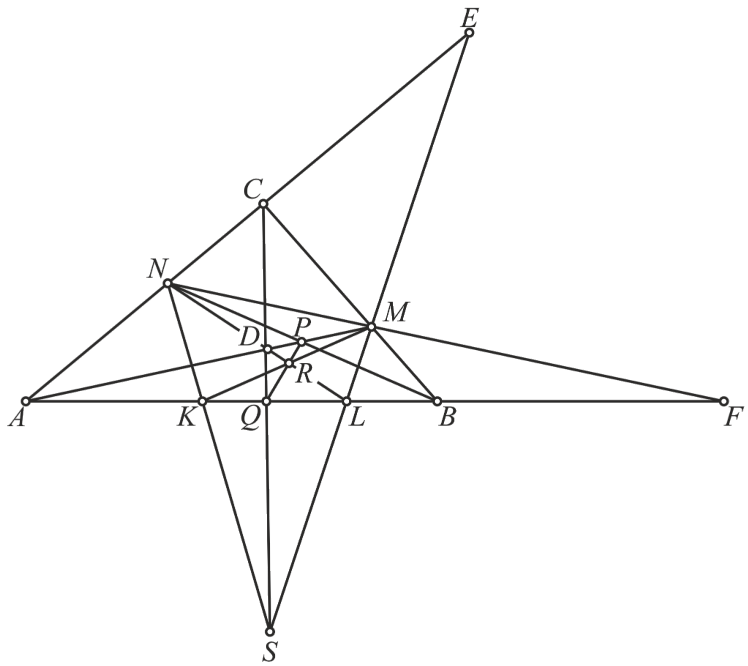
Изборен тест за ИМО 2025

Ден 1: Решенија и распределба на поени

Задача 1. На страните на $\triangle ABC$ лежат следните точки: K и L на AB, M на BC и N на CA. Нека AM ја сече BN во P, KM ја сече LN во R, KN ја сече LM во S и CS ја сече AB во Q. Докажете дека точките P, Q и R се колинеарни.

Решение 1.



Од теорема на Менелај за $\triangle AKN$ и правата $Q-S-C$, $\triangle KMS$ и правата $R-L-N$ и $\triangle MAC$ и правата $P-N-B$ имаме

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QK}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{NS}}{\overline{SK}}, \frac{\overline{KR}}{\overline{RM}} = -\frac{\overline{KN}}{\overline{NS}} \cdot \frac{\overline{SL}}{\overline{LM}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{MP}}{\overline{PA}} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}. \ \textbf{(1п)}$$

Со множење на трите равенства добиваме

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QK}} \cdot \frac{\overline{KR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{PA}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{NS}}{\overline{SK}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{NS}} \cdot \frac{\overline{SL}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{SK}} \cdot \frac{\overline{SL}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}}. \ \textbf{(2п)}$$

Сега од теоремата на Менелај за $\triangle SNC$ и $\triangle SMC$ и правата $A-K-Q-L-B$ имаме

$$\frac{\overline{SK}}{\overline{KN}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{AC}} = -\frac{\overline{SQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}},$$

од каде следува

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{SK}} \cdot \frac{\overline{SL}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = 1. \ \textbf{(2п)}$$

За крај пресметуваме

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QK}} \cdot \frac{\overline{KR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{PA}} = -\frac{\overline{AC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{SK}} \cdot \frac{\overline{SL}}{\overline{LM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = -1\,,$$

што (според обратната теорема на Менелај) повлекува колинеарност на P, Q и R. **(2п)** □

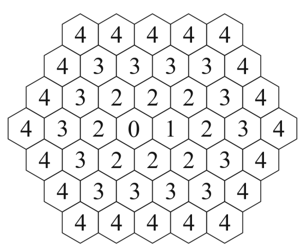
Решение 2. Нека D е пресечната точка на AM и LN, E е пресечната точка на AC и LM и F е пресечната точка на AB и MN (може да се и бесконечни точки на соодветните прави). **(2п)** Со користење на двоен соодност добиваме

$$(A,P;D,M) \stackrel{N}{=} (A,B;L,F) \stackrel{M}{=} (A,C;E,N) \stackrel{S}{=} (A,Q;L,K)\,,$$

што ја повлекува колинеарноста. **(5п)** □

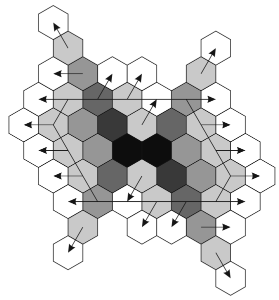
Задача 2. Во езеро растат лотосови лисја во форма на правилен шестаголник со страна 1. Од секој лист може да израсне нов лист на растојание $\sqrt{3}$ од постоечкиот (меѓу центрите), доколку не се преклопува со ниту еден лист. Ако езерото е доволно големо и денес има само еден лотосов лист во него, доволно далеку од брегот, за колку најмалку денови може да има 2025 лисја во езерото?

Решение. Го „поплочуваме“ езерото со правилни шестаголници со страна 1 како што е прикажано на долниот цртеж. Притоа, со 0 го обележуваме првиот лист, а со 1 листот добиен од него по првиот ден. Необележаните шестаголници соседни на 0 и 1 ги обележуваме со 2. Општо, необележаните шестаголници соседни на шестаголник обележан со i ги обележуваме со $i+1$. Од дефиницијата, секој лист мора да се поклопи со ваков шестаголник.
Од дефиницијата на задачата на n-тиот ден нема лисја на шестаголник обележан со број поголем од n. Освен тоа има најмногу два листа на шестаголник обележан со n. Навистина, на вториот ден има два вакви листа и општо лист на шестаголник обележан со $i+1$ на $i+1$-от ден може да порасне само од лист обележан со i на i-тиот ден. **(2п)**



Ќе докажеме дека по $n \geq 3$ денови има најмногу $2n$ шестаголници обележани со $n-1$ или n на кои има лисја. По три дена има најмногу $2^3 = 8$ лисја од кои два се обележани со 0 или 1, па има најмногу $6 = 2 \cdot 3$ шестаголници обележани со 2 или 3, што го докажува тврдењето за $n = 3$. Нека тврдењето е точно за $n = k$, т.е. по k денови има најмногу $2k$ лисја обележани со $k-1$ или k од кои најмногу 2 се обележани со k. По следниот ден може да има најмногу $2k$ нови лисја обележани со k или $k+1$. Па, заедно со постоечките лисја обележани со k (најмногу 2), ќе има најмногу $2k+2$ лисја обележани со k или $k+1$. Од нив најмногу 2 се обележани со $k+1$, па индукцискиот доказ е завршен. **(2п)**
Забележуваме дека за секој $n \geq 2$ има $6n-4$ шестаголници обележани со n. Навистина, шестаголниците обележани со n формираат шестаголник со страни на кои има редоследно по $n, n, n+1, n, n, n+1$ мали шестаголници. Според ова има вкупно $4(n-1)+2n = 6n-4$ единечни шестаголници.

Со ова добиваме горна граница $2n + \sum_{k=1}^{n-2}(6k-4)$ за вкупниот број на лисја по n денови. Со средување на оваа сума ја добиваме горната граница $(n-2)(3n-5)+4$. За $n = 27$ вредноста на последниот израз изнесува 1904, од каде следува дека минималниот број на денови е 28. **(1п)**



На горниот цртеж е прикажана постапка со која се добиваат барем 2025 лисја за 28 дена. Боите од потемна кон посветла прикажуваат како се шират лотосовите лисја од првиот до шестиот ден. Забележуваме дека на петтиот ден има точно два единечни шестаголници во нацртаниот кои не се покриени и има шест лисја надвор од него. Истото е точно и за шестиот ден (ширењето е прикажано со стрелки). Постапката може да се продолжи во секој нареден ден (со избор на стрелки во истите насоки, по една повеќе од секоја страна). Според ова, по n-тиот ден имаме два шестаголници обележани со n кои се покриени, два шестаголници обележани со $n-2$ кои не се покриени и $2n-2 = 4+2(n-3)$ (четирите надвор од обележаниот шестаголник и две негови „кратки“ страни по $n-3$ шестаголници). Ова е за 2 помалку отколку горната граница добиена во првиот дел, т.е., за секој $n \geq 5$, после n дена има $(n-2)(3n-5)+2$ лисја во езерото. Конкретно, за $n = 28$ има $2056 > 2025$ лисја. **(2п)** $\square$

Задача 3. Нека x_1, x_2, x_3 и x_4 се позитивни реални броеви. Докажете го неравенството:

$$\frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3} + \frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4} + \frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1} + \frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2} \geq 8\,.$$

Решение 1. Нека

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3} + \frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4} + \frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1} + \frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2}.$$

Забележуваме дека функцијата е циклична, т.е.

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4) = L(x_2,x_3,x_4,x_1) = L(x_3,x_4,x_1,x_2) = L(x_4,x_1,x_2,x_3)\,.$$

Според ова можеме да претпоставиме дека $x_1 \geq x_3$ и $x_4 \geq x_2$. Освен тоа мноење на сите променливи со позитивна константа не ја менува вредноста на функцијата, т.е.,

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4) = L(c\cdot x_1, c\cdot x_2, c\cdot x_3, c\cdot x_4) \quad \textbf{(1п)}\,.$$

Прво докажуваме дека $L(u+v,0,u,1) \geq 8$ за секои позитивни реални броеви u и v.

Навистина,

$$L(u+v,0,u,1) = \frac{u+v}{u} + \frac{3u}{u+1} + \frac{u+3}{1+u+v} + \frac{1+3u+3v}{u+v} =$$

$$1 + \frac{v}{u} + 3 + \frac{-3}{u+1} + 1 + \frac{2-v}{1+u+v} + 3 + \frac{1}{u+v} =$$

$$8+\frac{v}{u}-\frac{v}{1+u+v}+\frac{-3}{u+1}+\frac{2}{1+u+v}+\frac{1}{u+v}=$$
$$8+\frac{v(1+v)}{u(1+u+v)}+\frac{-2v}{(u+1)(1+u+v)}+\frac{1-v}{(u+1)(u+v)}=$$
$$8+\frac{v(1+v)}{u(u+1)(1+u+v)}+\frac{v(1+v)}{(u+1)(1+u+v)}+\frac{-2v}{(u+1)(1+u+v)}+\frac{1-v}{(u+1)(u+v)}=$$
$$8+\frac{v(1+v)}{u(u+1)(1+u+v)}+\frac{v(v-1)}{(u+1)(1+u+v)}+\frac{1-v}{(u+1)(u+v)}\geq$$
$$8+\frac{v(1+v)}{(u+v)(u+1)(1+u+v)}+\frac{(v-1)(v(u+v)-(1+u+v))}{(u+1)(1+u+v)(u+v)}=$$
$$8+\frac{v(1+v)-(v-1)+(v-1)^2(u+v)}{(u+1)(1+u+v)(u+v)}=$$
$$8+\frac{v^2+1+(v-1)^2(u+v)}{(u+1)(1+u+v)(u+v)}\geq 8\,. \quad \textbf{(2п)}$$

Освен тоа имаме

$$L(u,0,v,0)=\frac{u}{v}+\frac{3v}{v}+\frac{v}{u}+\frac{3u}{u}=3+\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}\right)+3\geq 6+2\cdot\sqrt{\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{u}}=8\,. \quad \textbf{(1п)}$$

За константа c добиваме

$$L(x_1,x_2,x_3,x_4)-L(x_1+c,x_2-c,x_3+c,x_4-c)=$$
$$\left(\frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2}\right)-$$
$$\left(\frac{x_1+c+3(x_2-c)}{x_2+x_3}+\frac{x_2-c+3(x_3+c)}{x_3+x_4}+\frac{x_3+c+3(x_4-c)}{x_4+x_1}+\frac{x_4-c+3(x_1+c)}{x_1+x_2}\right)=$$
$$\frac{2c}{x_2+x_3}-\frac{2c}{x_3+x_4}+\frac{2c}{x_4+x_1}-\frac{2c}{x_1+x_2}=$$
$$2c\left(\frac{x_4-x_2}{(x_2+x_3)(x_3+x_4)}-\frac{x_4-x_2}{(x_4+x_1)(x_1+x_2)}\right)=$$
$$\frac{2c(x_4-x_2)\left((x_4+x_1)(x_1+x_2)-(x_2+x_3)(x_3+x_4)\right)}{(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_1)(x_1+x_2)}=$$
$$\frac{2c(x_4-x_2)\left(x_1(x_1+x_2+x_4)+x_2x_4-x_3(x_3+x_2+x_4)-x_2x_4\right)}{(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_1)(x_1+x_2)}=$$
$$\frac{2c(x_4-x_2)(x_1-x_3)(x_1+x_3+x_2+x_4)}{(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_1)(x_1+x_2)}\,. \quad \textbf{(1п)}$$

Сега ако $x_2=x_4$ и $c=x_2$ имаме $L(x_1,x_2,x_3,x_4)=L(x_1+x_2,0,x_3+x_2,0)\geq 8$. **(1п)**
Слично за $x_4>x_2$ и $c=x_2$ имаме $L(x_1,x_2,x_3,x_4)\geq L(x_1+x_2,0,x_3+x_2,x_4-x_2)$. Од $x_1\geq x_3$ добиваме

$$\frac{x_1+x_2}{x_4-x_2}\geq\frac{x_3+x_2}{x_4-x_2}$$

и

$$L\left(x_1+x_2,0,x_3+x_2,x_4-x_2\right)=L\left(\frac{x_1+x_2}{x_4-x_2},0,\frac{x_3+x_2}{x_4-x_2},1\right)=L(u+v,0,u,1)\geq 8\,,$$

каде $u=\frac{x_3+x_2}{x_4-x_2}$ и $v=\frac{x_1-x_3}{x_4-x_2}$. **(1п)**

Со ова докажавме дека за секои позитивни реални броеви x_1, x_2, x_3 и x_4 важи

$$\frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2}\geq 8\,.$$

$\square$

Решение 2. Со сведување под заеднички именител на изразот

$$\frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2}-8$$

добиваме

$$\frac{\sum_{cyc} x_1^3x_4-4x_1^2x_3x_4+3x_1x_3^2x_4+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2-x_1x_2^2x_3+\frac{1}{2}x_2^2x_3^2+\frac{1}{2}x_1x_3^2-x_1^2x_3^3+\frac{1}{2}x_1^3x_3}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_1)}. \quad \textbf{(2п)}$$

Бидејќи $x_1^3x_4-2x_1^2x_3x_4+x_1x_3^2x_4=x_1x_4(x_1-x_3)^2\geq 0$, броителот е поголем од

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} -2x_1^2x_3x_4+2x_1x_3^2x_4+(\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}x_1x_3)(x_1-x_3)^2 &= \\ 2(x_1x_3-x_2x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_4)&+ \\ (x_1x_3+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}x_4^2)(x_1-x_3)^2+(x_2x_4+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_3^2)(x_2-x_4)^2 &\geq \quad \textbf{(2п)} \\ 2(x_1x_3-x_2x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_4)+(x_1x_3+x_2x_4)(x_1-x_3)^2+(x_2x_4+x_1x_3)(x_2-x_4)^2 &= \quad \textbf{(1п)} \\ x_1x_3((x_1-x_3)+(x_2-x_4))^2+x_2x_4((x_1-x_3)-(x_2-x_4))^2 &\geq 0. \quad \textbf{(2п)}\end{aligned}$$

Според ова броителот е позитивен. Следствено, целиот израз е позитивен, што значи дека даденото неравенство е точно. $\square$

Забелешка. Во второто решение првите **2 поена** се доделуваат само ако е добиен среден симетричен израз.

Изборен тест за ИМО 2025

Ден 2: Решенија и распределба на поени

Задача 4. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ такви што $f(a) \mid a$ и равенството

$$f(f(a) + kb) = f(a + kf(b))$$

е задоволено за секои $a, b, k \in \mathbb{N}_0$.

Решение. За $k = 0$ имаме $f(f(a)) = f(a)$ за секој $a \in \mathbb{N}_0$. Ако го обележиме $f(0)$ со n, тогаш $f(n) = n$. **(1п)**
Нека $d \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $v_d = f(d)$. Имаме $f(f(d)) = f(d) = v_d$, од каде $v_d \mid d$. За избор $a = d$ и $b = 0$ во даденото равенство добиваме $v_d = f(f(d)) = f(d + kn)$. Ова ни дава вредности за сите ненегативни цели броеви $d + kn$. **(1п)**
Следува дека $v_d \mid d + kn$ за секој k, па $v_d \mid n$. За секој d таков што НЗД$(d, n) = 1$, добиваме $f(d) = 1$, т.е. $v_d = 1$. **(1п)**
Ако $n > 2$ имаме $f(1) = f(n-1) = 1$. Со избор $a = 1$, $b = n-1$ и $k = n-1$ во почетното равенство добиваме

$$n = f(n) = f(1 + (n-1)) = f(1 + (n-1)^2) = f(n^2 - 2n + 2) = f(2) \leq 2,$$

што е контрадикција. Следува дека $n \in \{1, 2\}$. **(2п)**
За $n = 1$ имаме $f(a) = 1$ за сите ненегативни цели броеви a и условите се тривијално исполнети.
За $n = 2$ имаме $f(a) = 1$, за непарен a и $f(a) = 2$, за парен a. Јасно $f(a) \mid a$, а за равенството имаме

$$f(f(a) + kb) \equiv f(a) + kb \equiv a + kb \equiv a + kf(b) \equiv f(a + kf(b)) \pmod{2}.$$

Бидејќи $f(a) \in \{1, 2\}$, од конгруенциите по модул 2 следува равенството. **(2п)** □

Задача 5. Даден $\triangle ABC$ со страни a, b, c, чиј центар на впишана кружница е I и радиус на опишана кружница е R. Нека P_1, P_2 и P_3 се плоштините на $\triangle ABI, \triangle BCI$ и $\triangle CAI$, соодветно. Докажете дека

$$\frac{abc}{12R} \leq \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{P} \leq \frac{3R^3}{4\sqrt[3]{abc}}.$$

Решение. Од $P = \frac{abc}{4R}$, левата страна на неравенството е еквивалентна со

$$\frac{P}{3} \leq \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{P} \iff \left(\frac{P}{3}\right)^2 \leq \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{3},$$

што е неравенство меѓу аритметичка и квадратна средина, бидејќи $P_1 + P_2 + P_3 = P$. **(2п)**
За десната страна, нека r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Имаме

$$P_1 = \frac{rc}{2}, \quad P_2 = \frac{ra}{2}, \quad P_3 = \frac{rb}{2}.$$

Според ова добиваме

$$\frac{P_1^2+P_2^2+P_3^2}{P} = \frac{\left(\frac{rc}{2}\right)^2+\left(\frac{ra}{2}\right)^2+\left(\frac{rb}{2}\right)^2}{rs} = \frac{r(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)} \overset{(1)}{\leq} \textbf{(2п)}$$

$$\frac{r9R^2}{2(a+b+c)} \overset{(2)}{\leq} \textbf{(2п)}$$

$$\frac{9R^3}{2(a+b+c)} \overset{(3)}{\leq} \frac{3R^3}{4\sqrt[3]{abc}}. \quad \textbf{(1п)}$$

Притоа, (1) е неравенство на Лајбниц, (2) е неравенство на Ојлер, а (3) е неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина. □

Задача 6. Нека $n > 2$ е парен цел број и V е произволно множество од 8 различни цели броеви. Нека $E(V,n)$ е множеството парови $(u,v) \in V \times V$, такви што $u < v$ и $u+v = n^k$ за некој природен број k. За секој n, одредете колку најмногу елементи може да има $E(V,n)$.

Решение 1.Ќе докажеме дека 10 е максимумот на $|E(V,n)|$, независно од n. Го разгледуваме следниов систем равенки за множеството $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$:

$$\begin{cases} v_1+v_2 = v_6+v_7 = n^5 \\ v_2+v_3 = v_5+v_6 = n^4 \\ v_1+v_8 = v_3+v_4 = n^3 \\ v_4+v_5 = v_7+v_8 = n^2 \\ v_1+v_5 = v_3+v_7 = n \end{cases} .$$

Означуваме $(a_5,a_4,a_3,a_2,a_1) = (a_5n^5+a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n)/2$. Решението на горниот систем е: $v_1 = (1,-1,1,-1,1), v_2 = (1,1,-1,1,-1), v_3 = (-1,1,1,-1,1), v_4 = (1,-1,1,1,-1), v_5 = (-1,1,-1,1,1), v_6 = (1,1,1,-1,-1), v_7 = (1,-1,-1,1,1)$ и $v_8 = (-1,1,1,1,-1)$. Очигледно, $v_6 > v_2 > v_4 > v_1 > v_7 > v_8 > v_3 > v_5$ и со оглед дека n е парен, V е множество од 8 различни цели броеви за кое $|E(V,n)| = 10$. **(1п)**

За даден број n и множество V потребен ни е бројот на ребра во прост граф $G = (V,E)$ кадешто $E = E(V,n)$. Поради погодност, ќе претпоставиме дека $e_i = (u,v) \Leftrightarrow u+v = n^{k_i}$, за секој природен број i. Ако $v_1+v_2 = n^{k_1}$ и $v_1+v_3 = n^{k_2}$ тогаш $k_1 \neq k_2$, односно ако две ребра имаат заедничко теме тогаш тие соодветствуваат на различни степени на n.

Тврдење 1. *Графот G не содржи 4-циклус.* Да претпоставиме дека $(v_1v_2v_3v_4)$ е 4-циклус содржан во G. Нека $v_1+v_2 = n^{k_1}$, $v_2+v_3 = n^{k_2}$, $v_3+v_4 = n^{k_3}$ и $v_4+v_1 = n^{k_4}$. Тогаш

$$n^{k_1}+n^{k_3} = (v_1+v2)+(v_3+v_4) = (v_2+v_3)+(v_4+v_1) = n^{k_2}+n^{k_4}.$$

Разгледувајќи го најголемиот степен на n кој ги дели двете страни на равенството $n^{k_1}+n^{k_3} = n^{k_2}+n^{k_4}$, лесно се согледува дека (k_1,k_3) е пермутација на (k_2,k_4). Од друга страна, веќе заклучивме дека $k_1 \neq k_2, k_4$, противречност. ◇

Ако графот G содржи 3-циклус со ребра $e_1 \equiv v_1v_2$, $e_2 \equiv v_2v_3$, и $e_3 \equiv v_1v_3$ (што соодветствуваат редоследно на степени n_1^k, n_2^k и n^{k_3}), тогаш имаме $2v_1 = n^{k_1}-n^{k_2}+n^{k_3}$, $2v_2 = n^{k_1}+n^{k_2}-n^{k_3}$, и $2v_3 = -n^{k_1}+n^{k_2}+n^{k_3}$. Оваа обзервација ќе ја користиме за следните две тврдења со кои ќе докажеме дека секои два триаголника (т.е. 3-циклуси) во G се на растојание барем 2.

Тврдење 2. *Графот G не содржи пар 3-циклуси кои имаат заедничко теме.* Поаѓајќи од спротивното, нека v_1 е заедничко теме на пар 3-циклуси $(v_1v_2v_3)$ и $(v_1v_4v_5)$ кои се содржани во G. Тогаш

$$\begin{aligned} n^{k_1}+n^{k_3}+n^{k_5} &= (v_1+v_2)+(v_3+v_1)+(v_4+v_5) \\ &= (v_2+v_3)+(v_1+v_4)+(v_5+v_1) \\ &= n^{k_2}+n^{k_4}+n^{k_6}\,. \end{aligned}$$

Аналогно на доказот на претходното тврдење, равенството $n^{k_1}+n^{k_3}+n^{k_5}=n^{k_2}+n^{k_4}+n^{k_6}$ повлекува дека (k_1,k_3,k_5) е пермутација на (k_2,k_4,k_6), но $k_1\neq k_2,k_4,k_6$, противречност. $\diamond$

Тврдење 3. *Графот G не содржи пар 3-циклуси кои се поврзани со ребро.* Поаѓајќи од спротивното, нека v_1 и v_4 се соседни темиња што лежат на пар 3-циклуси $(v_1v_2v_3)$ и $(v_4v_5v_6)$ содржани во G. Тогаш

$$\begin{aligned} n^{k_1}+n^{k_3}+n^{k_5}+n^{k_7} &= (v_1+v_2)+(v_3+v_1)+(v_4+v_5)+(v_6+v_4) \\ &= (v_2+v_3)+(v_1+v_4)+(v_1+v_4)+(v_5+v_6) \\ &= n^{k_2}+n^{k_4}+n^{k_4}+n^{k_6}\,. \end{aligned}$$

Аналогно на доказите на претходните две тврдења, равенството $n^{k_1}+n^{k_3}+n^{k_5}+n^{k_7}=n^{k_2}+n^{k_4}+$ $+n^{k_4}+n^{k_6}$ повлекува дека (k_1,k_3,k_5,k_7) е пермутација на (k_2,k_4,k_4,k_6), но $k_4\neq k_1,k_3,k_5,k_7$, противречност. $\diamond$ **(2п)**

Очигледно, не може да се достигне максимум ако G не е сврзан. Ќе го комплетираме доказот имајќи го предвид најголемиот циклус во G.

Случај 1. Најголемиот циклус во G е со должина 8 (C_8)
Нека $(v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8)$ е тој циклус. Од тврдење 1 следува дека дополнителни ребра (v_i,v_j) може да има само за $|i-j|\in\{2,4,6\}$. Ако за сите вакви ребра важи $|i-j|\neq 4$, тогаш за да бидат исполнети тврдењата 2 и 3 мора ребрата да се (v_i,v_{i+2}) и (v_{i+4},v_{i+6}), т.е. има најмногу 10 ребра. Ако пак има ребро за кое $|i-j|=4$, на пример (v_2,v_6), тогаш единствени дозволени ребра (имајќи го предвид Тврдење 1) се (v_1,v_3), (v_4,v_8) (v_5,v_7). Но од тврдењата 1 и 3 следува дека не може да има две од овие ребра истовремено.

Случај 2. Најголемиот циклус во G е со должина 7 (C_7)
Нека $(v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7)$ е тој циклус. Од тврдењата 1, 2 и 3 следува дека може да имаме најмногу уште едно ребро, помеѓу седумте темиња во циклусот. Последното теме може да биде поврзано најмногу со две несоседни темиња. Навистина ако е поврзано со соседи ќе имаме C_8, а ако е поврзано со три темиња ќе има C_4. Заклучуваме дека има најмногу $10=7+1+2$ ребра.

Случај 3. Најголемиот циклус во G е C_6 и преостанатите две темиња се поврзани
Нека $(v_1v_2v_3v_4v_5v_6)$ е тој циклус и (v_7,v_8) е седмо ребро. Ниту едно од темињата v_7 и v_8 не е поврзано со два соседи, бидејќи тогаш би имале C_7. Од Твдење 1 следува дека не може да е поврзано ниту со v_i и v_{i+2}. Да претпоставиме дека v_7 е поврзано со две спротивни темиња, на пример v_2 и v_5. Тогаш v_8 не може да е поврзано со останатите темиња (v_1, v_3, v_4 и v_6) бидејќи креира C_4. Слично не е поврзано со v_2 и v_5 истовремено. Доколку е поврзано со едно од нив, од Тврдења 2 и 3 следува дека нема дополнителни ребра во графот, т.е. има вкупно 10. Од друга страна може да има најмногу уште едно ребро меѓу v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и v_6, па во ваков случај имаме најмногу $10=7+2+1$ ребра (почетни + ребра од v_7 и v_8 + меѓу v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и v_6).

Случај 4. Најголемиот циклус во G е C_6 и преостанатите две темиња не се поврзани
Како и во претходниот случај v_7 и v_8 може да се поврзани само со спротивни темиња. Доколку се поврзани со најмногу три ребра, имаме најмногу $6+3+1=10$ ребра. Да претпоставиме дека се поврзани со по две ребра. Тоа не може да се со истите темиња, па нека бидат (v_7,v_1), (v_7,v_4), (v_8,v_2) и (v_8,v_5). Сега имаме циклус $(v_1v_7v_4v_3v_2v_8v_5v_6)$, што се сведува на првиот случај.

Случај 5. Најголемиот циклус во G е со должина 5^- (C_5 или C_3).
Единствените циклуси кои можат да постојат се C_3 и C_5. Според ова два циклуса немаат заедничко ребро (во спротивно тоа би креирало C_4, C_6, C_7 или C_8). Од тврдење 2 следува дека има најмногу два циклуса кои немаат заедничко ребро. Сврзан граф G со 8 темиња и два циклуса кои немаат заедничко ребро има најмногу 9 ребра.

(4п)

Заклучуваме дека $|E(V,n)| \leq 10$. $\square$

Решение 2. Конструкцијата е како и во првото решение. **(1п)**
За даден парен број n и множество V се обидуваме да ги преброиме ребрата на едноставниот граф $G(V,E)$ каде $E = E(V,n)$. Можеме да претпоставиме дека $e_i = (u,v) \Leftrightarrow u + v = n^{k_i}$, за секој i. Да забележиме дека ако $v_1 + v_2 = n^{k_1}$ и $v_1 + v_3 = n^{k_2}$ тогаш $k_1 \neq k_2$; со други зборови, секои две соседни ребра соодветствуваат на различни степени на n.

Тврдење 1. *Графот G не содржи 4-циклус.*

Тврдење 2. *Графот G не содржи пар 3-циклуси кои имаат заедничко теме.*

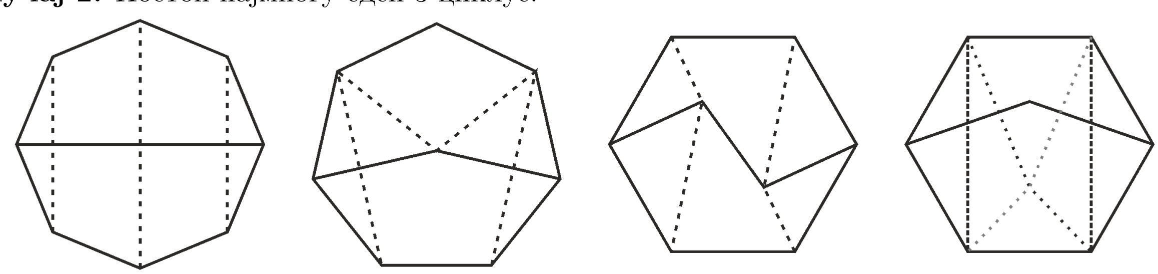
Тврдење 3. *Графот G не содржи пар 3-циклуси кои се поврзани со ребро.*

(2п)

Доказот ќе го комплетираме со разгледување на вкупниот број на 3-циклуси во графот G. Има две можности:

Случај 1. Постојат барем два 3-циклуси.
Нека $G_1 = (v_1v_2v_3)$ и $G_2 = (v_4v_5v_6)$ се 3-циклуси во G. Според Тврдење 2, овие два триаголника користат 6 (различни) темиња, што повлекува дека не може да постојат други 3-циклуси. Од Тврдење 3, не постои ребро помеѓу G_1 и G_2. Според Тврдење 1, секое од преостанатите две темиња v_7 и v_8 е споено со ребро со најмногу по едно теме од даден 3-циклус, што дава уште најмногу 4 нови ребра. Доколку постои и реброто v_7v_8, тогаш имајќи ги предвид Тврдењата 1 и 2, не е можно обете темиња v_7 и v_8 да се споени со ист 3-циклус. Значи, ако v_7v_8 е присутно, тогаш графот има најмногу 9 ребра. Од друга страна, во отсуство на v_7v_8, графот може да има најмногу 10 ребра. **(1п)**

Случај 2. Постои најмногу еден 3-циклус.



Да забележиме дека ако графот G нема ниту еден циклус, тогаш G има најмногу $n - 1 = 7$ ребра. Можеме да претпоставиме дека постои 5^+-циклус (т.е. циклус со должина барем 5) во G, во спротивно G не може да има повеќе од 10 ребра. Го разгледуваме најкраткиот таков 5^+-циклус, го именуваме C'. Јасно, C' користи барем 5 темиња од G. Доколку C' е единствениот 5^+-циклус во G, тогаш G има најмногу 9 ребра (имено, со отстранување на две ребра преостанува ацикличен граф). Затоа можеме да претпоставиме дека C' не е единствениот 5^+-циклус. Го разгледуваме најдолгиот 5^+-циклус $C'' \neq C'$. Да забележиме дека $C' \cup C''$ користи барем 7 темиња.
Доколку сме ги искористиле сите 8 темиња за $C' \cup C''$, тогаш единствените можности се прикажани на горниот цртеж (лево - $C', C'' = C_5$, во средина лево - $C' = C_5$ и $C'' = C_6$, во средина десно - $C', C'' = C_6$). На првите два цртежи испрекинатите линии се единствените

преостанати можности за дополнителни ребра; лесно е да се воочи дека никои две такви ребра не може да се присутни истовремено. На третиот цртеж не може да се додаде ребро без да се добие C_4, ниту C_5 (што би го свело на вториот цртеж).
Од друга страна, ако $C' \cup C''$ користи точно 7 темиња, тогаш единствените можности се прикажани на цртежот (десно - $C', C'' = C_5$, односно $C' = C_5$ и $C'' = C_6$, прикажани со истиот граф). Ако постои C_3 кој го користи последното (осмо) теме (и нема C_4) се навраќаме на веќе разгледаните графови. Може да постои најмногу едно дополнително ребро чии завршетоци се обата во $C' \cup C''$ (означено со испрекината линија). Единствените можности за две ребра од последното (осмо) теме се означени со точкести сиви и црни линии. Но, ваквите ребра ги забрануваат испрекинатите ребра, па повторно бројот на ребра не надминува 10. **(3п)**
Заклучуваме дека најголемата можна кардиналност на $E(V, n)$ е 10. $\square$