ТЕСТ ЗА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Решенија на задачите со маркинг шема

2 јуни 2025 година

Задача 1. Нека $n > 1$ е природен број и $m > 2$ е делител на $2n$. Докажи дека бројот n^2 може да се запише како збир од m квадрати на природни броеви.

Решение. Нека $k = \frac{2n}{m}$, што од условот е природен број. **(2п.)**
Од алгебарскиот идентитет $n^2 - (n-k)^2 = k(2n-k)$ **(2п.)**
заменувајќи $2n = km$ добиваме $n^2 - (n-k)^2 = k^2(m-1)$.
Од каде што имаме:

$$(n-k)^2 + \underbrace{k^2 + k^2 + \ldots + k^2}_{m-1} = (n-k)^2 + k^2(m-1) = n^2. \quad \textbf{(4п.)}$$

Според ова за секој $n > 1$, бројот n^2 може да се запише како збир на $(n-k)^2 > 0, \underbrace{k^2, k^2, \ldots, k^2}_{m-1}$ што се точно m квадрати на природни броеви. **(2п.)** ■

Забелешка. За точен доказ при специјални случаи $m = n$ и $m = 2n$ се доделуваат два поени, кои не се адитивни на маркинг шемата. Доказ на само еден од случаите не носи поени. Последниот чекор се вреднува со 1 поен, доколку не е нагласено дека $n - k > 0$.

Задача 2. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник со непаралелни страни и вписана кружница k со центар O. Нека k ги допира страните AD и BC во M и N соодветно и ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABO$ во точки P и Q. Докажи дека $PQ \parallel MN$.

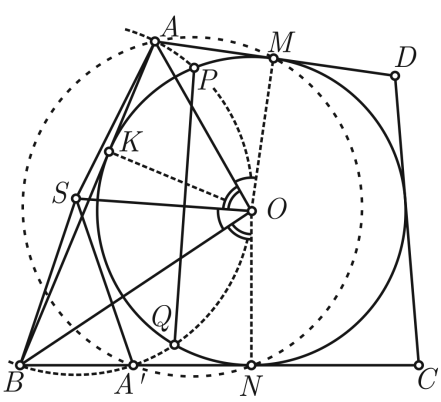
Решение 1. Нека S е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABO$, K е допирната точка на k со страната AB и P е поблиску до A, а Q до B, како на цртежот. **(1п.)**
Бидејќи S е центар на опишаната кружница имаме $\angle BSO = 2\angle BAO$, од каде добиваме дека

$$\angle SOB = 90^\circ - \angle KAO = \angle KOA = \angle AOM,$$

при што последното равенство е точно бидејќи $\triangle KOA \cong \triangle MOA$. **(2п.)**
Слично и $\angle AOS = 90^\circ - \angle OBA = \angle KOB = \angle BON$. **(2п.)**
Според ова

$$\angle MOS = \angle MOA + \angle AOS = \angle SOB + \angle BON = \angle SON,$$

т.е. правата SO е симетрала на $\angle MON$. **(2п.)**
А, бидејќи $\triangle MON$ е рамнокрак со основа MN таа е симетрала и на отсечката MN. **(1п.)**
Од друга страна правата SO која ги поврзува центрите на двете кружници е и симетрала на отсечката PQ образувана од пресечните точки на кружниците ($OPSQ$ е делтоид). **(1п.)**
Според ова SO е нормална на PQ и на MN, па $PQ \parallel MN$. **(1п.)** ■



Решение 2. Нека S е центарот, а A' е втората пресечна точка на опишаната кружница околу $\triangle ABO$ со BC и P е поблиску до A, а Q до B, како на цртежот. **(1п.)**

За аглите имаме

$$\angle SA'B = \angle A'BS = \angle NBO + \angle OBS = \angle OBA + (90^\circ - \angle BAO) = \\ (90^\circ - \angle SAO) + (90^\circ - \angle OAM) = 180^\circ - (\angle SAO + \angle OAM) = 180^\circ - \angle SAM. \quad \textbf{(4п.)}$$

Бидејќи $SA = SA'$ заклучуваме дека S лежи на симетралата на аголот меѓу правите BC и AD, како и O. **(2п.)**

Од друга страна M е осно симетрична на N во однос на симетралата, а P на Q во однос на SO (истата права). Според ова SO е нормална на PQ и на MN, па $MN \parallel PQ$. **(3п.)** ■

Задача 3. Дадена е низа од $n > 1$ монети. Дефинираме *оператор* да биде непразна листа од k различни природни броеви $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ не поголеми од n, која означува дека треба да ја превртиме секоја од монетите на индексите(позициите) $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Нека S е листа од $n+1$ различни оператори. Докажи дека можеме да одбереме непразна подлиста T од S од различни оператори, што кога ќе ги примениме сите оператори од T на низа од n монети, повторно ја добиваме истата почетна конфигурација (ако почнеме со n глави, на крај пак имаме n глави)

Пример за оператор: Ако $n = 4$ и почнеме со ППГП и го примениме операторот $(1, 3)$, добиваме ГППП.

Решение. Очигледно дека секоја листа оператори е еквивалетна на единствен оператор, кој се добива со последователно применување на сите оператори од таа листа. Исто така, редоследот на операторите не е битен, така што листа различни оператори е исто што и множество. **(2п.)**

Понатаму, да забележиме дека за низа од n монети, постојат $2^n - 1$ различни оператори, бидејќи за секоја од n-те монети имаме избор дали да ја превртиме или не (добиваме 2^n), и одземаме 1 бидејќи мора да превртиме барем една монета (празен оператор не е дозволен). **(2п.)**

Понатаму, согледуваме дека има $2^{n+1} - 1$ различни непразни поодмножества од S, што е поголемо од $2^n - 1$,**(1п.)**
па од принципот на Дирихле следи дека барем 2 од нив A и B се сведуваат на истиот оператор. **(3п.)**
Но, ако го примениме истиот оператор 2 пати, тој се поништува и ја добиваме почетната конфигурација. Ова значи дека $T = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ го задоволува бараниот услов, и доказот е завршен. **(2п.)** ■

Забелешка. Од $2^{n+1} - 1 > 2(2^n - 1)$ следува дека постојат три различни непразни подмножества од оператори во S кои се сведуваат на ист оператор. Меѓутоа тука не е предвидена претпоставката дека нема празен оператор во множествата. Пример кога постои само едно вакво множество се операторите (i) за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $(1, 2, \dots, n)$, при што само целото множество ни дава празен оператор.

Задача 4. Нека за реалните броеви x, y и z важи $x + y^2 + z^3 = 4$. Докажи дека важи неравенството

$$x^2 + y^2 + z^2 > x + y + z.$$

Решение. Ако $x+y+z \geq 3$, тогаш $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0$, па $x^2+y^2+z^2 \geq 2x+2y+2z-3 \geq x+y+z$. Притоа равенство важи само ако $x = y = z = 1$, што не е можно, т.е. неравенството е строго. **(3п.)**

За $z \leq \frac{11}{8}$, имаме $z^3 - z^2 = z^2(z-1) \leq \frac{121}{64} \cdot \frac{3}{8} < \frac{3}{4}$. Според ова $x + y^2 + z^2 > x + y^2 + z^3 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$, од каде добиваме:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y^2 + z^2) + (x^2 - x + \tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{4} > \tfrac{13}{4} + (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} \geq 3 > x + y + z. \quad \textbf{(4п.)}$$

Ако $z \geq \frac{11}{8}$ имаме $z^2 - z = z(z-1) \geq \frac{11}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{33}{64} > \frac{1}{2}$. Сега од $a^2 - a = (a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ за секој реален број a заклучуваме дека во овој случај $(x^2 - x) + (y^2 - y) + (z^2 - z) > -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 0$, што е еквивалентно на бараното неравенство. **(3п.)** ■

Забелешка. Првиот случај може да се добие и од $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 \geq 3(x + y + z)$.

Забелешка. Во вториот и третиот случај се добиваат поени за $z \geq a$, т.е. $z \leq a$, ако тврдењето е докажано за било кое $a \in (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}), \frac{1}{6}(2 + \sqrt[3]{89 - 9\sqrt{97}} + \sqrt[3]{89 + 9\sqrt{97}}))$. Во понуденото решение $a = \frac{11}{8}$.