вкупно постери биле нарачани?

Прво решение. Нека x е вкупниот број на отпечатени постери. Првиот ден се отпечатени $0,2\cdot x$ постери (**3 поени**), а остануваат неотпечатени $x-0,2\cdot x=0,8\cdot x$ постери. (**3 поени**)

Вториот ден се отпечатени 50%, т. е. $0,5$ од преостанатите постери, односно $0,5\cdot 0,8x=0,4x$ (**4 поени**), а остануваат неотпечатени $0,8x-0,4x=0,4x$ постери. (**4 поени**)

Третиот ден се отпечатени 50%, т. е. $0,5$ од преостанатите постери, односно $0,5\cdot 0,4x=0,2x$ (**4 поени**), а остануваат неотпечатени $0,4x-0,2x=0,2x$ постери. (**4 поени**)

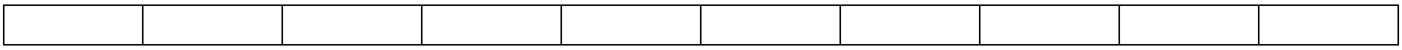
Значи по третиот ден остануваат неотпечатени $0,2x$ постери кои се отпечатени четвртиот ден. Во задачата е дадено дека четвртиот ден се отпечатени 30 постери, па имаме $0,2x=30$, односно $x=150$. Значи вкупно биле нарачани 150 постери (**3 поени**).

Второ решение. Имајќи предвид дека четвртиот ден печатницата ги отпечатила последните 30 постери, имаме:

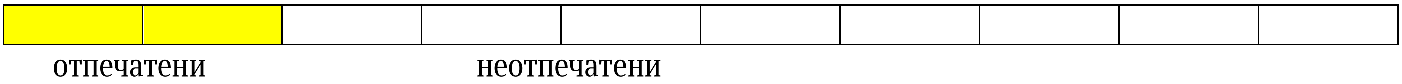
Четвртиот ден: 30 отпечатени постери.

Третиот ден: Отпечатени се 50% (половина) од тоа што останало после вториот ден. Според тоа, за четвртиот ден останале 50% од тоа што останало после вториот ден, а тоа се 30 постери. Значи после вториот ден останале два пати повеќе од 30, односно 60 постери. (**8 поени**)
Вториот ден: Отпечатени се 50% (половина) од тоа што останало после првиот ден, а тоа се 60 постери, па значи после првиот ден останале два пати повеќе од 60, односно 120 постери. (**8 поени**)
Првиот ден: Знаеме дека првиот ден се отпечатени 20% од нарачката, па останале 80% неотпечатени. Според условот на задачата, 80% од нарачката е 120 постери. Според тоа, 10% од нарачката е $120:8=15$ постери. Целата нарачка била вкупно 150 постери. (**9 поени**)

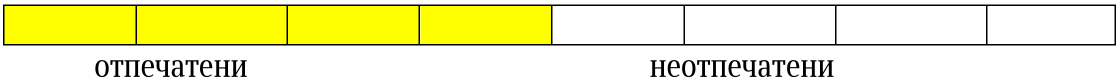
Трето решение. Ќе го користиме методот на отсечки. Нека со отсечка (лента) го преставиме вкупниот број нарачани постери. Отсечката ќе ја поделиме на 10 еднакви дела (секој дел означува 10% од нарачката). (**5 поени**).



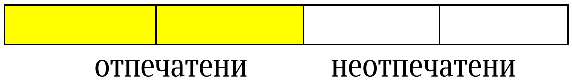
Ако 20% од вкупната нарачка е отпечатена во првиот ден, тогаш бројот на отпечатени постери во првиот ден е два дела, а 8 дела се останатите неотпечатени постери после првиот ден (**5 поени**).



Вториот ден се отпечатени 50% од неотпечатените постери, значи бројот на отпечатени постери во вториот ден е 4 дела, а 4 дела останале неотпечатени (**6 поени**):



Третиот ден се отпечатени 50% од преостанатите неотпечатени постери, значи 2 дела (**6 поени**):



Заклучуваме дека двата дела кои преостануваат се постерите коишто се отпечатени четвртиот ден. Бидејќи четвртиот ден се отпечатени 30 постери, добиваме дека два дела од отсечката се 30 постери. Значи еден дел од отсечката означува 15 постери. Бидејќи целата отсечка има 10 дела, добиваме дека вкупниот број на нарачани постери бил $15\cdot 10=150$. (**6 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 49-4, Конкурсни задачи, 6.-7. одделение, задача 4149**) Спореди ги дропките

$$\frac{1+2+\cdots+50}{2024} \text{ и } \frac{1275}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 9}.$$

Решение. Бидејќи

$$1+2+\cdots+50=(1+50)+(2+49)+\cdots+(25+26)=$$

$$=\underbrace{51+51+\cdots+51}_{25}=25\cdot 51=1275,$$

првата дропка е $\frac{1+2+\cdots+50}{2024}=\frac{1275}{2024}$ (**10 поени**). Од друга страна, $\frac{1275}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 9}=\frac{1275}{2016}$ (**6 поени**).
Значи, треба да ги споредиме дропките $\frac{1275}{2024}$ и $\frac{1275}{2016}$. Бидејќи имаат ист броител, поголема е таа што

има помал именител, па од 2024>2016 следува дека $\frac{1275}{2024}<\frac{1275}{2016}$, односно $\frac{1+2+\cdots+50}{2024}<\frac{1275}{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7\cdot9}$. (**9 поени**).

2. Еден ученик на табла ја запишал големината на два агли α и β. Потоа вториот ученик на таблата го запишал нивниот збир, а третиот ученик го запишал збирот на сите три претходно запишани агли. На крај четвртиот ученик го запишал збирот на комплементниот агол на α и суплементниот агол на β. Ако третиот ученик го запишал аголот $240°$, пресметај ја големината на аголот што ја запишал четвртиот ученик.

Решение. Бидејќи првиот ученик ја запишал големината на аглите α и β, вториот ученик ја запишал големината на аголот $\alpha+\beta$ (**2 поени**), а третиот ученик големината на аголот $\alpha+\beta+(\alpha+\beta)=2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)$ (**4 поени**). Се знае дека третиот ученик го запишал аголот $240°$, од каде добиваме $2(\alpha+\beta)=240°$. Од последната равенка следува

$$\alpha+\beta=240°:2=120°. \text{ (\textbf{5 поени})}$$

Комплементен агол на α е аголот $90°-\alpha$ (**3 поени**), а суплементен агол на β е $180°-\beta$ (**3 поени**). Според тоа, четвртиот ученик ја запишал големината на аголот

$$(90°-\alpha)+(180°-\beta)=90°-\alpha+180°-\beta=270°-(\alpha+\beta). \text{ (\textbf{6 поени})}$$

Бидејќи $\alpha+\beta=120°$ добиваме дека четвртиот ученик го запишал аголот $270°-(\alpha+\beta)=270°-120°=150°$. (**2 поени**).

3. Една слаткарница добила нарачки за колачи од две компании. Слаткарницата подготвила 6 мали пакети и 4 големи пакети со колачи. Во секој мал пакет има по 50 колачи, а во секој голем пакет има по 100 колачи. На колку различни начини може да се поделат подготвените пакети помеѓу двете компании, ако двете компании треба да добијат по ист број колачи?

Прво решение. Вкупниот број колачи во подготвените пакети е: $6\cdot50+4\cdot100=700$ колачи. (**3 поени**) Бидејќи двете компании треба да добијат по ист број колачи, секоја компанија треба да добие по $700:2=350$ колачи. (**2 поени**) Вкупниот број на мали пакети со по 50 колачи е 6, а на големи пакети со по 100 колачи е 4. Бидејќи $4\cdot100=400>350$ и $6\cdot50=300<350$, една компанија може да добие најмногу три од големите пакети и најмалку еден од големите пакети. (**4 поени**) Според тоа, бројот на колачи коишто треба да ги добие секоја компанија може да се претстави како

$$350=3\cdot100+50=2\cdot100+3\cdot50=100+5\cdot50. \text{ (\textbf{7 поени})}$$

Значи, подготвените пакети можат да се поделат помеѓу двете компаниите на следните начини:

- првата да добие 3 големи и 1 мал пакет, а втората да добие 1 голем и 5 мали пакети, (**2 поени**)
- првата да добие 2 големи и 3 мали пакети, а втората да добие 2 голем и 3 мали пакети, (**2 поени**)
- првата да добие 1 голем и 5 мали пакети, а втората да добие 3 големи и 1 мал пакет. (**2 поени**)

Според тоа, добиваме дека подготвените пакети можат да се поделат помеѓу двете компании на 3 различни начини. (**3 поени**)

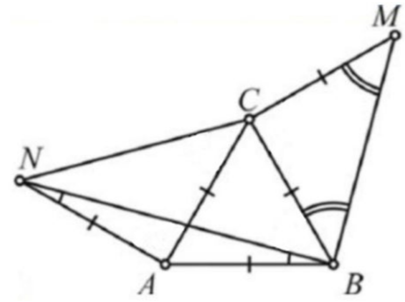
Второ решение. Вкупниот број колачи во подготвените пакети е: $6\cdot50+4\cdot100=700$ колачи. (**3 поени**) Бидејќи двете компании треба да добијат по ист број колачи, секоја компанија треба да добие по $700:2=350$ колачи. (**2 поени**)
Нека првата компанија добие x мали пакети и y големи пакети. Тогаш таа ќе добие $50x+100y$ колачи. Според тоа, ја добиваме равенката $50x+100y=350$, т.е. $x+2y=7$. (**7 поени**) Бидејќи вкупниот број на мали пакети е 6, а на големи 4, важи $0\le x\le 6$ и $0\le y\le 4$, па ги разгледуваме сите можните вредности за y:

1. За $y=0$, добиваме $x=7$, што не е можно. (**2 поени**)
2. За $y=1$, добиваме $x=5$. (**2 поени**)
3. За $y=2$, добиваме $x=3$. (**2 поени**)
4. За $y=3$, добиваме $x=1$. (**2 поени**)

5. За $y=4$, добиваме $x=-1$ што не е можно. (**2 поени**)

Значи, подготвените пакети можат да се поделат помеѓу двете компании на 3 различни начини: првата компанија да добие 5 мали и 1 голем пакет, а втората 1 голем и 3 мали пакети; или двете компании да добијат по 3 мали и 2 големи пакети; или пак, првата да добие 1 мал и 3 големи пакети, а втората компанија 5 мали и 1 голем пакет. (**3 поени**)

4. (**Нумерус 50-3, Конкурсни задачи, 6. одделение, задача 4280**) Над страните AC и BC од рамностраниот ΔABC нанадвор се конструирани правоаголните рамнокраки триаголници, ΔACN и ΔBMC со прави агли во темињата A и C, соодветно, при што N и B се на различна страна од AC, а M и A се на различна страна од BC. Пресметај ја големината на $\measuredangle MBN$.



Решение. Правилно скициран цртеж (**3 поени**). Бидејќи ΔABC е рамностран, следува дека сите негови агли се еднакви на $60°$ (**2 поени**). Од последниот заклучок и од условот дека ΔACN е правоаголен со прав агол во темето A следува

$$\measuredangle BAN=\measuredangle BAC+\measuredangle CAN=60°+90°=150°.$$ (**3 поени**)

Од тоа што ΔABC е рамностран и ΔACN е рамнокрак со прав агол во темето A следува $\overline{AN}=\overline{AC}=\overline{AB}$ (**3 поени**). Според тоа, ΔABN е рамнокрак, па имаме

$$\measuredangle NBA=\frac{1}{2}(180°-150°)=15°.$$ (**5 поени**)

Тогаш,

$$\measuredangle CBN=\measuredangle CBA-\measuredangle NBA=60°-15°=45°.$$ (**3 поени**)

Од тоа што и ΔBMC е рамнокрак правоаголен со прав агол во темето C следува $\measuredangle MBC=\frac{1}{2}(180°-90°)=45°$. (**3 поени**) Конечно,

$$\measuredangle MBN=\measuredangle MBC+\measuredangle CBN=45°+45°=90°.$$ (**3 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 7.-8. одделение, задача 4069**) Шифрата за аплицирање на конкурс на еден кандидат е природен број чија последна цифра е 5. Ако се избрише последната цифра на шифрата и бројот се подели со 7, се добива количник чија последна цифра е 2. Ако се избрише последната цифра на количникот и добиениот број се подели со 6 се добива количник 4 и остаток 1. Определи ја шифрата на кандидатот.

Решение. Нека со x го означиме количникот на кој му е избришана последната цифра 2 (**3 поени**). Од тоа што при делењето со 6 дава количник 4 и остаток 1, добиваме дека $x=6\cdot4+1$, односно $x=25$ (**7 поени**). Значи, по бришење на последната цифра 5 на шифрата и делење со 7, се добива бројот 252 (**5 поени**). Па, пред делењето со 7, бројот бил $252\cdot7=1764$ (**5 поени**). Според тоа и од тоа што последната цифра на шифрата е 5, добиваме дека шифрата на кандидатот за аплицирање на конкурсот е 17645. (**5 поени**)

2. Во еден базен за играње има црвени, зелени и жолти топчиња. Нивниот вкупен број е 420, од кои 30 се жолти топчиња. Половината од вкупниот број на топчиња во базенот се состои од $\frac{1}{3}$ од бројот на црвените и $\frac{5}{6}$ од бројот на зелените топчиња. Колкав е бројот на црвени, а колкав бројот на зелени топчиња во базенот?

Решение. Нека со x ќе го означиме бројот на зелените топчиња. Тогаш бројот на црвените топчиња е $420-30-x=390-x$ (**5 поени**). Од условот на задачата добиваме равенка од облик

$$\frac{1}{3}(390-x)+\frac{5}{6}x=\frac{420}{2}. \text{ (10 поени)}$$

Со решавање на оваа равенка, добиваме

$$\frac{390}{3}-\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}x=210 \Leftrightarrow 130+\frac{5x-2x}{6}=210 \Leftrightarrow \frac{3x}{6}=210-130 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=80 \Leftrightarrow x=160. \text{ (7 поени)}$$

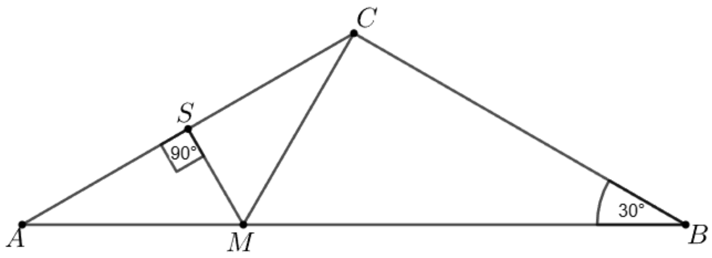
Тоа значи дека бројот на зелени топчиња во базенот изнесува 160**.** Според тоа, бројот на црвените топчиња во базенот изнесува 390-160=230 (**3 поени**).

3. (**Нумерус 49-3, Конкурсни задачи, 7.-8. одделение, задача 4125**) **.** Одреди го најмалиот природен број кој е делив со 7, а при делење со $3,4,5$ и 6 дава остаток 2.

Решение. Нека x е бараниот број. Бидејќи при делење на x со $3,4,5$ и 6 се добива остаток 2, следува дека $x-2$ е делив со $3,4,5$ и 6. (**8 поени**) Па, $x-2=60\cdot n$, односно $x=60\cdot n+2$, користејќи дека $НЗС(3,4,5,6)=60$. (**8 поени**) Од условот x е најмалиот природен број кој е делив со 7, го бараме најмалото $n\in\mathbb{N}$ за кое $x=60\cdot n+2$ е делив со 7. За $n=1$, $x=62$, а 7 не е делител на 62. (**3 поени**) За $n=2$, $x=122$, но 7 не е делител на 122. (**3 поени**) За $n=3$, $x=182$ и за него важи $7|182$. Значи, бараниот број е $x=182$. (**3 поени**)

4. Во рамнокракиот триаголник ABC аголот во темето B е $30°$. Симетралата на кракот AC ја сече основата AB во точка M, а кракот AC во точката S. Ако $\overline{SM}=2\text{cm}$, определи ја должината на основата AB на триаголникот ABC.

Решение: Бидејќи триаголникот ABC е рамнокрак со основа AB следува дека $\measuredangle BAC=30°$ (**2 поени**). Од условот на задачата следува дека $\measuredangle ASM=90°$. (**2 поени**) Тогаш триаголникот AMS е со агли $30°, 60°, 90°$, па следува дека неговата хипотенуза е $\overline{AM}=2\cdot 2\text{cm}=4\text{cm}$. (**4 поени**)



Од друга страна, MS е висина и тежишна линија во триаголникот AMC, па заклучуваме дека триаголникот AMC е рамнокрак. (**5 поени**) Според тоа, $\overline{AM}=\overline{CM}=4\text{cm}$ (**2 бода**) и $\measuredangle MCA=\measuredangle MAC=30°$. (**2 поени**) Тогаш $\measuredangle BMC$ е надворешен агол во триаголникот AMC, па следува $\measuredangle BMC=30°+30°=60°$. (**2 поени**) Тогаш триаголникот MBC е со агли $30°, 60°, 90°$, па следува дека неговата хипотенуза е $\overline{MB}=2\cdot\overline{MC}=2\cdot 4 \text{ cm}=8 \text{ cm}$. (**4 поени**) Според тоа, основата на триаголникот ABC изнесува $\overline{AB}=\overline{AM}+\overline{MB}=4\text{ cm}+8\text{ cm}=12\text{ cm}$. (**2 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Три автобуски конвои со ученици тргнале кон училишните кампови. Во првиот конвој биле 462 ученика, во вториот конвој 546 ученика и во третиот конвој 630 ученика. Познато е дека секој автобус превезувал ист број ученици. Определи го најмалиот вкупен број користени автобуси за превозот и бројот на ученици во секој автобус.

Решение. Нека n е бројот на ученици во еден автобус и A, B и C се бројот на автобуси во првиот, вториот и третиот конвој, соодветно. Тогаш, добиваме дека $n\cdot A=462$, $n\cdot B=546$ и $n\cdot C=630$. Според тоа, добиваме дека $A=\frac{462}{n}$, $B=\frac{546}{n}$ и $C=\frac{630}{n}$. (**6 поени**) Значи, n е делител на броевите 462, 546 и 630. (**2 поени**) Бидејќи бараме вредноста на $A+B+C$ да е најмала, следува дека $n=\text{НЗД}(462,546,630)$. (**6 поени**) Бидејќи, $462=2\cdot3\cdot7\cdot11$, $546=2\cdot3\cdot7\cdot13$ и $360=2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$, добиваме дека $\text{НЗД}(462,546,630)=42$, односно $n=42$. (**6 поени**) Со замена на $n=42$ во равенствата $n\cdot A=462$, $n\cdot B=546$ и $n\cdot C=630$, добиваме дека $A=11$, $B=13$ и $C=15$, па $A+B+C=39$. (**3 поени**) Значи, најмалиот вкупен број користени автобуси за превозот е 39 автобуси и во секој автобус имало по 42 ученика. (**2 поени**)

2. (**Нумерус 48-3, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 4020**) Нека n е природен број кој при делење со 7 дава остаток a и при делење со 19 дава остаток b. Докажи дека $95a+42b-4n$ е делив со 133.

Решение. Од тоа што n е природен број кој при делење со 7 дава остаток a имаме дека $n=7k_1+a$, $k_1\in\mathbb{N}$. Од друга страна, n е природен број кој при делење 19 дава остаток b, па $n=19k_2+b$, $k_2\in\mathbb{N}$. (**10 поени**) Според тоа, $a=n-7k_1$ и $b=n-19k_2$, $k_1,k_2\in\mathbb{N}$. (**5 поени**)

Со замена во $95a+42b-4n$ добиваме дека

$$95a+42b-4n=95(n-7k_1)+42(n-19k_2)-4n=$$

$$=95n-665k_1+42n-798k_2-4n=133n-665k_1-798k_2=133(n-5k_1-6k_2),$$

од каде следува дека $95a+42b-4n$ е делив со 133. (**10 поени**)

3. (**Нумерус 48-4, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 4047**) За кои вредности на природните броеви m и n, аритметичката средина на броевите $4,7,7,m,n,13$ е природен број, ако секој од броевите е помал или еднаков на следниот број во дадениот редослед.

Решение. Од условот дека секој од броевите $4,7,7,m,n,13$ е помал или еднаков на следниот број во дадениот редослед, за m и n добиваме дека важи $7\le m\le n\le 13$. (**5 поени**) Од условот дека аритметичката средина на броевите од низата е природен број, добиваме дека

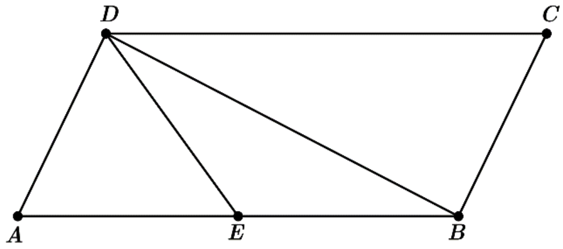
$$\frac{4+7+7+m+n+13}{6}$$

е природен број, односно бројот

$$4+7+7+m+n+13=31+m+n$$

е делив со бројот 6. (**5 поени**) Користејќи дека $7\le m\le n\le 13$, добиваме дека $14\le m+n\le 26$, односно $45\le m+n+31\le 57$. (**5 поени**) Броевите кои се деливи со 6 и се наоѓаат помеѓу 45 и 57 се 48 и 54. Значи, $m+n+31=48$ или $m+n+31=54$, односно $m+n=17$ или $m+n=23$. (**5 поени**) Според тоа и од условот на задачата $7\le m\le n\le 13$, добиваме дека бараните броеви се $m=7$ и $n=10$, $m=8$ и $n=9$, $m=10$ и $n=13$, $m=11$ и $n=12$. (**5 поени**)

4. Даден е паралелограм $ABCD$ така што $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Нека E е точка на страната AB така што DE е симетрала на аголот ADC и DB е симетрала на аголот EDC. Определи ја големината на аглите на паралелограмот $ABCD$.



Решение. Нека $\angle EDB = x$. Бидејќи DB е симетрала на аголот EDC, следува дека $\angle BDC = x$, а бидејќи DE е симетрала на аголот ADC, следува дека $\angle ADE = 2x$. (**4 поени**) Бидејќи $AB \parallel CD$, следува дека $\angle DBE = x$. (**3 поени**) Од тоа што $\angle DEA$ е надворешен агол на триаголникот EBD, следува дека $\angle DEA = 2x$, па триаголникот AED е рамнокрак, односно $\overline{AD} = \overline{AE}$. (**6 поени**) Понатаму, бидејќи во паралелограмот $\overline{AB} = 2\overline{BC}$, следува дека $\overline{AB} = 2\overline{AD} = 2\overline{AE}$, па точката E е средина на отсечката AB. (**4 поени**) Триаголникот EBD е исто така рамнокрак триаголник, односно $\overline{EB} = \overline{ED}$, од каде следува дека триаголникот AED е рамностран. (**5 поени**) Тогаш, $2x = 60°$, односно $x = 30°$. Конечно, добиваме дека аглите на паралелограмот се $60°$ и $120°$. (**3 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. (**Нумерус 50-4, Конкурсни задачи, 9. одделение, задача 4339**) Васе конструирал кули од коцки. Кога конструирал n кули со по 22 коцки му останале 3 коцки. Потоа од сите свои коцки конструирал $n-1$ кула, така што во сите кули имало еднаков број коцки. Кое е најголемото количество на коцки што може да ги има Васе, ако се знае дека има помалку од 300 коцки?

Решение: Од првиот услов на задачата заклучуваме дека вкупниот број коцки е $22n+3$. (**2 поени**) Од нив Васе конструирал $n-1$ кула, кои по услов имаат еднаков број коцки. Затоа, вкупниот број коцки $22n+3$ е делив со $n-1$. (**6 поени**) Според тоа,

$$\frac{22n+3}{n-1} = \frac{22n-22+25}{n-1} = \frac{22(n-1)+25}{n-1} = 22 + \frac{25}{n-1} \quad \text{(8 поени)}$$

е природен број. Следува дека $n-1$ е делител на 25, т.е. $n-1=1$, $n-1=5$ или $n-1=25$. (**2 поени**)

- Во првиот случај, $n=2$, па вкупниот број коцки што може да ги има Васе е $22\cdot 2+3=47$. (**2 поени**)
- Во вториот случај, $n=6$, па вкупниот број коцки е $22\cdot 6+3=135$. (**2 поени**)
- Во третиот случај, $n=26$, па вкупниот број коцки е $22\cdot 26+3=575$. Но, Васе има помалку од 300 коцки, а $575>300$, па во овој случај нема решение. (**2 поени**)

Значи, најголемото количество на коцки што може да ги има Васе е 135 коцки. (**1 поен**)

Задача 2. Нека x, y, z и a се позитивни реални броеви такви што

$$yz = 6ax, \quad xz = 6ay, \quad xy = 6az \quad \text{и} \quad x^2+y^2+z^2=1,$$

Најди ја вредноста на $\frac{1}{xyza}$.

Прво решение. Ги множиме првите три дадени равенства со x, y, z соодветно и добиваме

$$xyz = 6ax^2, \quad xyz = 6ay^2 \quad \text{и} \quad xyz = 6az^2. \quad \text{(7 поени)}$$

Бидејќи a е позитивен реален број имаме дека

$$x^2 = \frac{xyz}{6a}, \; y^2 = \frac{xyz}{6a} \; \text{ и } z^2 = \frac{xyz}{6a}. \quad \text{(3 поени)}$$

ледува дека $x^2 = y^2 = z^2$. (**2 поени**) Со замена на последното равенство во $x^2+y^2+z^2=1$ добиваме $3x^2=1$. Бидејќи x е позитивен реален број, имаме $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (**5 поени**) Значи $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (**2 поени**)

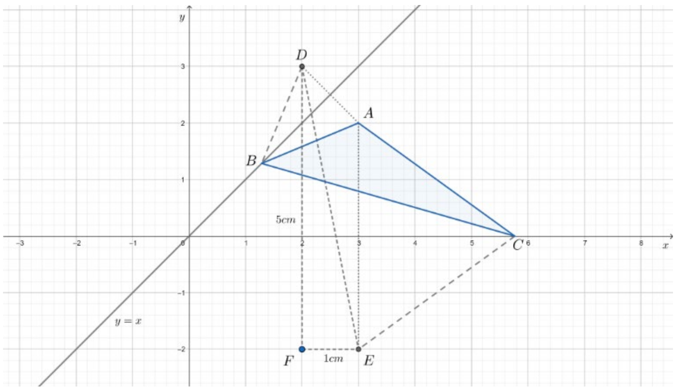
Останува уште да го пресметаме бројот a. Со замена на $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ во некое од првите три дадени равенства добиваме дека $\frac{1}{\sqrt{3}} = 6a$, од каде $a = \frac{1}{6\sqrt{3}}$. (**3 поени**) Бараната вредност е

$$\frac{1}{xyza}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}}}=54.$$ (**3 поени**)

Второ решение. Бидејќи x, y и z се позитивни реални броеви, од првите три дадени равенства добиваме: $6a=\frac{yz}{x}=\frac{xz}{y}=\frac{xy}{z}$. (**5 поени**) Од $\frac{yz}{x}=\frac{xz}{y}$ имаме $x^2=y^2$, а од $\frac{xz}{y}=\frac{xy}{z}$ добиваме $y^2=z^2$. (**5 поени**) Според тоа, $x^2=y^2=z^2$. (**2 поени**) Со замена во $x^2+y^2+z^2=1$ добиваме $3x^2=1$, односно $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. (**5 поени**) Значи $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. (**2 поени**) Останува уште да го пресметаме бројот a. Со замена во некое од првите три дадени равенства добиваме дека $\frac{1}{\sqrt{3}}=6a$,од каде $a=\frac{1}{6\sqrt{3}}$. (**3 поени**) Бараната вредност е

$$\frac{1}{xyza}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}}}=54.$$ (**3 поени**)

3. (**Нумерус 49-2, Конкурсни задачи, 9. одделение, задача 4107**) Во координатната рамнина е даден ΔABC така што темето A има координати $A(3,2)$, темето B лежи на правата $y=x$, а темето C се наоѓа на x – оската. Пресметај го најмалиот можен периметар на ΔABC.



Решение. Нека $D(2,3)$ е симетричната точка на точката A во однос на правата $y=x$ (**3 поени**), а точката $E(3,-2)$ е симетрична на точката A во однос на x – оската (**3 поени**). Бидејќи темето B лежи на правата $y=x$, која е симетрала на отсечката AD, ΔABD е рамнокрак, т.е. $\overline{AB}=\overline{DB}$ (**3 поени**). Темето C лежи на x – оската, која е симетрала на отсечката AE, па и ΔACE е рамнокрак, т.е. $\overline{AC}=\overline{CE}$ (**3 поени**). Тогаш периметарот на ΔABC е

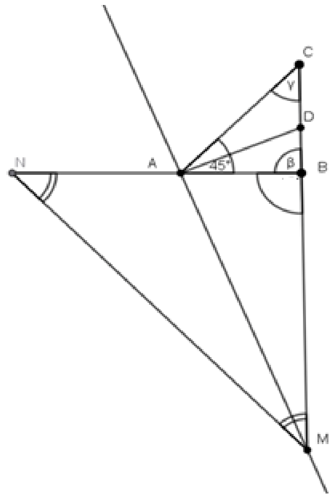
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=\overline{DB}+\overline{BC}+\overline{CE}\geq\overline{DE}.$$ (**5 поени**).

Значи, триаголник со најмал периметар е тој на кој темето B му е пресек на DE со правата $y=x$, а темето C му е пресек на DE со x-оската. Периметарот на тој триаголник е еднаков на должината на отсечката DE. (**3 поени**).

Должината $\overline{DE}$ ќе ја пресметаме според Питагоровата теорема од правоаголниот ΔDFE, каде што $F(2,-2)$. Катетите имаат должина $\overline{DF}=5$ и $\overline{FE}=1$, па $\overline{DE}=\sqrt{\overline{DF}^2+\overline{FE}^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$. Значи минималниот можен периметар на ΔABC е $\sqrt{26}$. (**5 поени**).

4. Даден е триаголникот ABC кај кој $\measuredangle BAC=45^0$. Симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точката D. Правата која е нормална на AD и минува низ темето A, го сече продолжението на страната BC во точка M, така што B лежи меѓу точките M и C. Определи ја големината на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle ABC$, ако $\overline{BM}=\overline{BA}+\overline{AC}$.

Решение. Нека $\measuredangle ABC = \beta$ и $\measuredangle BCA = \gamma$. Нека точката N лежи на продолжението на AB така што $\overline{AN} = \overline{AC}$, како што е означено на сликата. Тогаш од условот на задачата имаме $\overline{BN} = \overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BM}$ што значи дека ΔMBN е рамнокрак со врв во темето B (**5 поени**), па $\measuredangle BMN = \measuredangle BNM = \frac{\beta}{2}$ ($\measuredangle ABC = \beta$ е надворешен агол на триаголникот ABC). (**2 поени**)



Од тоа што AM е нормална на симетралата на аголот во темето A на триаголникот ABC следува дека таа е симетрала и на надворешниот агол во темето A. (**5 поени**) Тогаш $\measuredangle CAM = \measuredangle NAM$ (**3 поени**). Според признакот САС (AM е заедничка страна, $\measuredangle CAM = \measuredangle NAM$ и $\overline{AN} = \overline{AC}$) заклучуваме дека $\Delta NMA \cong \Delta CMA$ (**5 поени**), па следува дека $\frac{\beta}{2} = \gamma$ (**2 поени**). Од триаголникот ABC имаме $45^0 + \gamma + \beta = 180^0$, па добиваме дека $45^0 + 3\gamma = 180^0$ т.е. $\gamma = 45^0$. Тогаш $\beta = 90^0$. (**3 поени**)