



**РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД
ОПШТИНСКИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
30.1.2026 година**

Важна напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.

Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.

Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IV ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 51-1, Конкурсни задачи, 4 одделение, задача 4355) Еден зимски ден, во Скопје за прв пат во 5:25 часот наутро измерена е температура -10°C . На секои два часа температурата се зголемува за $1,5^{\circ}\text{C}$. Во колку часот за прв пат температурата ќе изнесува -4°C ?

Решение. Прв начин: Температурата во 5:25 часот е -10°C . За да достигне -4°C , треба да се зголеми за: $-4^{\circ}\text{C} - (-10^{\circ}\text{C}) = 6^{\circ}\text{C}$ (**10 поени**). Секое зголемување од $1,5^{\circ}\text{C}$ се случува на секои 2 часа, односно секое зголемување на температурата за 3°C се случува на секои 4 часа (**5 поени**). Значи, за температурата да се зголеми за 6°C ни се потребни $2 \cdot 4 = 8$ часа (**5 поени**). Следува, за прв пат температурата ќе биде -4°C во 13:25 часот (**5 поени**).

Втор начин: Бидејќи со секои изминати два часа температурата се зголемува за $1,5^{\circ}\text{C}$, зголемувањето на температурата ќе се одвива како во следната табела:

Време	5:25 ч	7:25 ч	9:25 ч	11:25 ч	13:25 ч
Температура	-10°C	$-8,5^{\circ}\text{C}$	-7°C	$-5,5^{\circ}\text{C}$	-4°C

Бодување: За секоја точно пополнета колона се добиваат **по 5 поени**.

2. Томе пробува да отклучи една фиока. На фиоката стои ознаката



така што секоја фигура означува одреден број, а до неа има писмо за дешифрирање:

	+		=	16		
	-		=			
	+		+		=	17

Најди кој број одговара на секоја фигура според писмото за дешифрирање и помогни му на Томе да ја отклучи фиоката.

Решение. Од првата редица имаме дека крукчето е $16 : 2 = 8$ (**5 поени**). Од втората редица следи дека кругот е еднаков на збирот на два триаголници, односно два триаголници се 8, што значи еден триаголник е 4 (**10 поени**). Од збирот во третата редица $8 + 4 + \text{свезда} = 17$ имаме дека свездата е 5 (**10 поени**). Шифрата е 485.

3. (Нумерус 51-1, Конкурсни задачи, 4 одделение, задача 4356) Дедо Цане тргнал на пазар со 630 денари. Од таа сума $\frac{1}{3}$ потрошил за да купи грозје. Со $\frac{1}{4}$ од останатите пари купил сливи, а со $\frac{1}{3}$ од преостанатите пари купил компири. Колку пари му останале на дедо Цане после купувањето на компирите?

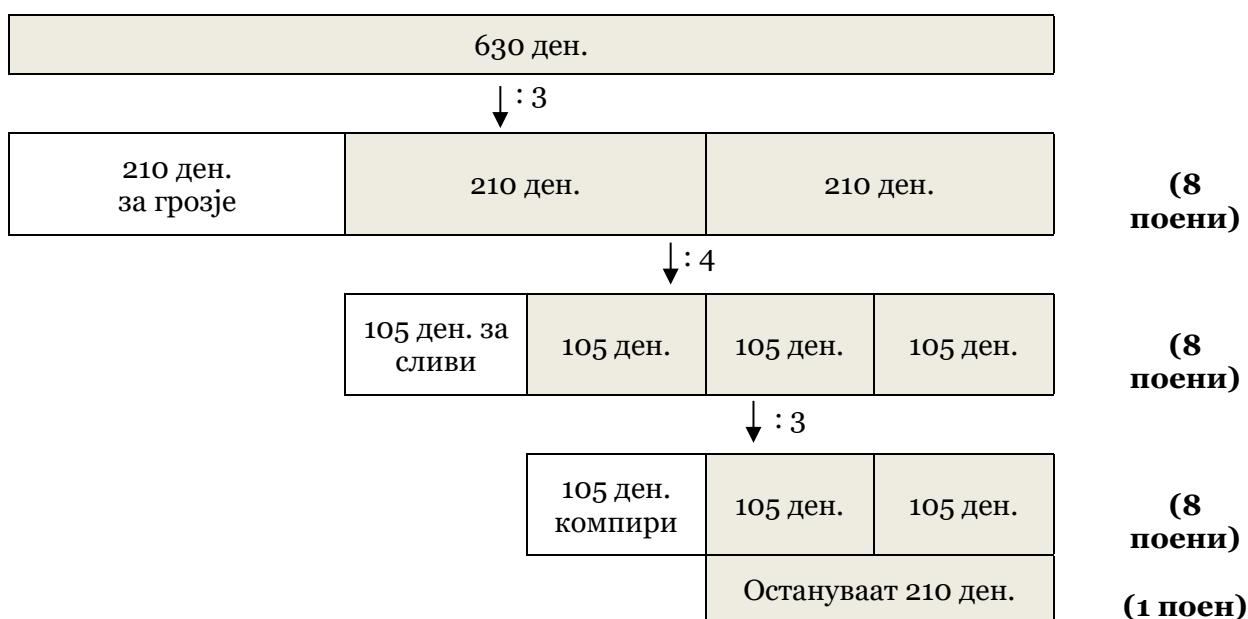
Решение. Прв начин: За купување грозје потрошил $\frac{1}{3} \cdot 630 = 210$ денари (**6 поени**). Му останале

$630 - 210 = 420$ денари (**2 поени**) пред да купи сливи. За сливите платил $\frac{1}{4} \cdot 420 = 105$ денари (**6**

поени). Му останале $420 - 105 = 315$ денари **(2 поени)**. Со $\frac{1}{3}$ од преостанати пари купил компир и за тоа потрошил $\frac{1}{3} \cdot 315 = 105$ денари **(6 поени)**. На крај, на дедо Цане му останале $315 - 105 = 210$ денари **(3 поени)**.

Втор начин: После првото купување на дедо Цане му останале $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ од парите што ги носел **(2 поени)**, односно $\frac{2}{3} \cdot 630 = 420$ ден. **(6 поени)**. После второто купување на дедо Цане му останале $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ од останатите 420 ден. **(2 поени)**, односно $\frac{3}{4} \cdot 420 = 315$ ден. **(6 поени)**, а после третото купување на дедо Цане му останале $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ од преостанатите 315 ден. **(2 поени)**, односно $\frac{2}{3} \cdot 315 = 210$ ден. **(7 поени)**.

Трет начин: Решавање со помош на дијаграм или скица.



4. Дедо Мраз се движи над покривите на куќите во улицата на едно село и ги спушта подароците низ оџаците. Со секој свој чекор поминува 75 cm. Растојанието меѓу оџакот на првата и оџакот на втората куќа изнесува 9 m. Растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа е за 1,5 m поголемо отколку растојанието меѓу оџаците на првите две куќи. Растојанието меѓу оџаците на третата и на четвртата куќа е за 1,5 m поголемо отколку растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа. Колку чекори треба да направи Дедо Мраз за да стигне од оџакот на првата до оџакот на четвртата куќа?

Решение. Прв начин: Го претвораме растојанието меѓу оџаците на првите две куќи во сантиметри: 9 m = 900 cm. **(2 поени)** Со еден чекор Дедо Мраз поминува 75 cm. Оттука, бројот на чекори меѓу оџаците на првите две куќи е $900 : 75 = 12$ чекори **(5 поени)**. Бидејќи $1,5 \text{ m} : 75 \text{ cm} = 150 \text{ cm} : 75 \text{ cm} = 2$ чекори **(5 поени)**, растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа е за 2 чекори поголемо од растојанието меѓу оџаците на првите две куќи и тоа е $12 + 2 = 14$ чекори **(5 поени)**. Растојанието меѓу оџаците на третата и на четвртата куќа е за 2 чекори поголемо од растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа и тоа е $14 + 2 = 16$ чекори **(5 поени)**. За да стигне од оџакот на првата куќа до оџакот на третата куќа Дедо Мраз треба да направи вкупно $12 + 14 + 16 = 42$ чекори **(3 поени)**.

Втор начин: Растојанието меѓу оџаците на првите две куќи е 9 m = 900 cm **(2 поени)**. Бидејќи $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$ **(2 поени)**, растојанието меѓу оџаците на втората и на третата куќа е

$$900 \text{ cm} + 150 \text{ cm} = 1050 \text{ cm} \text{ (5 поени),}$$

а растојанието меѓу оџаците на третата и на четвртата куќа е

$$1050 \text{ cm} + 150 \text{ cm} = 1200 \text{ cm} \text{ (5 поени).}$$

Вкупното растојание што треба да го помине Дедо Мраз е

$$900 \text{ cm} + 1050 \text{ cm} + 1200 \text{ cm} = 3150 \text{ cm} \text{ (5 поени).}$$

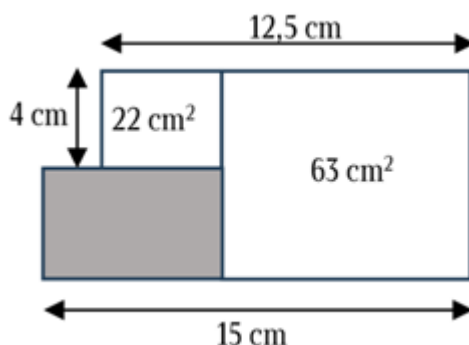
Со еден чекор Дедо Мраз поминува 75 cm. Оттука, бројот на чекори што треба да ги направи Дедо Мраз е $3150 \text{ cm} : 75 \text{ cm} = 42$ чекори **(6 поени)**.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА V ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 50-3, Конкурсни задачи, 6 одделение, задача 4275) Дедо Петре засадил во дворот црвен бор висок 96 cm. Секои 3 месеци, овој вид бор пораснува 4 dm. Колку метри ќе биде висок борот на дедо Петре по 7 години?

Решение. Борот е висок 96 cm = 0,96 m **(2 поени)**. За една година (4 пати по 3 месеци) тој ќе порасне $4 \cdot 4 \text{ dm} = 16 \text{ dm}$ **(8 поени)**, што е еднакво на 1,6 m **(2 поени)**. За 7 години борот ќе порасне $7 \cdot 1,6 \text{ m} = 11,2 \text{ m}$ **(8 поени)**. По 7 години борот на дедо Петре ќе биде висок $0,96 \text{ m} + 11,2 \text{ m} = 12,16 \text{ m}$ **(5 поени)**.

2. (Нумерус 50-2, Конкурсни задачи, 6 одделение, задача 4230) Определи ја плоштината на затемнетиот дел од фигурата прикажана на сликата. Броевите во правоаголниците се нивните плоштини.



Решение. Прв начин. Правоаголникот чијашто плоштина е 22 cm^2 има ширина 4 cm, па неговата должина ќе биде $22 : 4 = 5,5 \text{ cm}$ **(6 поени)**.

Должината на правоаголникот со плоштина 63 cm^2 е $12,5 - 5,5 = 7 \text{ cm}$ **(5 поени)**, па за неговата ширина добиваме $63 : 7 = 9 \text{ cm}$ **(4 поени)**. Темниот правоаголник има ширина $9 - 4 = 5 \text{ cm}$ **(3 поени)**.

Неговата должина е $15 - 7 = 8 \text{ cm}$ **(3 поени)**. Бараната плоштина ќе биде $8 \cdot 5 = 40 \text{ cm}^2$ **(4 поени)**.

Втор начин. Должината на темниот правоаголник може да се определи и ако се воочи дека таа е за $15 - 12,5 = 2,5 \text{ cm}$ поголема од должината на правоаголникот со плоштина 22 cm^2 , односно таа е $5,5 + 2,5 = 8 \text{ cm}$.

3. Еден шестцифрен број исто се чита и одлево надесно, и оддесно налево. Првата цифра одлево е за 1 поголема од втората цифра, а втората цифра е за 1 поголема од третата. Збирот на цифрите на шестцифрениот број е 24. Кој е тој шестцифрен број?

Решение. Прв начин: Бидејќи шестцифрениот број исто се чита и одлево надесно, и оддесно налево, првата и шестата цифра се исти, втората и петтата цифра се исти, третата и четвртата цифра се исти. **(3 поени)** Бидејќи збирот на сите шест цифри е 24, тоа значи дека збирот на првите три цифри (како и збирот на последните три цифри) е половина од 24, односно 12. **(7 поени)** Бидејќи првата цифра е за 1 поголема од втората цифра, а втората е за 1 поголема од третата цифра, бараме три последователни броеви чиј збир е 12 **(6 поени)**. Тоа се броевите: 3, 4 и 5. **(6 поени)**

Оттука, бараниот број е бројот 543345. **(3 поени)**

Втор начин: Нека $\overline{abcbsa}$ е шестцифрен број којшто исто се чита и одлево надесно и оддесно налево **(3 поени)**. Тогаш

$$a + b + c + c + b + a = 24 \text{ (3 поени)}$$

$$2(a + b + c) = 24 \text{ (2 поени)}$$

$$a + b + c = 12 \text{ (2 поени)}$$

Ако со x ја означиме третата цифра во бројот, тогаш имаме:

$$c = x, b = x + 1, a = x + 2 \text{ (3 поени)}$$

Се добива $(x + 2) + (x + 1) + x = 12$ **(3 поени)**. Оттука, $3x + 3 = 12$ **(3 поени)**, па $x = 3$ **(3 поени)**.

Значи бараниот број е бројот 543345 **(3 поени)**.

Трет начин: Ги испитуваме сите можности.

За секоја наведена можност се доделуваат **по 3 поени (вк. 24 поени)**.

Цифра на СИ	Цифра на ДИ	Цифра на И	Цифра на С	Цифра на Д	Цифра на Е	Збир на сите цифри
2	1	0	0	1	2	6
3	2	1	1	2	3	12
4	3	2	2	3	4	18
5	4	3	3	4	5	24
6	5	4	4	5	6	30
7	6	5	5	6	7	36
8	7	6	6	7	8	42
9	8	7	7	8	9	48

Единствениот број што ги исполнува условите на задачата е бројот 543345 **(1 поен)**.

4. Во пет училници се наоѓаат вкупно 200 ученици. Во првата и втората училница заедно има 80 ученици, во втората и третата има 75 ученици, во третата и четвртата има 55 ученици, а во четвртата и петтата има 90 ученици. Колку ученици има во секоја училница одделно?

Решение.

Прв начин: Во првите четири училници има вкупно $80 + 75 = 135$ ученици **(10 поени)**, па во петтата има $200 - 135 = 65$ ученици **(7 поени)**.

Бидејќи во четвртата и петтата училница заедно има 90 ученици, следи дека во четвртата училница има $90 - 65 = 25$ ученици **(2 поени)**.

Бидејќи во третата и четвртата училница заедно има 55 ученици, следи дека во третата училница има $55 - 25 = 30$ ученици **(2 поени)**.

Бидејќи во втората и третата училница заедно има 75 ученици, следи дека во втората училница има $75 - 30 = 45$ ученици **(2 поени)**.

Бидејќи во првата и втората училница заедно има 80 ученици, следи дека во првата училница има $80 - 45 = 35$ ученици **(2 поени)**.

Втор начин. Нека бројот на ученици во секоја од петте училници го означуваме со А, В, С, D и Е, соодветно. Вкупниот број на ученици е 200, па $A + B + C + D + E = 200$ **(1 поен)**. Од условот на задачата имаме:

$$A + B = 80, B + C = 75, C + D = 55 \text{ и } D + E = 90$$

(по 1 поен за секој збир, вк. 4 поени).

Со собирање на првата и на третата равенка добиваме колку вкупно ученици има во првите четири училници:

$$(A + B) + (C + D) = 80 + 55 = 135 \text{ (10 поени).}$$

Во петтата училница има $E = 200 - (A + B + C + D) = 200 - 135 = 65$ ученици **(6 поени)**.

Следствено, бројот на ученици во останатите училници е:

$$D = 90 - 65 = 25, C = 55 - 25 = 30, B = 75 - 30 = 45, A = 80 - 45 = 35.$$

(по 1 поен за секој точно пресметан број, вк. 4 поени).

Трет начин. Нека бројот на ученици во секоја од петте училници го означуваме со А, В, С, D и Е, соодветно. Вкупниот број на ученици е 200, па $A + B + C + D + E = 200$ **(1 поен)**. Од условот на задачата имаме:

$$A + B = 80, B + C = 75, C + D = 55 \text{ и } D + E = 90$$

(по 1 поен за секој збир, вк. 4 поени).

Со собирање на сите четири зборови, добиваме:

$$80 + 75 + 55 + 90 = (A + B) + (B + C) + (C + D) + (D + E) \text{ (5 поени)}.$$

Имајќи предвид дека вкупниот број на ученици е $200 = A + B + C + D + E$, со групирање добиваме:

$$300 = (A + B + C + D + E) + (B + C) + D \text{ (5 поени)}.$$

Со замена добиваме: $300 = 200 + 75 + D \text{ (5 поени)}$, па добиваме дека $D = 25 \text{ (1 поен)}$.

Оттука се добива бројот на ученици во останатите училници:

$$E = 90 - 25 = 65, C = 55 - 25 = 30, B = 75 - 30 = 45, A = 80 - 45 = 35.$$

(по 1 поен за секој точно пресметан број, вк. 4 поени).

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 49-3, Конкурсни задачи, 6 одделение, задача 4117) Во две продавници за овошје имало вкупно 365 килограми јаболка, кои се продавале по иста цена за килограм. Првата продавница продала одредена количина јаболка за 1240 денари, а втората продавница продала одредена количина јаболка за 2500 денари. После продажбата, во првата продавница останале 102 килограми, а во втората продавница останале 76 килограми јаболка. По колку килограми јаболка имало во секоја од продавниците на почетокот?

Решение. Двете продавници продале вкупно $365 - (102 + 76) = 365 - 178 = 187$ килограми јаболка. **(5 поени)** Овие 187 килограми јаболка биле продадени за $1240 + 2500 = 3740$ денари **(5 поени)**, па цената на еден килограм јаболка е $3740 : 187 = 20$ денари **(5 поени)**.

Првата продавница продала $1240 : 20 = 62$ килограми јаболка **(3 поени)**, па на почетокот во неа имало $62 + 102 = 164$ килограми јаболка. **(2 поени)** Во втората продавница на почетокот имало $2500 : 20 + 76 = 125 + 76 = 201$ килограм јаболка. **(5 поени)**

2. Збирот на периметрите на еден триаголник, еден квадрат и еден правоаголник е 141 cm. Периметарот на триаголникот е за 45 cm поголем од периметарот на квадратот, а периметарот на правоаголникот е за 60% помал од периметарот на квадратот. Пресметај ги периметарот и плоштината на квадратот.

Решение. Нека периметарот на квадратот го означиме со L . Тогаш периметарот на триаголникот е $L + 45 \text{ (3 поени)}$, а периметарот на правоаголникот е $(1 - 0,6)L = 0,4L \text{ (3 поени)}$

Од условот на задачата следува $L + L + 45 + 0,4L = 141 \text{ (4 поени)}$, од каде добиваме $2,4L = 141 - 45$. Според тоа, $2,4L = 96$, па $L = 96 : 2,4 = 40 \text{ cm. (7 поени)}$

Тогаш страната на квадратот е $a = 40 : 4 = 10 \text{ cm (4 поени)}$, па неговата плоштина е $P = a^2 = 100 \text{ cm}^2 \text{ (4 поени)}$

3. (Нумерус 51-1, Конкурсни задачи, 6 одделение, задача 4367) Нека P е средишна точка на отсечката AB . На симетралата S_{AB} на отсечката AB е избрана точка C таква што $\overline{AC} = \overline{BC}$. Нека средината на отсечката AC е точката M и нека пресечната точка на отсечката MB со симетралата S_{AB} е точката Q . Определи ја големината на $\angle PQB$.

Решение. Прв начин: Од тоа што C лежи на S_{AB} имаме $\overline{AC} = \overline{BC}$. **(3 поени)**

Оттука и од $\overline{AC} = \overline{BC}$, добиваме дека $\triangle ABC$ е рамнострани. **(2 поени)**

Бидејќи M е средишна точка на AC и $\overline{AC} = \overline{BC}$, заклучуваме дека MB е симетрала на AC . Оттука, $\angle AMB = 90^\circ$. **(5 поени)**

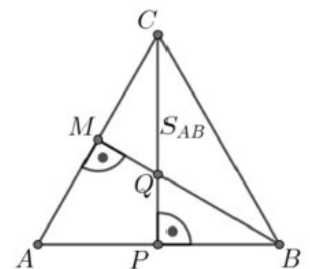
Бидејќи $\triangle ABC$ е рамнострани имаме $\angle BAM = 60^\circ \text{ (5 поени)}$, па

$$\angle QBP = \angle MBA = 180^\circ - \angle BAM - \angle AMB = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ. \text{ (5 поени)}$$

Конечно, од фактот дека S_{AB} е симетрала на отсечката AB , имаме $\angle BPQ = 90^\circ$, па

$$\angle PQB = 180^\circ - \angle BPQ - \angle QBP = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ. \text{ (5 поени)}$$

Втор начин: Големината на аголот $\angle QBP = \angle MBA = 30^\circ$ може да се определи и од фактот дека $\triangle ABC$ е рамнострани, па симетралата MB на страната AC е и симетрала на $\angle ABC$.



4. Аритметичката средина на растојанијата од домовите на Никола, Ѓорѓи и Анета до нивното училиште е 2026 m. По неколку години, тројцата ученици се преселиле во нови домови. Новиот дом на Никола се наоѓа 1002 dm подалеку од училиштето во однос на неговиот стар дом, новиот дом на Ѓорѓи е 2075 cm поблиску до училиштето во однос на неговиот стар дом, и новиот дом на Анета е 4945 cm поблиску до училиштето во однос на нејзиниот стар дом. Пресметај ја аритметичката средина на растојанијата од новите домови на тројцата ученици до нивното училиште.

Решение. Да ги означиме растојанијата (изразени во m) од старите домови на Никола, Ѓорѓи и Анета до нивното училиште со a, b и c . Од условот на задачата следува $\frac{a+b+c}{3} = 2026 \text{ m}$, од каде $a + b + c = 2026 \cdot 3 = 6078 \text{ m. (5 поени)}$

$$1002 \text{ dm} = 100,2 \text{ m}, 2075 \text{ cm} = 20,75 \text{ m} \text{ и } 4945 \text{ cm} = 49,45 \text{ m (5 поени)}$$

Растојанијата (изразени во m) од новите домови на Никола, Ѓорѓи и Анета до училиштето се: $a + 100,2$; $b - 20,75$ и $c - 49,45$, соодветно **(5 поени)**, па нивната аритметичка средина е:

$$\frac{a + 100,2 + b - 20,75 + c - 49,45}{3} = \frac{a + b + c + 30}{3} = \frac{6078 + 30}{3} = 2036 \text{ m. (10 поени)}$$

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Најди природен број n за кој важи

$$n < \left(\frac{1}{2} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{5} + 1} \cdot \left(\frac{1}{6} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{7} + 1} \cdot \left(\frac{1}{8} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{9} + 1} \cdot \left(\frac{1}{10} + 1\right) < n + 1.$$

Решение.

Прв начин. $\left(\frac{1}{2} + 1\right) : \frac{1}{\left(\frac{1}{3} + 1\right)} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) : \frac{1}{\left(\frac{1}{5} + 1\right)} \cdot \left(\frac{1}{6} + 1\right) : \frac{1}{\left(\frac{1}{7} + 1\right)} \cdot \left(\frac{1}{8} + 1\right) : \frac{1}{\left(\frac{1}{9} + 1\right)} \cdot \left(\frac{1}{10} + 1\right) =$

$$= \frac{1+2}{2} : \frac{1}{\frac{1+3}{3}} \cdot \frac{1+4}{4} : \frac{1}{\frac{1+5}{5}} \cdot \frac{1+6}{6} : \frac{1}{\frac{1+7}{7}} \cdot \frac{1+8}{8} : \frac{1}{\frac{1+9}{9}} \cdot \frac{1+10}{10} = \text{(5 поени)}$$

$$= \frac{3}{2} : \frac{1}{\frac{4}{3}} \cdot \frac{5}{4} : \frac{1}{\frac{6}{5}} \cdot \frac{7}{6} : \frac{1}{\frac{8}{7}} \cdot \frac{9}{8} : \frac{1}{\frac{10}{9}} \cdot \frac{11}{10} \cdot \text{(2 поени)}$$

$$= \frac{3}{2} : \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} : \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} : \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{8} : \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{10} \cdot \text{(5 поени)}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdot \text{(5 поени)}$$

Со кртење во горниот израз добиваме $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{10} = \frac{11}{2}$ (5 поени)

Тогаш, $n < \frac{11}{2} < n + 1$, односно $n < 5,5 < n + 1$, од каде следува дека бараниот број е $n = 5$. **(3 поени)**

Втор начин. Го разгледуваме изразот

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{5} + 1} \cdot \left(\frac{1}{6} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{7} + 1} \cdot \left(\frac{1}{8} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{9} + 1} \cdot \left(\frac{1}{10} + 1\right).$$

За $\left(\frac{1}{2} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{3} + 1}$ имаме дека $\left(\frac{1}{2} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1+2}{2} : \frac{1}{\frac{1+3}{3}} = \frac{3}{2} : \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{2}$. **(4 поени)**

За $\left(\frac{1}{4} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{5} + 1}$ имаме дека $\left(\frac{1}{4} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{5} + 1} = \frac{1+4}{4} : \frac{1}{\frac{1+5}{5}} = \frac{5}{4} : \frac{1}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{4}$. **(4 поени)**

Општо, за $\left(\frac{1}{a} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{a+1} + 1}$ имаме дека $\left(\frac{1}{a} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{a+1} + 1} = \frac{a+1}{a} : \frac{a+1}{a+2} = \frac{a+2}{a}$. **(9 поени)**

Според тоа, за разгледуваниот израз добиваме дека важи

$$\left(\frac{1}{2} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} \cdot \left(\frac{1}{4} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{5} + 1} \cdot \left(\frac{1}{6} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{7} + 1} \cdot \left(\frac{1}{8} + 1\right) : \frac{1}{\frac{1}{9} + 1} \cdot \left(\frac{1}{10} + 1\right) =$$

$$= \frac{2+2}{2} \cdot \frac{4+2}{4} \cdot \frac{6+2}{6} \cdot \frac{8+2}{8} \cdot \frac{11}{10} = \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{11}{10} = \frac{11}{2} \cdot \text{(5 поени)}$$

Тогаш, $n < \frac{11}{2} < n+1$, односно $n < 5,5 < n+1$, од каде следува дека бараниот број е $n = 5$. **(3 поени)**

2. Најди го најголемиот петцифрен број кој што истовремено е делив со 4, 5 и 9, и за кој што важат следните услови: цифрата на илјадарките е за еден помала од цифрата на десетките, а збирот од цифрите на единиците и десетките е поголем од 2, а помал од 8.

Решение. Нека бараниот петцифрен број го означиме со $\overline{abcde}$. За да биде бројот делив со 5, треба $e \in \{0, 5\}$. За да биде бројот делив со 4, треба $\overline{de}$ да е делив со 4, па така добиваме дека цифрата на единиците мора да биде 0, т.е. $e = 0$ **(2 поени)**, додека истовремено $d \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ **(2 поени)**.

Од последниот услов на задачата, знаеме дека мора да важи $2 < d + e < 8$, што значи дека $2 < d + 0 < 8$, од каде што добиваме дека $d \in \{4, 6\}$ **(2 поени)**.

Исто така, од условот на задачата познато ни е $b = d - 1$, па ги добиваме следниве два случаи: $d = 4, b = 3$ и $d = 6, b = 5$ **(2 поени)**.

Случај 1. Го разгледуваме бројот од облик $\overline{a3c40}$. Од условот на задачата, бројот треба да биде делив и со 9. Тоа значи дека збирот на цифрите на бројот треба да биде делив со 9, односно $a + 3 + c + 4 + 0 = a + c + 7$ треба да биде делив со 9, т.е. $a + c \in \{2, 11\}$ **(5 поени)**. Најголем број ќе се добие за $a = 9$ и $c = 2$, односно тоа е бројот 93240 **(2 поени)**.

Случај 2. Го разгледуваме бројот од облик $\overline{a5c60}$. Од условот на задачата, бројот треба да биде делив и со 9. Тоа значи дека збирот на цифрите на бројот треба да биде делив со 9, односно $a + 5 + c + 6 + 0 = a + c + 11$ мора да биде со 9, т.е. $a + c \in \{7, 16\}$ **(5 поени)**. Оттука добиваме дека најголем број ќе се добие за $a = 9$ и $c = 7$, односно тоа е бројот 95760 **(2 поени)**.

Од двата случаи кои што ги разгледавме, конечно добиваме дека најголем петцифрен број со бараните услови од задачата е 95760 **(3 поени)**.

3. (Нумерус 50-3, Конкурсни задачи, 6.-7. одделение, задача 4282) Во три вреќи има вкупно 32,1 kg јачмен. Во првата вреќа има 20% помалку јачмен отколку во втората, а во третата има 42,5% од количеството јачмен во првата вреќа. Колку јачмен има во секоја вреќа?

Решение. Нека во втората вреќа има x kg јачмен **(5 поени)**. Тогаш во првата вреќа има 80% од x , односно $\frac{4}{5}x$ kg јачмен **(4 поени)**, а во третата вреќа има 42,5% од $\frac{4}{5}x$ kg, односно има $\frac{425}{1000} \cdot \frac{4}{5}x$ kg $= \frac{17}{50}x$ kg јачмен **(4 поени)**. Оттука добиваме $\frac{4}{5}x + x + \frac{17}{50}x = 32,1$ kg **(6 поени)**, т.е. $x = 15$ kg **(2 поени)**. Според тоа, во првата вреќа има $\frac{4}{5} \cdot 15$ kg $= 12$ kg јачмен **(2 поени)**, во втората има 15 kg јачмен, а во третата има $32,1$ kg $- 12$ kg $- 15$ kg $= 5,1$ kg јачмен **(2 поени)**.

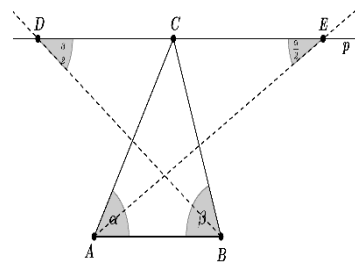
4. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 6.-7. одделение, задача 4068) Нека ABC е остроаголен разностран триаголник. Низ темето C повлечена е права p паралелна со страната AB . Симетралата на аголот ABC ја сече правата p во точката D , а симетралата на аголот BAC ја сече правата p во точката E . Докажи дека $\overline{DE} = \overline{AC} + \overline{BC}$.

Решение. (За точно обележан цртеж **5 поени**)

Бидејќи правата p е паралелна со страната AB , симетралите на аглите $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$ се трансверзали на овие паралелни прави. **(5 поени)**

Од еднаквоста на аглите заклучуваме дека $\angle CEA = \frac{\alpha}{2}$. **(7 поени)**

Оттука триаголникот AEC има два еднакви агли, односно триаголникот AEC е рамнокрак и важи $\overline{AC} = \overline{CE}$. **(4 поени)** Слично, $\overline{BC} = \overline{CD}$. **(2 поени)** Оттука, $\overline{DE} = \overline{CE} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BC}$. **(2 поени)**



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 50-1, Конкурсни задачи, 7-8 одделение, задача 4199) Во една акција за пошумување учествувале 35 ученици од 10 различни училишта и вкупно засадиле 80 садници. Секој ученик од исто училиште засадил еднаков број садници, а учениците од различни училишта засадиле различен број садници. Секој ученик засадил барем една садница. Колку вкупно ученици засадиле само една садница?

Решение. Нека секој ученик од првото училиште засадил барем 1 садница, од второто училиште барем 2 садници, од третото училиште барем 3 садници, и така натаму, од десеттото училиште барем 10 садници. **(5 поени)** Тогаш 10 ученици (сите од различни училишта) засадиле најмалку $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ садници. **(5 поени)** Останатите $35-10=25$ ученика засадиле најмногу $80-55=25$ садници. **(5 поени)** Бидејќи секој ученик засадил барем една садница, следува дека секој од тие 25 ученици засадил само по една садница. **(5 поени)** Значи, и овие 25 ученика се од првото училиште. Според тоа, $25+1=26$ ученици засадиле само по една садница. **(5 поени)**

2. Докажи дека ако n е непарен природен број, тогаш $n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + 2026)$ е парен број делив со 2027.

Решение. Нека n е непарен природен број и нека $A = n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + 2026)$. Тогаш,

$$A = n^2 + n^2 + 1 + n^2 + 2 + \dots + n^2 + 2026 = \left(\underbrace{n^2 + n^2 + \dots + n^2}_{2027} \right) + (1 + 2 + \dots + 2026) \quad \textbf{(5 поени)}$$

$$A = 2027n^2 + [(1 + 2026) + (2 + 2025) + \dots + (1013 + 1014)] \quad \textbf{(5 поени)}$$

$$A = 2027n^2 + \left[\underbrace{2027 + 2027 + \dots + 2027}_{1013} \right] = 2027n^2 + 2027 \cdot 1013 = 2027(n^2 + 1013) \quad \textbf{(5 поени)}$$

Следува дека A е делив со 2027. Бидејќи n е непарен природен број, следува дека и n^2 е исто така непарен природен број. Тогаш, $n^2 + 1013$ е парен број, како збир на два непарни броја. **(5 поени)** Според тоа, добиваме дека $2027(n^2 + 1013)$ е парен број, односно $n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + 2026)$ е парен број делив со 2027. **(5 поени)**

3. (Нумерус 48-4, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 4048) Дијагоналите на еден конвексен четириаголник $ABCD$ се сечат во точката O и го делат тој четириаголник на триаголниците OAB , OBC , OCD и ODA . Дали производот од плоштините на триаголниците OBC и ODA е еднаков со производот од плоштините на триаголниците OAB и OCD ? Образложи го одговорот!

Решение. Нека со P_1 , P_2 , P_3 и P_4 ги означиме плоштините на триаголниците OAB , OBC , OCD и ODA , соодветно.

Нека h_1 е висината во триаголникот ODA од темето D кон страната OA . Но, h_1 е и висина во триаголникот OCD од темето D кон страната OC . Од друга страна, ако h_2 е висината во триаголникот OBC од темето B кон страната OC , тогаш h_2 е висина и во триаголникот OAB од темето B кон страната OA . Од тука следува:

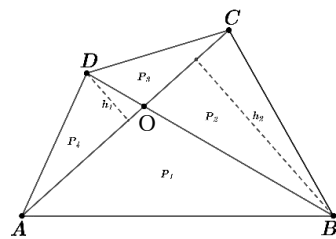
$$P_1 = \frac{\overline{OA} \cdot h_2}{2}, \quad P_2 = \frac{\overline{OC} \cdot h_2}{2}, \quad P_3 = \frac{\overline{OC} \cdot h_1}{2}, \quad P_4 = \frac{\overline{OA} \cdot h_1}{2} \quad \textbf{(10 поени)}$$

Па, добиваме:

$$P_2 \cdot P_4 = \frac{\overline{OC} \cdot h_2}{2} \cdot \frac{\overline{OA} \cdot h_1}{2} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot h_1 \cdot h_2}{4} = \frac{\overline{OA} \cdot h_2}{2} \cdot \frac{\overline{OC} \cdot h_1}{2} = P_1 \cdot P_3 \quad \textbf{(10 поени)}$$

Значи, производот од плоштините на триаголниците OBC и ODA е еднаков на производот од плоштините на триаголниците OAB и OCD . **(5 поени)**

4. Определи ги сите тројки прости броеви x , y и z за кои важи дека $x^2(2026y + 1013z) = 2026 \cdot 2025$.



Решение. Ги бараме (x, y, z) , каде што x, y, z се прости броеви. Од $2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ и $2026 = 2 \cdot 1013$, имаме дека $x^2(2026y + 1013z) = 2 \cdot 1013 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. **(7 поени)** Од друга страна $x^2(2026y + 1013z) = 1013x^2(2y + z)$, па добиваме дека

$$1013x^2(2y + z) = 2 \cdot 1013 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \Leftrightarrow x^2(2y + z) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5. \text{ (4 поени)}$$

По услов x е прост број, па $x = 3$ или $x = 5$. **(4 поени)** Разгледуваме два случаја:

Случај 1. Нека $x = 3$. Следува, $2y + z = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$. Десната страна на последното равенство е парен број, па мора и левата да е парен број, а тоа е единствено можно ако z е парен број. Бидејќи z е прост број, единствен парен прост број е бројот 2, односно $z = 2$. **(4 поени)** Тогаш $y = 224$, но ова е сложен број. Следува дека во овој случај не постојат такви броеви. **(1 поен)**

Случај 2. Нека $x = 5$. Следува, $2y + z = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$. Аналогно на претходниот случај, заклучуваме дека $z = 2$. **(4 поени)** Тогаш, $y = 80$, што е сложен број. Следува дека и во овој случај не постојат такви броеви. **(1 поен)** Според тоа, заклучуваме дека бараните тројки прости броеви не постојат.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. (Нумерус 48-1, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 3968) Нека $x + y + xy = 1$, каде што x и y се реални броеви различни од нула. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A = xy + \frac{1}{xy} - \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Решение: Дадениот израз го запишуваме во облик

$$\begin{aligned} A &= xy + \frac{1}{xy} - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{x^2y^2 + 1 - y^2 - x^2}{xy} = \\ &= \frac{y^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1)}{xy} = \frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{xy} = \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)(y - 1)(y + 1)}{xy} = (x + 1)(y + 1) \frac{(x - 1)(y - 1)}{xy} = \\ &= (xy + x + y + 1) \frac{(xy - x - y + 1)}{xy}. \text{ (15 поени)} \end{aligned}$$

Со замена за $x + y + xy = 1$, добиваме дека

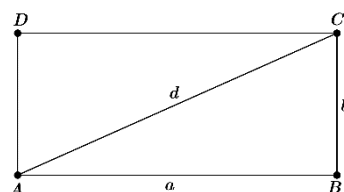
$$A = (1 + 1) \cdot \frac{(xy - x - y + 1)}{xy} = 2 \cdot \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{y} - \frac{1}{x} + 1 \right). \text{ (5 поени)}$$

Равенството $x + y + xy = 1$ го делиме со xy и добиваме $1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{xy}$ или еквивалентно $\frac{1}{xy} - \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1$.

Конечно, $A = 2 \cdot (1 + 1) = 4$. **(5 поени)**

2. (Нумерус 49-1, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 4080). Правоаголникот $ABCD$ има плоштина $\frac{m}{4} + \frac{1}{8}$ и дијагонала со должина $\frac{m}{2}$. Изрази го периметарот на правоаголникот преку m .

Решение. Според Питагоровата теорема дијагоналата е $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ и според условот, $\frac{m}{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, односно $a^2 + b^2 = \frac{m^2}{4}$ (1) **(5 поени)**



Плоштината на правоаголникот е $P = ab$ и според условот, $ab = \frac{m}{4} + \frac{1}{8}$.

Оттука, $ab = \frac{2m+1}{8}$, односно $2ab = \frac{2m+1}{4}$ (2) **(5 поени)** Периметарот на правоаголникот е

$L = 2(a + b)$. Ќе го пресметаме збирот $a + b$. Имајќи ги предвид (1) и (2), според формулата за бином на квадрат имаме дека

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = \frac{m^2}{4} + \frac{2m+1}{4} = \frac{m^2 + 2m + 1}{4} = \frac{(m+1)^2}{2^2} = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2. \text{ (10 поени)}$$

Следува дека $a + b = \sqrt{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2} = \left|\frac{m+1}{2}\right| = \frac{1}{2}(m+1)$, бидејќи $m > 0$. Периметарот на правоаголникот е

$$L = 2(a + b) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (m+1) = m+1. \text{ (5 поени)}$$

3. Нека a, b и c се цели броеви што ги исполнуваат условите $ab + bc + ca = 1$ и $a + b = c$. Докажи дека производот abc е делив со 3.

Решение: Од $ab + bc + ca = 1$ имаме дека

$$\begin{aligned} ab &= 1 - bc - ca = 1 - c(b + a) = 1 - c \cdot c = \\ &= 1 - c^2 = (1 - c)(1 + c). \end{aligned} \text{ (10 поени)}$$

Множиме со c и добиваме

$$abc = (1 - c)c(1 + c) = -(c - 1)c(c + 1). \text{ (10 поени)}$$

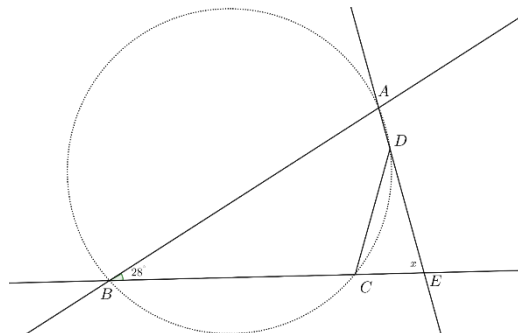
Бидејќи $c - 1, c$ и $1 + c$ се три последователни броеви, па еден од нив е делив со 3, од каде следува дека нивниот производ е делив со 3. Следува дека производот abc е делив со 3. **(5 поени)**

4. Точките A, B, C и D лежат на иста кружница. Притоа, $\angle ABC = 28^\circ$ и правите AD и BC се сечат во точка E така што $\overline{DC} = \overline{DE}$. Одреди го аголот меѓу правите AD и BC , ако точките C и D лежат од иста страна на правата AB и точката C се наоѓа помеѓу точките B и E .

Решение: Нека $\angle AEC = x$. Бидејќи $\overline{DC} = \overline{DE}$, триаголникот DCE е рамнокрак, па $\angle DCE = \angle DEC = x$. **(5 поени)** Аголот ADC е надворешен за триаголникот DCE па (според теоремата за надворешен агол) имаме дека

$$\angle ADC = \angle DEC + \angle DCE = x + x = 2x. \text{ (10 поени)}$$

Точките A, B, C и D лежат на иста кружница па четириаголникот $ABCD$ е тетивен. Значи, неговите спротивни агли се суплементни. **(5 поени)** Според тоа



$$\begin{aligned} \angle ADC + \angle ABC &= 180^\circ, \\ 2x + 28^\circ &= 180^\circ, \\ x &= 76^\circ \end{aligned} \text{ (5 поени)}$$