



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД РЕГИОНАЛНИОТ НАТПРЕВАР ПО
МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2026
14.02.2026

Прва година

1АБ. Петмина другари нашле ковчег со златни парички. Решиле да си ги поделат на следниов начин:

- Андреј зел половина од паричките и уште една паричка.
- Бојан зел третина од преостанатите парички и уште две парички.
- Виктор зел четвртина од оние парички што останале и уште три парички.
- Горан зел петтина од она што останало и уште четири парички.
- Дамјан ги зел сите преостанати парички.

Со ваквата поделба секој од нив добил цел број парички и Дамјан добил помалку парички од Виктор. Кој од другарите добил најмалку парички и колку?

Решение. Нека во ковчегот имало n парички. Според описот следува дека:

- Андреј зел $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ парички, за другите останале уште $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$ (2 п.)
- Бојан зел $\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 2 = \frac{n+10}{6}$ парички, за другите останале уште $\frac{n-8}{3}$ (2 п.)
- Виктор зел $\frac{1}{4} \cdot \frac{n-8}{3} + 3 = \frac{n+28}{12}$ парички, за другите останале уште $\frac{n-20}{4} = \frac{n}{4} - 5$ (2 п.)
- Горан зел $\frac{1}{5}\left(\frac{n}{4} - 5\right) + 4 = \left(\frac{n}{20} + 3\right)$ парички, па останале уште $\frac{n-40}{5} = \frac{n}{5} - 8$ (2 п.)
- Дамјан ги зел останатите $\left(\frac{n}{5} - 8\right)$ парички. ... (2 п.)

Според бројот на парички што ги зеле Андреј, Горан, Дамјан и Виктор, следува дека бројот на парички n е делив со 20 (делив е со 4 и 5 истовремено)... (3 п.). Од условот Дамјан зел помалку парички од Виктор се добива $\frac{n}{5} - 8 < \frac{n+28}{12}$, од

каде следи $n < \frac{620}{7} \approx 88,57$... (3 п.). Заклучуваме дека $n \in \{20, 40, 60, 80\}$... (2 п.). Вредностите 20 и 40 ги елиминираме

затоа што во тој случај бројот на парички што ги зел Дамјан не е позитивен број ... (2 п.). Со проба за останатите две можности се утврдува дека бројот на парички изнесува $n = 80$... (2 п.) и дека најмалку парички зел Горан и тоа 7 парички ... (3 п.).

2АБ. (Сигма 138, Рубрика задачи, 1877.)

Докажи дека ако важат равенствата $x + y + z = a$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$, тогаш барем еден од броевите x, y, z е еднаков на a .

Решение. Нека важат равенствата: $x + y + z = a$ (1) и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$ (2)

Од (1) следува $z = a - x - y$... (2 п.), а од (2) следува дека за $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$... (1 п.),

$$ayz + axz + axy - xyz = 0 \text{ ... (2 п.)}$$

$$\Leftrightarrow ay(a - x - y) + ax(a - x - y) + axy - xy(a - x - y) = 0 \text{ ... (3 п.)}$$

$$\Leftrightarrow x(a^2 - ay - ax + xy) + y(a^2 - ay - ax + xy) = 0 \text{ ... (5 п.)}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - ay - ax + xy)(x + y) = 0 \text{ ... (2 п.)}$$

$$\Leftrightarrow [a(a - y) - x(a - y)](x + y) = 0 \text{ ... (3 п.)}$$

$$\Leftrightarrow (a - x)(a - y)(x + y) = 0 \text{ ... (2 п.)}$$

Последново значи дека барем еден од множителите од левата страна е еднаков на нула, па $x = a$ или $y = a$ или $x = -y$.

Од $x = -y$ и $z = a - x - y$, добиваме $z = a$. Значи, барем еден од x, y и z е еднаков на a ... (5 п.).

3А. (Сигма 138, Задачи од училницата, задача 2.)

Нека A е множество од сите производи на три последователни природни броеви, а B е множество од сите производи на два последователни природни непарни броеви. Утврди дали множеството A содржи број кој е за 2027 поголем од некој број од множеството B .

Решение. Од три последователни природни броеви еден е делив со 3, па секој број $a \in A$ е од облик $3k$, $k \in \mathbb{N}$...(2 п.). Секој број од множеството $b \in B$ е од облик $(2n-1)(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$...(2 п.). Според условот во задачата бараме броеви a, b такви што $a = b + 2027$...(2 п.). Оттука имаме

$$\begin{aligned} 3k &= (2n-1)(2n+1) + 2027, \\ 3k &= (2n)^2 - 1^2 + 2027, \\ (2n)^2 &= 3k - 2026, \text{ ...(5 п.)} \\ (2n)^2 &= 3k - (3 \cdot 675 + 1), \\ (2n)^2 &= 3(k - 675) - 1 = 3(k - 676) + 2. \text{ ...(5 п.)} \end{aligned}$$

Бројот $(2n)^2$ е точен квадрат на природен број, а квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1 ...(3 п.). Истовремено, од последното равенство забележуваме дека бројот $(2n)^2$ при делење со 3 има остаток 2, што е противречност ...(4 п.). Значи не постојат броеви што го исполнуваат дадениот услов ...(2 п.).

3Б. (Сигма 139, Задачи од училиницата, задача 1.)

Најди го најголемиот природен број чии цифри се различни меѓу себе и кој се намалува 5 пати кога ќе се избрише неговата прва цифра.

Решение. Нека бараниот број има n цифри. По услов имаме дека $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} = 5 \cdot \overline{a_2 a_3 \dots a_n}$, т.е.

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + \overline{a_2 a_3 \dots a_n} = 5 \cdot \overline{a_2 a_3 \dots a_n} \text{ ...(5 п.)}$$

Ќе го означиме бројот $A = \overline{a_2 a_3 \dots a_n}$. Тогаш

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 10^{n-1} + A &= 5A, \\ 4A &= a_1 \cdot 10^{n-1}, \\ 4A &= a_1 \cdot 10^{n-3+2}, \\ 4A &= a_1 \cdot 10^{n-3} \cdot 10^2, \text{ т.е.} \\ A &= 25 \cdot a_1 \cdot 10^{n-3} \text{ ...(5 п.)} \end{aligned}$$

Со проверка се забележува дека $n \geq 4$. Ќе ги разгледаме следните случаи:

- Ако $n > 4$, тогаш во бројот A , но и во бараниот број, последните две цифри се нули ...(3 п.). Но, тоа спротивно со тоа дека сите цифри на бараниот број се различни меѓу себе ...(2 п.).

- Ако $n = 4$, тогаш $A = 250 \cdot a_1$ и A е трицифрен број ...(2 п.). Јасно е дека колку е бројот a_1 поголем, поголем ќе биде и бараниот број ...(2 п.). За $a_1 \geq 4$ бројот $A = 250 \cdot a_1$ е четирицифрен, а не трицифрен, што противречи со $n = 4$...(3 п.). За $a_1 = 3$ се добива $A = 750$...(2 п.). а бараниот број е 3750 ...(1 п.). Значи, најголемиот природен број што го задоволува условот во задачата е бројот 3750.

4А. Нека $\triangle ABC$ е рамнокрак при што важи $\overline{AB} = \overline{BC}$. Нека D е точка на страната BC така што важи $\overline{CD} = 4 \cdot \overline{DB}$ и нека E е точка на страната AC така што BE е висина. Ако F е точката во која се сечат AD и BE , тогаш пресметај го односот $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}}$.

Решение. Нека K е точка на BE таква што $DK \parallel AC$...(2 п.). Тогаш $\triangle BCE$ и $\triangle BDK$ се слични ...(4 п.), па оттука следува:

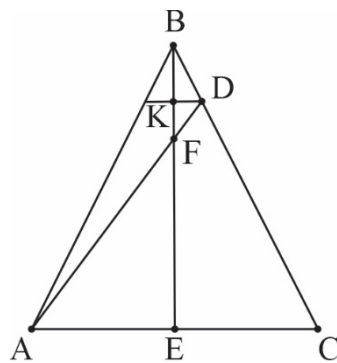
$$\frac{\overline{BK}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{1}{5}, \text{ ...(1 п.)}$$

односно: $\overline{BK} = \frac{1}{5} \overline{BE}$ и $\overline{DK} = \frac{1}{5} \overline{CE}$...(2 п.). Од друга страна, и $\triangle DKF$ и $\triangle AEF$ се слични ...(4 п.), па следува:

$$\frac{\overline{KF}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{KD}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{1}{5} \overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{1}{5}. \text{ ...(2 п.)}$$

Да означиме $k = \overline{KF}$. Тогаш $\overline{EF} = 5k$...(2 п.). Од равенството $\overline{BE} = \overline{BK} + \overline{KF} + \overline{FE}$ се добива дека $\overline{BK} = \frac{3}{2}k$...(4 п.), а

од друга страна имаме $\overline{BF} = \overline{BK} + \overline{KF} = \frac{5}{2}k$...(2 п.). Така, следува дека важи $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = 2$...(2 п.).



4Б. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен со прав агол во темето C . Во триаголникот се нацртани кружните лац $\widehat{CQ}$ и $\widehat{CP}$ со центри во темињата A и B соодветно. Докажи дека важи: $\frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{BQ}$.

Решение. Означуваме: $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$. Бидејќи триаголникот е правоаголен, согласно Питагоровата теорема важи $a^2 + b^2 = c^2$...**(2 п.)**. Уште, $\overline{AQ} = \overline{AC} = b$ **(2 бода)** и $\overline{BP} = \overline{BC} = a$...**(2 п.)**. Сега имаме:

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP} = c - a \quad \text{и} \quad \overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{AQ} = c - b, \quad \dots \textbf{(5 п.)}$$

па се добива:

$$\overline{AP} \cdot \overline{BQ} = (c - a)(c - b) = c^2 - ac - bc + ab \quad \dots \textbf{(3 п.)}$$

За должината $\overline{PQ}$ имаме:

$$\overline{PQ} = \overline{AB} - \overline{AP} - \overline{BQ} = c - (c - a) - (c - b) = a + b - c, \quad \dots \textbf{(3 п.)}$$

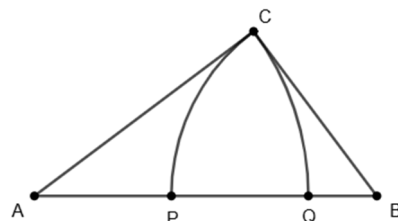
од каде:

$$\frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \frac{1}{2}(a + b - c)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc) = \dots \textbf{(4 п.)}$$

$$= \frac{1}{2}(2c^2 + 2ab - 2ac - 2bc) = \dots \textbf{(2 п.)}$$

$$= c^2 + ab - ac - bc = \overline{AP} \cdot \overline{BQ}, \quad \dots \textbf{(2 п.)}$$

што и требаше да се докаже.



Втора година

1А. (Сигма 137, Рубрика задачи, задача 1872)

За позитивните рационални броеви a, b и c е исполнето равенството $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Докажи дека $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ е рационален број.

Решение. Равенството $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ можеме да го запишеме во облик $ac + bc = ab$, односно $ab - ac - bc = 0$... **(5 п.)**. Тогаш

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) = (a + b - c)^2 \quad \dots \textbf{(10 п.)}$$

Сега, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b - c)^2} = |a + b - c|$...**(5 п.)**. Бидејќи a, b и c се позитивни рационални броеви, добиваме $|a + b - c| \in \mathbb{Q}^+$, односно $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ е (позитивен) рационален број... **(5 п.)**.

1Б. (Сигма 138, Задачи од училиницата, Втора година, задача 2)

За $x, y \in \mathbb{N}_0$, најди ги двоцифрените броеви $\overline{xy}$ кои го исполнуваат условот $\overline{xy} = x^2 + y^2 + xy$.

Решение. Од $\overline{xy} = 10x + y$, со замена во условот добиваме дека дадената равенка е еквивалентна со $10x + y = x^2 + y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 + (y - 10)x + y^2 - y = 0$... **(5 п.)**. Ако ја гледаме последната квадратна равенка по x , имаме

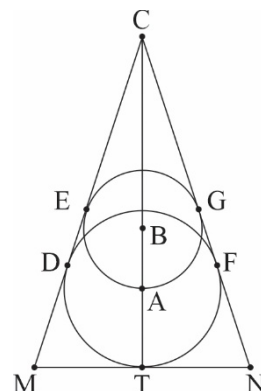
$$x = \frac{(10 - y) \pm \sqrt{(y - 10)^2 - 4(y^2 - y)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{(10 - y) \pm \sqrt{-3y^2 - 16y + 100}}{2} \quad \dots \textbf{(5 п.)}$$

Заради $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, забележуваме дека дискриминантата на квадратната равенка е позитивна за $y \in \{0, 1, 2, 3\}$...**(5 п.)**. Решенија добиваме за $y = 3 \Rightarrow x = 1 \vee x = 6$, и за $y = 1 \Rightarrow x = 9$... **(5 п.)**.

Според тоа бараните двоцифрени броеви се 13, 63, 91 ...**(5 п.)**.

2А. (Сигма 137, Задачи од училиницата, Втора година, задача 1).

Дадена е кружницата со центар во точката A и радиус 4 cm, при што точката A лежи на друга кружница со центар во точка B и радиус 3 cm. Дијаметрите на двете кружници лежат на правата која минува низ точките A и B , при што правата AB е нормална на правата MN издигната во точката T . Исто така, MN е тангента на поголемата кружница, а MC и NC се заеднички тангенти на двете кружници во точките D, E, F и G , како што е прикажано во цртежот. Одреди ја плоштината на триаголникот MNC .



Решение. Да ги поврземе точките B со E и A со D . MC е тангента на кружниците со центри во A и B повлечена во точките D и E соодветно, од каде AD и BE се нормални на MC и уште $\overline{AD} = \overline{AT} = 4$ cm и $\overline{AB} = \overline{BE} = 3$ cm ... (3 п.). Нека $\overline{CB} = x$ и $\overline{MT} = y$.

Да забележиме дека триаголниците CEB, CDA и CTM се сите слични ... (3 п.). Од тоа

што $\triangle CEB$ и $\triangle CDA$ се слични имаме $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AD}}$, а со тоа имаме $\frac{x}{x+3} = \frac{3}{4}$.

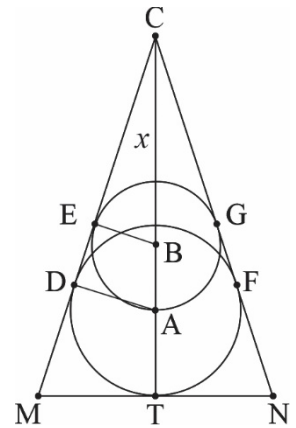
Од тука следува $4x = 3x + 9$ односно $x = 9$ cm ... (5 п.). Од Питагоровата теорема,

$\overline{CE} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{BE}^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$ cm ... (3 п.). Од тоа што $\triangle CEB$ и $\triangle CTM$ се слични имаме

$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{CT}}$, а со тоа важи $\frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{y}{9+3+4}$. Од тука добиваме $y = 4\sqrt{2}$ cm ... (5 п.).

Од друга страна, од сличноста на $\triangle CEB$ и $\triangle CGB$ следува дека $\angle BCE = \angle GCB$ и со тоа и $\overline{MT} = \overline{TN}$... (3 п.).

Конечно за плоштината на триаголникот MNC имаме $P_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} \overline{MN} \cdot \overline{CT} = 64\sqrt{2}$ cm² ... (3 п.).



2Б. (Сигма 135, Рубрика задачи, задача 1839)

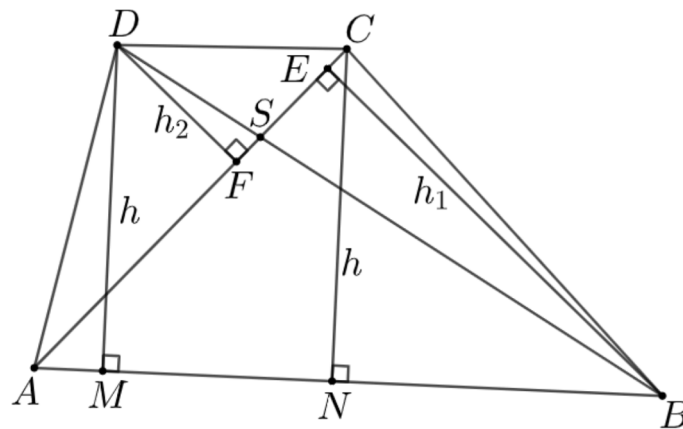
Нека S е пресечната точка на дијагоналите кај трапезот $ABCD$. Ако $P_{SDA} = a, P_{ABS} = b$ и $P_{CDS} = c$, тогаш докажи дека $a = \sqrt{bc}$.

Решение. Нека N и M се подножните точки на висините спуштени од точките C и D на AB , соодветно и нека E и F се подножните точки на нормалите спуштени од точките B и D кон AC , соодветно. Нека $\overline{DM} = \overline{CN} = h$, $\overline{BE} = h_1$ и

$\overline{DF} = h_2$... (5 п.). Така имаме дека $P_{ABS} + P_{DAS} = P_{ABD} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS}$. Значи, $P_{BCS} = P_{DAS} = a$... (10 п.).

На тој начин имаме дека $bc = P_{ABS} \cdot P_{CDS} = \frac{\overline{SA} \cdot h_1}{2} \cdot \frac{\overline{SC} \cdot h_2}{2} = \frac{\overline{SC} \cdot h_1}{2} \cdot \frac{\overline{SA} \cdot h_2}{2} \Leftrightarrow bc = P_{BCS} \cdot P_{DAS} = a \cdot a = a^2$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{bc}$... (10 п.), што требаше да се докаже



3АБ. Равенките $ax^2 + bx + c = cx + b$ и $\frac{cx+b}{cx+a} = cx + b$ имаат заедничко (реално) решение кое и за двете равенки е единствено. Броевите a, b и c се ненулти и меѓусебно различни реални броеви. Определи ги a, b и c .

Решение. Од првата равенка ја добиваме квадратната равенка $ax^2 + (b-c)x - (b-c) = 0$ која има единствено решение ако дискриминантата и е еднаква на нула т.е. $(b-c)^2 + 4a(b-c) = 0$, па оттука добиваме $(b-c)(b-c+4a) = 0$... (5 п.).

Бидејќи $b \neq c$ следува $b-c = -4a$... (2 п.). Го заменуваме овој услов во квадратната равенка и добиваме еквивалентна равенка $ax^2 - 4ax + 4a = 0$, а бидејќи $a \neq 0$, последната е еквивалентна со равенката $x^2 - 4x + 4 = 0$ чие што решение е $x = 2$... (3 п.). Втората равенка од условот е еквивалентна со $(cx+b)(cx+a-1) = 0$ и притоа јасно $x \neq -\frac{a}{c}$... (5 п.). Таа

има единствено решение, па затоа $x = -\frac{b}{c} = -\frac{a-1}{c}$ и, јасно, од условот во задачата $x = -\frac{b}{c} = -\frac{a-1}{c} = 2$... (3 п.). Имаме,

$b = a-1$ па тогаш $c = b+4a = 5a-1$... (2 п.). Заменуваме во $-\frac{a-1}{c} = 2$ и добиваме дека $a = \frac{3}{11}$. Оттука $b = -\frac{8}{11}$ и

$c = \frac{4}{11}$ и притоа $-\frac{a}{c} \neq 2$. Значи $a = \frac{3}{11}, b = -\frac{8}{11}, c = \frac{4}{11}$ е бараното решение ... (5 п.).

4АБ. Одреди ги сите реални броеви x, y, z за кои важи:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 = \frac{31}{xy} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 1 = \frac{-9}{yz} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{-5}{zx} \end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} xy + x + y = 31 \\ yz + y + z = -9 \\ zx + z + x = -5 \end{cases}$, при што $x, y, z \neq 0 \dots$ (4 п.). Во секоја од

равенките додаваме 1 во двете страни и добиваме нов систем:

$$\begin{cases} xy + x + y + 1 = 32 \\ yz + y + z + 1 = -8 \dots (5 \text{ п.}) \\ zx + z + x + 1 = -4 \end{cases}$$

Со факторизирање на левата страна, добиваме:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 32 \\ (y+1)(z+1) = -8 \dots (4 \text{ п.}) \\ (z+1)(x+1) = -4 \end{cases}$$

Со множење на сите три равенки се добива $((x+1)(y+1)(z+1))^2 = 1024$, од каде што ги добиваме следните две можности $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$ и $(x+1)(y+1)(z+1) = -32 \dots$ (4 п.).

Прв случај: Ако $(x+1)(y+1)(z+1) = 32$, тогаш со делење на оваа равенка со првата равенка во почетниот систем $(x+1)(y+1) = 32$, се добива $z+1 = 1$, односно $z = 0$. Согласно условите во задачата, ова не е решение на дадениот систем ... (3 п.).

Втор случај: Ако $(x+1)(y+1)(z+1) = -32$ тогаш со делење на оваа равенка со првата равенка во почетниот систем $(x+1)(y+1) = 32$, се добива $z+1 = -1$, односно $z = -2$. Тогаш од втората и третата равенка $y = 7, x = 3 \dots$ (3 п.). Значи, решение на системот е $x = 3, y = 7, z = -2 \dots$ (2 п.).

Трета година

1АБ. (Сигма 136, Рубрика задачи, Задача 1855)

Во множеството на реалните броеви реши ја неравенката

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{2024} \cdot \log_x 2^{2025}} \leq 2024 \cdot \log_2 x.$$

Решение. Од дефиниционата област на логаритамската функција имаме дека $x > 0$ и $x \neq 1 \dots$ (4 п.).

Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_x 2 \cdot 2 \log_x 2} + \frac{1}{2 \log_x 2 \cdot 3 \log_x 2} + \dots + \frac{1}{2024 \log_x 2 \cdot 2025 \log_x 2} \leq 2024 \cdot \log_2 x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} \right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq 2024 \log_2 x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2025-2024}{2024 \cdot 2025} \right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq 2024 \log_2 x \Leftrightarrow \dots (7 \text{ п.}) \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2025}{2024 \cdot 2025} - \frac{2024}{2024 \cdot 2025} \right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq 2024 \log_2 x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025} \right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq 2024 \log_2 x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2025} \right) \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq 2024 \log_2 x \Leftrightarrow \frac{2024}{2025} \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq 2024 \log_2 x \Leftrightarrow \frac{1}{2025} \cdot \frac{1}{\log_x^2 2} \leq \log_2 x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2025} \cdot \log_2^2 x \leq \log_2 x \Leftrightarrow \log_2^2 x \leq 2025 \log_2 x \dots (7 \text{ п.})$$

Со воведување на смената $\log_2 x = y$, последната неравенка се сведува на квадратна неравенка $y^2 - 2025y \leq 0$. Нулите на соодветната квадратна функција $f(y) = y^2 - 2025y$ се $y_1 = 0$ и $y_2 = 2025$, па така добиваме дека $0 \leq y \leq 2025$, односно $0 \leq \log_2 x \leq 2025 \dots (4 \text{ п.})$. На тој начин добиваме дека $\log_2 2^0 \leq \log_2 x \leq \log_2 2^{2025}$, од каде добиваме дека $1 \leq x \leq 2^{2025}$. Но, од дефиниционата област имаме дека $x \neq 1$ од каде следува дека решенија на дадената неравенка се $1 < x \leq 2^{2025} \dots (3 \text{ п.})$.

2АБ. (Сигма 138, Рубрика задачи, Задача 1882)

Основниот раб на правилна тристрана пирамида е со должина x , а бочниот ѕид зафаќа со рамнината на основата агол од 60° . Определи го x , ако плоштината на пирамидата е еднаква со волуменот на пирамидата.

Решение. Нека $\overline{OM} = r$ е радиусот на впишаната кружница на основата (рамностран триаголник), $\overline{OV} = H$ е висината на пирамидата со врв V , $\overline{MV} = h$ е апотемата на бочниот ѕид на пирамидата (види цртеж). Од правоаголникот триаголник OMV со остри агли $30^\circ, 60^\circ$ имаме дека $h = 2r \dots (4 \text{ п.})$. Од друга страна, радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ е $r = \frac{x\sqrt{3}}{6} \dots (4 \text{ п.})$. Значи, $h = 2r = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Користејќи ја дефиницијата за синус добиваме дека $\sin 60^\circ = \frac{\overline{OV}}{\overline{MV}} = \frac{H}{h} \dots (3 \text{ п.})$.

Така добиваме дека

$$H = h \cdot \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} \dots (3 \text{ п.})$$

За плоштината на пирамидата добиваме дека

$$P = B + M = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{x \cdot h}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3x}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 \dots (4 \text{ п.})$$

За волуменот на пирамидата добиваме

$$V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24} x^3 \dots (4 \text{ п.})$$

Од еднаквоста на плоштината и волуменот на пирамидата според условот на задачата имаме дека

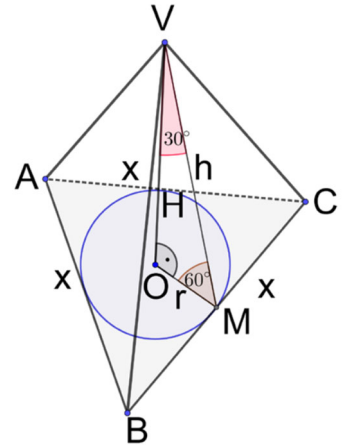
$$P = V \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{24} x^3 \Leftrightarrow 3 = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = 18 \dots (3 \text{ п.})$$

3А4Б. Определи за кое $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, изразот $A = \operatorname{tg} x + \frac{1 + \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}^4 x}{1 + \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x} + \operatorname{ctg} x + \frac{1 + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{1 + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x}$

достигнува минималната вредност.

Решение. Дадениот израз го трансформираме во облик

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1 + \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} + 1 + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}}{1 + \sin x \cdot \cos x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^6 x + \sin^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} = \\ &= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)}{\sin^2 x \cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} = \\ &= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} = \\ &= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} = \\ &= \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \frac{(1 - \sin x \cos x)(1 + \sin x \cos x)}{\sin^2 x \cos^2 x (1 + \sin x \cos x)} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1 - \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin x \cos x + 1 - \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \dots (10 \text{ п.}) \end{aligned}$$



Последниот израз можеме да го трансформираме во облик

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= \operatorname{tg}^2 x - 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 4 = \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)^2 + 4 \dots \textbf{(10 п.)}.\end{aligned}$$

Според тоа, минималната вредност се достигнува ако $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$, односно кога $\operatorname{tg}^2 x = 1$. За $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, $\operatorname{tg} x < 0$, па

добиваме дека $x = \frac{3\pi}{4}$, односно за $x = \frac{3\pi}{4}$ дадениот израз достигнува минимална вредност и таа е еднаква на 4... **(5 п.)**

3Б. Определи ги сите можни вредности на реалниот параметар a , за кои равенката $x^4 - (5a+6)x^2 + 4a^2 + 6a = 0$ има точно две реални решенија?

Решение. Воведуваме смена $y = x^2$. Тогаш, дадената равенка преминува во квадратна равенка од облик $y^2 - (5a+6)y + 4a^2 + 6a = 0$... **(4 п.)**. За квадратната равенка по y , дискриминантата е еднаква на

$$D = (5a+6)^2 - 4(4a^2 + 6a) = 25a^2 + 60a + 36 - 16a^2 - 24a = 9a^2 + 36a + 36 = 9(a+2)^2 \dots \textbf{(6 п.)}.$$

Ако $D = 0$, тогаш $a = -2$. Па, $y = \frac{5a+6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$, од каде следува дека почетната равенка нема реални решенија.

Според тоа, вредноста на параметарот $a = -2$ не ги задоволува условите на задачата... **(6 п.)**.

Ако $D > 0$, $a \neq -2$, па добиваме дека $y_{1,2} = \frac{5a+6 \pm 3|a+2|}{2}$, односно $y_1 = a$ и $y_2 = 4a+6$. Од тоа што $y = x^2$ и се бара равенката да има точно две реални решенија, тие мора да се со спротивни знаци. Според тоа, треба да важи $y_1 \cdot y_2 < 0$, односно $a(4a+6) < 0$. Со решавање на квадратната неравенка $4a^2 + 6a < 0$, добиваме дека $a \in \left(-\frac{3}{2}, 0 \right)$.

Конечно, добиваме дека почетната равенка има точно два реални корени за $a \in \left(-\frac{3}{2}, 0 \right)$... **(9 п.)**.

4А. Нека ABC е рамностран триаголник со должина на страна 1. Точките X и Y се избрани на полуправите AB и AC соодветно, така што должините на отсечките AX и AY се природни броеви. Дали може радиусот на опишаната кружница на $\triangle AXY$ да е еднаков на $\sqrt{2026}$? Образложи го одговорот.

Решение. Да претпоставиме дека постои избор на точките X и Y што го задоволуваат условот на задачата, така што радиусот на опишаната кружница со центар O (види цртеж) околу $\triangle AXY$ е $\sqrt{2026}$. Нека E е подножје на висината во триаголникот OXY повлечена од точката O . Бидејќи $\angle XAY = 60^\circ$, $\angle XOY = 120^\circ$, како централен агол и уште повеќе бидејќи $\triangle XOY$ е рамнокрак, $\angle YOE = \angle XOE = 60^\circ$... **(7 п.)**.

Значи, $\overline{YE} = \overline{XE} = \frac{1}{2}\overline{XY} = \overline{OY} \sin 60^\circ = \sqrt{2026} \frac{\sqrt{3}}{2}$, па $\overline{XY} = \sqrt{2026} \cdot \sqrt{3}$... **(3 п.)**. Нека $\overline{AX} = m$, $\overline{AY} = n$, каде m, n се природни броеви. Од косинусната теорема за $\triangle AXY$

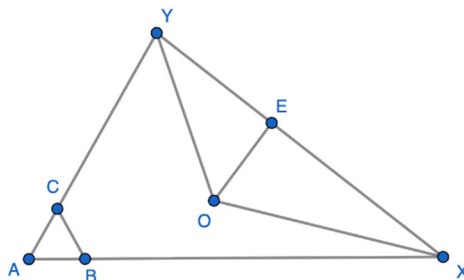
$$\overline{XY}^2 = m^2 + n^2 - 2\cos 60^\circ \cdot mn = m^2 + n^2 - mn,$$

односно

$$m^2 + n^2 - mn = 2026 \cdot 3 \dots \textbf{(8 п.)}.$$

Десната страна на равенката е парен број, па мора и левата. Ако m, n се со различна парност или двата се непарни тогаш $m^2 + n^2 - mn$ е непарен број, па останува m, n да се парни... **(4 п.)**. Тогаш, 4 е делител $m^2 + n^2 - mn$, а не е делител $2026 \cdot 3$, што е контрадикција.

Значи, не е можно радиусот на опишаната кружница на $\triangle AXY$ да биде еднаков на $\sqrt{2026}$... **(3 п.)**.



1А. (Сигма 134, Задача 1828 од Рубрика Задачи)

Броевите $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменуваат со нивниот збир и нивниот производ. За новите броеви $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се применува истата операција итн. Докажи дека во секој чекор добиените броеви се помали од $\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1 = b_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$, за $n \geq 1$. Со индукција ќе докажеме дека $a_n < \frac{12}{25}$ и

$$b_n \leq \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}}, \text{ за } n \geq 2 \dots (10 \text{ п.}).$$

Притоа, да забележиме дека во тој случај $\frac{12}{25}, \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}} < \frac{1}{2}$.

Јасно, за $n = 2$ тврдењето важи... (2 п.). Да претпоставиме дека тврдењето важи за некое $n > 2$. Тогаш:

$$a_{n+1} = a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + b_n = \dots = a_2 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25} \quad (8 \text{ п.}).$$

$$b_{n+1} = a_n b_n < \frac{b_n}{2} = \frac{1}{25 \cdot 2^{n-1}} \dots (5 \text{ п.}),$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

1Б. (Сигма 138, задача од училища, 4 година)

Нека $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$, за $n \in \mathbb{N}$. Пресметај го збирот на првите 1000 членови на низата.

Решение. Со рационализација на именителот на општиот член на низата a_n , се добива

$$a_n = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \dots (15 \text{ п.}).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{999} + a_{1000} &= \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{999}} - \frac{1}{\sqrt{1000}} + \frac{1}{\sqrt{1000}} - \frac{1}{\sqrt{1001}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1001}} \dots (10 \text{ п.}). \end{aligned}$$

2Б. На еден кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и секоја екипа одиграла по еден натпревар со секоја друга екипа. За победа се добиваат 2 поени, а поразената екипа добива 0 поени (нема нерешени натпревари). Екипите го завршиле турнирот со следниот број поени: 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2. Колку вкупно натпревари, последните четири екипи изгубиле од првите четири екипи на турнирот?

Решение. Последните четири екипи одиграле меѓусебно $\binom{4}{2} = 6$ натпревари ... (2 п.) и на нив се освоени вкупно $6 \cdot 2 = 12$

поени ... (3 п.). Секој од овие поени припаднал на една од последните четири екипи. Бидејќи според резултатите тие вкупно освоиле $6 + 4 + 2 + 2 = 14$ поени, следува дека тие во натпреварите против првите четири екипи освоиле $14 - 12 = 2$ поени ... (7 п.), т.е. последните четири екипи ги победиле првите четири екипи само во еден натпревар, односно изгубиле во останатите $4 \cdot 4 - 1 = 15$ натпревари ... (8 п.) (вкупниот број натпревари кои последните четири екипи ги одиграле против првите четири екипи е $4 \cdot 4 = 16$) ... (5 п.).

2А3Б. (Сигма 136, Рубрика задачи, задача 1850)

Нека a, b и c се позитивни реални броеви така што $abc \geq 1$. Докажи дека $\frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a} \leq a+b+c$.

Решение. Ќе го докажеме еквивалентното неравенство

$$\begin{aligned} a+b+c - \left(\frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a} \right) &\geq 0, \\ (1+a) + (1+b) + (1+c) - \left(\frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a} \right) &\geq 3, \text{ т.е.} \\ (1+a) - \frac{1+a}{1+b} + (1+b) - \frac{1+b}{1+c} + (1+c) - \frac{1+c}{1+a} &\geq 3. \dots (5 \text{ п.}) \end{aligned}$$

За собироците од левата страна на неравенството имаме дека

$$(1+a) - \frac{1+a}{1+b} = (1+a) \left(1 - \frac{1}{1+b} \right) = (1+a) \frac{1+b-1}{1+b} = \frac{b(1+a)}{1+b},$$

и аналогно

$$(1+b) - \frac{1+b}{1+c} = \frac{c(1+b)}{1+c}$$

$$(1+c) - \frac{1+c}{1+a} = \frac{a(1+c)}{1+a} \dots (8 \text{ п.})$$

Неравенството што треба да го докажеме сега гласи

$$\frac{b(1+a)}{1+b} + \frac{c(1+b)}{1+c} + \frac{a(1+c)}{1+a} \geq 3. \dots (2 \text{ п.})$$

Со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометричка средина следува дека

$$\frac{b(1+a)}{1+b} + \frac{c(1+b)}{1+c} + \frac{a(1+c)}{1+a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{b(1+a)}{1+b} \cdot \frac{c(1+b)}{1+c} \cdot \frac{a(1+c)}{1+a}} = 3 \sqrt[3]{abc} \geq 3 \cdot 1 = 3. \dots (8 \text{ п.})$$

Знакот за еднаквост важи ако и само ако $a = b = c = 1 \dots (2 \text{ п.})$.

3A4Б. Конечен број на реални броеви се распоредени во круг, при што секој од броевите е обоен во бело, зелено или црно. Секој број обоен во бело е еднаков на збирот од неговите два соседни броја, секој зелен број е два пати поголем од збирот на неговите два соседни броја, а секој црн број е два пати помал од збирот на неговите два соседни броја. Ако $B \neq 0$ е збирот на сите бели броеви и $Z \neq 0$ е збирот на сите зелени броеви, определи го количникот $\frac{B}{Z}$.

Решение. Да го означиме со C збирот на сите црни броеви и зададените броеви со $x_1, x_2, \dots, x_n$. Бидејќи броевите се наредени во круг, ќе забележиме дека x_1 и x_n се соседни броеви, па може да сметаме дека $x_{n+1} = x_1$ и $x_{-1} = x_n \dots (3 \text{ п.})$.

Од условите на задачата имаме:

- Ако x_i е бел број, тогаш $x_{i-1} + x_{i+1} = x_i$;
- Ако x_i е зелен број, тогаш $x_{i-1} + x_{i+1} = \frac{1}{2} x_i$;
- Ако x_i е црн број, тогаш $x_{i-1} + x_{i+1} = 2x_i \dots (7 \text{ п.})$.

Собирајќи ги сите равенства за $i = 1, 2, \dots, n$, добиваме дека:

$$\sum_{i=1}^n x_{i-1} + \sum_{i=1}^n x_{i+1} = B + \frac{Z}{2} + 2C \dots (7 \text{ п.})$$

односно:

$$2(B + Z + C) = B + \frac{Z}{2} + 2C \dots (3 \text{ п.})$$

Од тука следи дека $B = -\frac{3}{2}Z$, односно $\frac{B}{Z} = -\frac{3}{2} \dots (5 \text{ п.})$

4А. Одреди ја максималната вредност на функцијата $f(x) = |x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)|$, за $x \in [2, 3]$.

Решение. Од $x \in [2, 3]$ следува дека

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(3-x)(4-x)(5-x). \dots (4 \text{ п.})$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометричката средина имаме

$$\frac{x+(5-x)}{2} \geq \sqrt{x(5-x)}, \text{ т.е. } x(5-x) \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2 \dots (8 \text{ п.})$$

Слично добиваме дека важи

$$(x-1)(4-x) \leq \left(\frac{(x-1)+(4-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ и } (x-2)(3-x) \leq \left(\frac{(x-2)+(3-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots (4 \text{ п.})$$

Равенство во сите случаи важи за $x = \frac{5}{2} \in [2, 3]$ (Равенките $x = 5 - x, x - 1 = 4 - x$ и $x - 2 = 3 - x$ се еквивалентни). (5 п.).

Тогаш, $\max\{f(x) | x \in [2, 3]\} = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{225}{64} \dots (4 \text{ п.})$