



СЕДМИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

ПРВ ДЕН

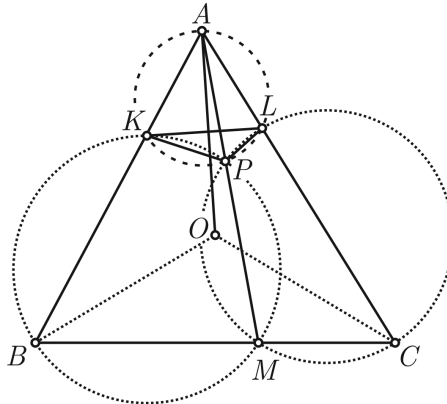
J1. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$, а M е пресечната точка на AP и BC . Опишаната кружница околу $\triangle BMP$ ја сече страната AB по втор пат во точка K , а опишаната кружница околу $\triangle CMP$ ја сече страната AC по втор пат во точка L . Точката O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Докажете дека $AO \perp KL$.

Решение. Од тетивните четириаголници $BMPK$ и $CLPM$ следува:

$$\angle BKP = \angle CMP = \angle ALP,$$

што повлекува дека и четириаголникот $AKPL$ е тетивен. Оттука добиваме:

$$\angle LKA = \angle LPA = \angle LCM \equiv \angle ACB.$$



За центарот O на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ важи $\angle AOB = 2\angle ACB$ и $AO = BO$, па имаме:

$$\angle BAO = \angle OBA = 90^\circ - \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle ACB.$$

Следствено, $AO \perp KL$. □



J2/C1. Малер се наоѓа пред 101 последователни мостови. Пред секој мост има куп со златници (најмалку 101). Пред да се качи на мостот Малер мора или да земе 101 златник од купот или да остави во купот половина од златниците кои ги има со себе, но само доколку овој број е позитивен и парен. Преку секој мост Малер може да помине носејќи најмногу 2026 златници. Ако пред првиот мост Малер нема златници, кој е најголемиот број на златници кои Малер може да ги пренесе преку последниот мост? (Образложете го одговорот.)

Решение. Прво ќе докажеме дека во секој чекор бројот на златници кои ги има Малер е делив со 101. Јасно ова е точно на почетокот бидејќи нема златници. Доколку имал број делив со 101 и дополнително зел 101 златник, повторно бројот е делив со 101. Слично доколку има број на златници кој е делив со 101 и остави половина, тогаш од условот на задачата тоа мора да е парен број, па по делењето со два повторно е делив со 101. Според ова Малер не може да помине преку последниот мост со повеќе од 2020 златници (2020 е најголемиот број делив со 101 кој не е поголем од 2026).

Малер може да помине преку последниот мост со 2020 златници со следната постапка: Пред првиот мост зема 101 златник, а потоа наизменично зема 101 златник, па остава $101 = \frac{101+101}{2}$ златник. На овој начин после секој непарен мост има точно 101 златник. Постапката ја продолжува до 79-от мост. Потоа, пред следните три последователни моста (80, 81 и 82) зема златници, па пред 83-тиот остава $202 = \frac{101+3 \cdot 101}{2}$ златници, со што после тој мост има точно 202 златници. Пред секој од преостанатите 18 мостови зема златници, за на крајот да има $202 + 18 \cdot 101 = 2020$ златници. $\square$



J3/C2. Нека a, b, c и d се природни броеви такви што $abcd = 2026^3$. Докажете дека

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > \sqrt{2}(ab + bc + cd + da).$$

Решение. Разложувањето на бројот 2026 на прости множители гласи: $2026 = 2 \cdot 1013$. Значи $2026^3 = 2^3 \cdot 1013^3$. Следствено, најмалку еден и најмногу три од броевите a, b, c и d се деливи со 1013.

Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека a е најголемиот меѓу броевите a, b, c, d и $b \geq d$. Да забележиме дека $b^2 + c^2 + d^2 = (b^2 + \frac{1}{2}c^2) + (\frac{1}{2}c^2 + d^2) \geq \sqrt{2}bc + \sqrt{2}cd$. Ако $a > 2b$, тогаш $a \geq 4b \geq 4d$ и имаме $a^2 \geq (2b + 2d)a \geq \sqrt{2}ab + \sqrt{2}ad$, што го повлекува посакуваното неравенство.

Ако $a = 2b$, тогаш за $4d < a$ имаме $d \leq 4$, па $a = \frac{3}{2}b + \frac{1}{2}b > \sqrt{2}b + \sqrt{2}d$ и неравенството е исполнето. Ако $a \leq 4d$, тогаш $b, d \geq 1013$, $a \geq 2026$ и $c \leq 4$. Оттука добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 > 3b^2 + b^2 + b^2 + d^2 = \sqrt{8}b^2 + (3 - \sqrt{8})b^2 + 3\sqrt{b^4 d^2} > \sqrt{2}ab + \frac{9-8}{3+\sqrt{8}}1013b + 3bd > \sqrt{2}ab + \frac{1013}{6}b + \sqrt{2}da.$$

Сега, бидејќи $b \geq d$, имаме $\frac{1013}{6}b > 80(b + d) \geq 20c(b + d) > \sqrt{2}c(b + d)$ и со замена го добиваме посакуваното неравенство.

Останува случајот кога $a = b$. Тогаш точно еден од преостанатите два броја е делив со 1013, а другиот е најмногу 8. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $d \geq 1013$, а $c \leq 8$. Ако $d = a$ имаме $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \sqrt{2}(ab + ad) + (3 - \sqrt{8})a^2 + c^2 = \sqrt{2}(ab + ad) + \frac{3-9}{3+\sqrt{8}}a^2 + c^2 > \sqrt{2}(ab + ad) + \frac{1013}{6}a > \sqrt{2}(ab + ad) + 80(b + d) \geq \sqrt{2}(ab + ad) + 10c(b + d) > \sqrt{2}(ab + da + bc + cd)$.

Ако пак $d < a$, тогаш броевите се $a = b = 2026$, $d = 1013$ и $c = 2$. За нив $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 9 \cdot 1013^2 + 4$, а $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 2028 \cdot 3039 = \frac{6 \cdot 1014}{1013} 1013^2$. Од $\frac{9}{4 \cdot 2} > (\frac{1014}{1013})^2 \Leftrightarrow \frac{9}{6} > \frac{1014}{1013} \sqrt{2}$, следува посакуваното неравенство. $\square$



С3. Даден е четириаголник $ABCD$ таков што $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. Нека AB и DC се сечат во E , AD и BC се сечат во F , а AC и BD се сечат во G . Средишните точки на страните AB , BC , CD , и DA се K , L , M , и N , соодветно. Докажете дека G лежи на радикалната оска на кружниците опишани околу $\triangle KME$ и $\triangle LNF$.

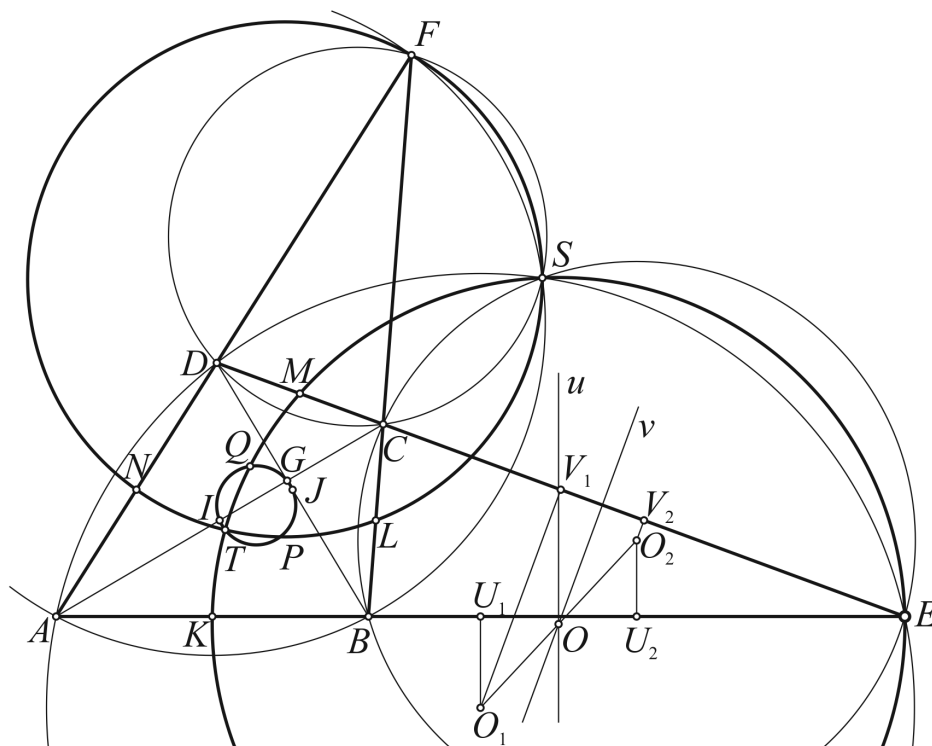
Решение. Нека опишаните кружници на $\triangle AED$ и $\triangle BEC$ се сечат по втор пат во точката S . Имаме

$$\angle SBF = \angle SBC = \angle SEC = \angle SED = \angle SAD = \angle SAF,$$

што повлекува дека $FABS$ е тетивен и

$$\angle SDF = 180^\circ - \angle ADS = \angle SEA = \angle SEB = 180^\circ - \angle BCS = \angle SCF,,$$

па значи и $FDCS$ е цикличен. (Точка на Микел)



Нека O_1 и O_2 се центрите на кружниците опишани околу $\triangle AED$ и $\triangle BEC$, соодветно. Нека U_1 и U_2 односно V_1 и V_2 се подножјата на висините спуштени од O_1 односно од O_2 кон AE и DE , соодветно. Ако u и v се симетралите на отсечките U_1U_2 и V_1V_2 , тогаш нивната пресечна точка O (на правите u и v) е центар на кружницата опишана околу $\triangle KEM$. Да забележиме дека O е средишна точка на O_1O_2 . Бидејќи O_1O_2 е симетрала на отсечката ES , опишаната кружница на $\triangle KEM$ минува низ S . Аналогно, S лежи на кружницата опишана околу $\triangle FNL$.

Нека I и J се средишните точки на дијагоналите AC и BD . Нека Q е втората пресечна точка на опишаните кружници на $\triangle AEC$ и $\triangle BFD$, а P е втората пресечна точка на опишаните кружници на $\triangle ACF$ и $\triangle BED$. Доколку го разгледуваме четириаголникот $ABDC$ (наместо $ABCD$) заклучуваме дека точката Q лежи на опишаните кружници на $\triangle EMK$, $\triangle ABG$, $\triangle CDG$, и $\triangle IJG$. Слично, доколку го разгледуваме четириаголникот $ACBD$ заклучуваме дека точката P лежи на опишаните кружници на $\triangle FNL$, $\triangle AGD$, $\triangle BCG$, и $\triangle IJG$.



Нека T е втората пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle EMK$ и $\triangle FNL$. Имаме

$$\angle PTS = \angle PFS = \angle PFC + \angle CFS = \angle PAC + \angle BAS$$

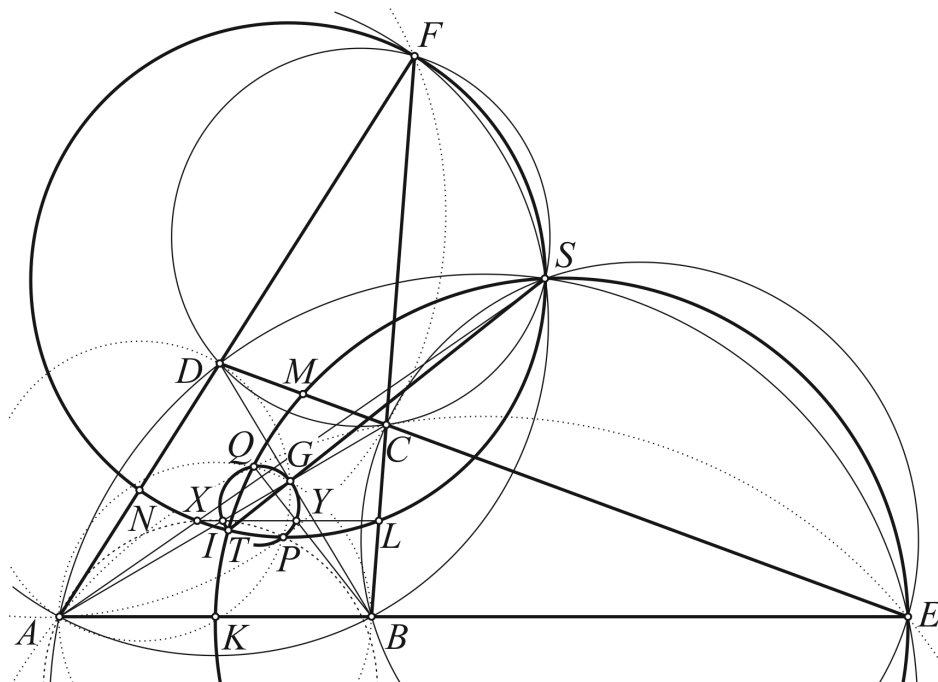
и

$$\angle STQ = \angle SEQ = \angle SEC + \angle CEQ = \angle SAD + \angle CAQ.$$

Комбинирајќи ги овие равенства добиваме

$$\begin{aligned} \angle PTQ &= \angle PTS + \angle STQ = \angle PAC + \angle BAS + \angle SAD + \angle CAQ = \\ &= \angle BAQ + \angle PAD = 180^\circ - \angle QGJ + 180^\circ - \angle DGP = 180^\circ - \angle QGP. \end{aligned}$$

Значи, T лежи на опишаната кружница на $\triangle IJG$.



Нека X е пресечна точка на AS и опишаната кружница на $\triangle FNL$, а Y е пресечна точка на BQ и опишаната кружница на $\triangle IJG$. Бидејќи

$$\angle SXL = \angle SFL = \angle SFB = \angle SAB,$$

правите AB и XL се паралелни. Со оглед дека IL е средна линија на $\triangle ABC$, важи $IL \parallel AB \parallel XL$. Значи X лежи на IL . Слично, од $\angle YIG = \angle BQG = \angle BAG$ следува дека Y лежи на IL . Бидејќи

$$\angle PXI = \angle PXL = \angle PFL = \angle PFC = \angle PAC,$$

четириаголникот $APIX$ е тетивен. Конечно, имаме

$$\begin{aligned} \angle PTG &= \angle PTY + \angle YTG = \angle PIY + \angle YQG = \angle PAX + \angle BQG = \\ &= \angle PAS + \angle BAG = \angle PAC + \angle CAS + \angle BAS - \angle CAS = \angle PAC + \angle BAS = \angle PTS. \end{aligned}$$

Заклучуваме дека G лежи на ST - радикалната оска за дадените кружници. $\square$



ВТОР ДЕН

J4. Нека x , y и z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 3$ и нека n е позитивен цел број. Докажете дека

$$((n+1)x - n)^2 + ((n+1)y - n)^2 + ((n+1)z - n)^2 \geq 3.$$

Кога важи равенство?

Решение 1. Имаме

$$3 + \sum_{cyc} ((n+1)x - n)^2 = \sum_{cyc} (((n+1)x - n)^2 + 1) \geq \sum_{cyc} 2|(n+1)x - n| \geq 2 \sum_{cyc} ((n+1)x - n) = 6,$$

што го повлекува бараното.

Равенство важи ако и само ако $(n+1)x - n = (n+1)y - n = (n+1)z - n = 1$, т.е. ако $x = y = z = 1$. $\square$

Решение 2. Од неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина за три броја имаме:

$$\begin{aligned} & ((n+1)x - n)^2 + ((n+1)y - n)^2 + ((n+1)z - n)^2 = \\ & |(n+1)x - n|^2 + |(n+1)y - n|^2 + |(n+1)z - n|^2 \geq \\ & \frac{1}{3} (|(n+1)x - n| + |(n+1)y - n| + |(n+1)z - n|)^2 \geq \\ & \frac{1}{3} (((n+1)x - n) + ((n+1)y - n) + ((n+1)z - n))^2 = \\ & \frac{1}{3} ((n+1)(x + y + z) - 3n)^2 = \frac{1}{3} (3(n+1) - 3n)^2 = \frac{1}{3} \cdot 3^2 = 3. \end{aligned}$$

Последното неравенство е точно бидејќи

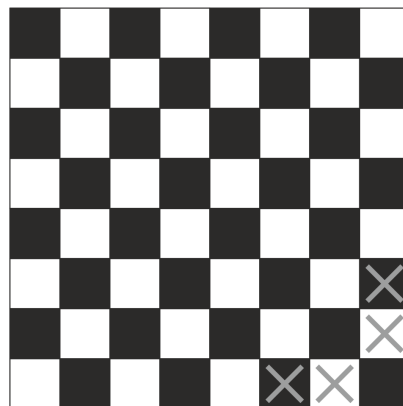
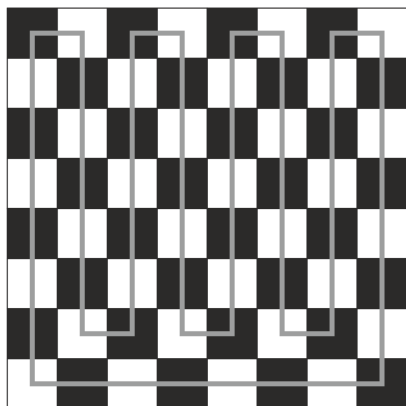
$$|(n+1)x - n| + |(n+1)y - n| + |(n+1)z - n| \geq ((n+1)x - n) + ((n+1)y - n) + ((n+1)z - n) = 3 > 0.$$

Равенство важи ако и само ако $(n+1)x - n = (n+1)y - n = (n+1)z - n > 0$, т.е. ако $x = y = z = 1$. $\square$



J5/C4. За природен број k велиме дека е *незгоден* доколку од шаховски обоена 8×8 табла може да се отстранат k бели и k црни полиња така што преостанатата фалична табла не може да се паркетира со домина 2×1 . Кој е најмалиот незгоден број?

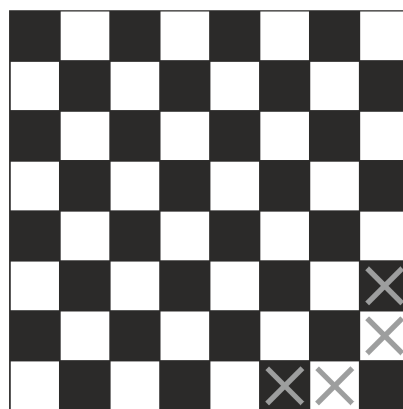
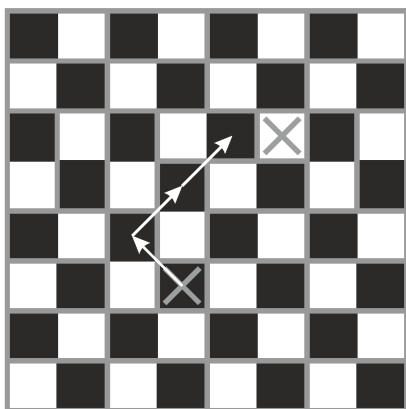
Решение. *Одговор:* најмалиот незгоден број е 2. За да покажеме дека бројот 1 не е незгоден, доволно е да забележиме дека придружениот граф G (темиња се полињата на таблата, ребра се паровите полиња со заедничка страна) е бипартитен и Хамилтонски (види го левиот цртеж долу).



Десниот цртеж докажува дека бројот 2 е незгоден. □

Забелешка. Фактот дека бројот 1 не е незгоден е познат како теорема на Гомори (Ralph Gomory).

Решение 2. *Одговор:* најмалиот незгоден број е 2. Заклучокот дека 2 е незгоден следува од цртежот десно (полето во десниот долен кош не може да се покрие).



Ќе докажеме дека бројот 1 не е незгоден за $m \times 2n$ табла за $m > 1$. Паркетирањето го правиме со следната постапка.

Доколку нема маркирани полиња во долен/горен ред, поставуваме n домина (ограничени со сива линија на левиот цртеж) хоризонтално и таблата се намалува за еден ред. Оваа постапка ја продолжуваме додека има вакви редови, но најмногу до моментот кога би останале два реда.



По завршување на претходната постапка, ако останале барем три реда, маркираните полиња се едно во долниот и едно во горниот ред. Во овој случај поставуваме $n-1$ домина (хоризонтално) во долниот ред почнувајќи од страните кон маркираното. Бидејќи има вкупно $2n$ полиња ќе остане едно непокриено поле до маркираното. Ова поле го покриваме со вертикално домино, со што сме зафатиле едно поле од вториот ред (замена за маркираното) кое е дијагонално од маркираното, т.е. во иста боја. Постапката ја продолжуваме додека не останат точно два реда.

Истата постапка ја правиме и за колоните, т.е. крајните празни редови ги покриваме со вертикално домино, а кога ќе стигнеме до маркираното поставуваме хоризонтално со што маркираното се поместува дијагонално во следната колона.

Јасно кога ќе остане 2×2 табла бидејќи двете непокриени полиња (кои не се маркирани) се во различна боја, тие се во ист ред или колона и можат да се покријат со едно домино. $\square$



J6/C5. Даден е четириаголник $ABCD$. Правите AB и CD се сечат во M , а правите BC и DA во N така што C е меѓу D и M и меѓу B и N . Нека P е подвижна точка на отсечката MN , а Q е втората пресечна точка на опишаните кружници околу $\triangle APN$ и $\triangle CMP$ (различна од P). Докажете дека правата PQ минува низ фиксна точка независна од положбата на P .

Решение. Прво ќе докажеме дека Q лежи на опишаната кружница околу $\triangle ACD$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $\angle ANM \geq \angle NMA$. Во овој случај Q е на лакот $\widehat{CM}$ од опишаната кружница околу $\triangle CMP$ што не ја содржи P .

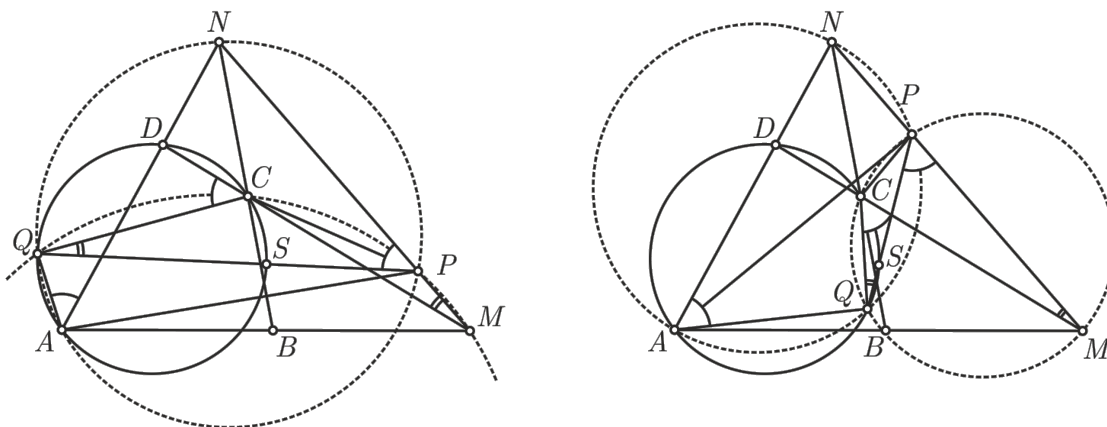
Ако Q е на лакот $\widehat{AP}$ од опишаната кружница околу $\triangle APN$ што ја содржи N (цртеж лево), тогаш

$$\angle DAQ \equiv \angle NAQ = \angle NPQ = 180^\circ - \angle QPM = 180^\circ - \angle QCM = \angle DCQ.$$

Слично ако Q е на лакот $\widehat{AP}$ од опишаната кружница околу $\triangle APN$ што не ја содржи N (цртеж десно), тогаш

$$\angle QAD \equiv \angle QAN = 180^\circ - \angle NPQ = \angle QPM = \angle QCM = 180^\circ - \angle DCQ.$$

Заклучуваме дека во двата случаи точката Q лежи на опишаната кружница околу $\triangle ACD$.



Сега $\angle PQC = \angle PMC \equiv \angle NMC$ не зависи од положбата на точката P . Според ова втората пресечна точка S на PQ со опишаната кружница околу $\triangle ACD$ е фиксна, т.е. не зависи од P . $\square$

Забелешка. За да не се разгледуваат случаи може да се работи со насочени агли по модул 180° .

Забелешка. Тврдењето е точно и кога точката P се движи по правата MN наместо отсечката MN , но треба да се разгледаат дополнителни случаи.



С6. Дадена е бесконечна низа од позитивни цели броеви $a_1, a_2, a_3, \dots$ таква што $a_1 > 1$ и $(2^{a_n} - 1)a_{n+1}$ е полн квадрат за секој $n \geq 1$. Дали е можно два члена на низата да се еднакви? (Образложете го одговорот.)

Решение. *Одговор:* Не.

Доволно е да докажеме дека најголемиот прост делител на $2^n - 1$ со непарен експонент (степенов показател во канонската факторизација) е поголем од најголемиот прост делител на n . Нека p е најголемиот прост делител на n , и нека q е прост делител на $2^p - 1$ таков што експонентот $\nu_q(2^p - 1)$ е непарен (ваков q постои бидејќи $2^p - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ не е полн квадрат). Тогаш, редот на 2 модуло q е точно p . Следствено, имајќи ја предвид малата теорема на Ферма, $p \mid q - 1$. Ова повлекува дека $q > p$.

Од LTE (Lifting the Exponent Lemma) имаме,

$$\begin{aligned}\nu_q(2^n - 1) &= \nu_q\left((2^p)^{\frac{n}{p}} - 1\right) \\ &= \nu_q(2^p - 1) + \nu_q\left(\frac{n}{p}\right) \\ &= \nu_q(2^p - 1).\end{aligned}$$

Имајќи предвид дека ова разгледуваниот експонент е непарен, го имаме следниов заклучок: ако n е член на низата, тогаш q го дели следниот член; значи најголемиот прост делител е строго растечки параметар за членовите на разгледуваната низа. Ова повлекува дека не е можно два члена на низата да се еднакви. $\square$

