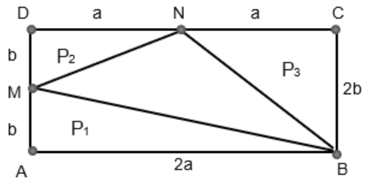
ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
3.5.2025 година

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Точките M и N се средини на страните $\overline{AD}=2b$ и $\overline{CD}=2a$ на правоаголникот $ABCD$. Колкав процент зафаќа плоштината на триаголникот MBN во однос на плоштината на правоаголникот $ABCD$?

Решение. Ако $2a=\overline{AB}=\overline{CD}, 2b=\overline{BC}=\overline{AD}$, тогаш $a=\overline{CN}=\overline{ND}, b=\overline{AM}=\overline{MD}$. Со помош на точките M и N се формираат правоаголните триаголници ABM, MND, BCN со плоштини P_1, P_2, P_3 соодветно, и притоа



$$P_1=\frac{2a\cdot b}{2}=ab, P_2=\frac{a\cdot b}{2}, P_3=\frac{a\cdot 2b}{2}=ab.$$ (**6 поени**)

Плоштината на правоаголникот е $P=2a\cdot 2b=4ab$. (**2 поени**) Плоштината на триаголникот може да се добие кога од плоштината на правоаголникот ќе се одземат плоштините на трите правоаголни триаголници. Според тоа,

$$P_{\triangle}=P-P_1-P_2-P_3=4ab-ab-\frac{a\cdot b}{2}-ab,$$ (**5 поени**)

односно

$$P_{\triangle}=2ab-\frac{ab}{2}=\frac{4ab}{2}-\frac{ab}{2}=\frac{3ab}{2}.$$ (**5 поени**)

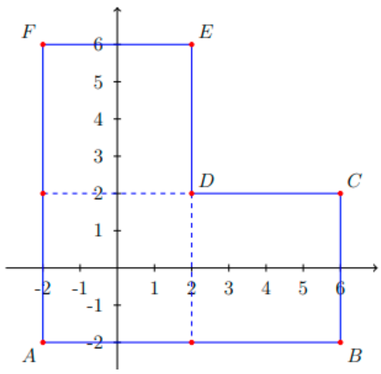
Конечно добиваме дека

$$P_{\triangle}:P\cdot 100=\frac{3ab}{2}:4ab\cdot 100=1,5ab:4ab\cdot 100=0,375\cdot 100=37,5\%.$$ (**2 поени**)

2. Во правоаголен координатен систем во рамнината зададени се точките $A(-2,-2), C(6,2)$ и $E(2,6)$. Точката B е симетрична точка на точката C во однос на x-оската, точката D е симетрична точка на точката A во однос на правата која минува низ координатниот почеток и низ точката $(-1,1)$ и точката F е симетрична точка на точката E во однос на y-оската.

а) Одреди ги координатите на точките B, D и F.

б) Поврзи ги по следниов редослед точките A, B, C, D, E, F, A и пресметај ги периметарот и плоштината на така добиената фигура. Единица должина е 1cm.



Решение. За точна скица се доделуваат **5 поени**.

а) Координатите на бараните точки се $B(6,-2)$, $D(2,2)$, $F(-2,6)$. (**9 поени**)

б) Периметарот на фигурата е $L=8+4+4+4+4+8=32\,\text{cm}$. (**5 поени**)

Фигурата се состои од 3 квадрати со исти страни, па плоштината е $P=3\cdot 4^2=3\cdot 16=48\,\text{cm}^2$. (**6 поени**)

3. Колку петцифрени природни броеви со различни цифри постојат, ако цифрите 5 и 6 се појавуваат на соседни позиции во бројот?

Решение. Ако цифрите 5 и 6 се на позицијата на десет илјади и илјади и обратно, броевите се со запис $\overline{56abc}$ или $\overline{65abc}$. Цифрата a можеме да ја избереме од множеството $\{0,1,2,3,4,7,8,9\}$ на 8 различни начини, цифрата b на 7 начини, а цифрата c на 6, па имаме $2\cdot 8\cdot 7\cdot 6=672$ броеви. (**10 поени**)

Ако цифрите 5 и 6 се на позицијата илјади и стотки и обратно, броевите се со запис $\overline{d56ef}$ или $\overline{d65ef}$. Цифрата d можеме да ја избереме од множеството $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ на 7 различни начини, затоа што бројот не може да започне со цифрата 0, цифрата e на 7 начини затоа што може да биде 0, а цифрата f на 6, па имаме $2\cdot7\cdot7\cdot6=588$ броеви. (**10 поени**)

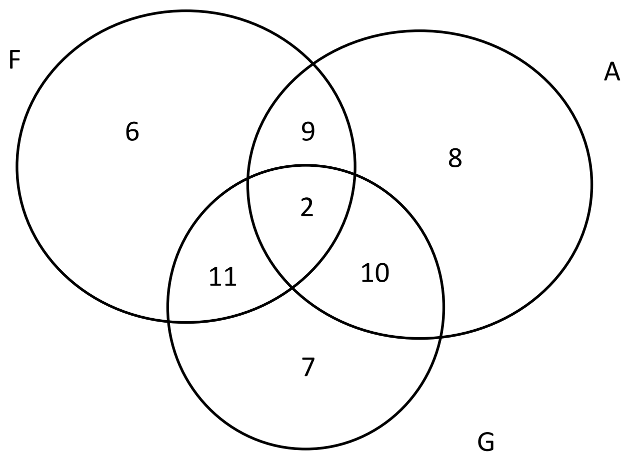
Ако цифрите 5 и 6 се на позицијата стотки и десетки и десетки и единици и обратно, броевите се со запис $\overline{mn56k}$ или $\overline{mn65k}$ и $\overline{pqr56}$ или $\overline{pqr65}$, исто така имаме 588 броеви. Значи, вкупно ќе има $672+3\cdot588=2436$ броеви. (**5 поени**)

4. На еден семинар учествувале одреден број на учесници и секој од нив зборува барем еден странски јазик, англиски, германски или француски јазик. Притоа, за учесниците важат и следните услови:

- 2 учесника ги зборуваат сите три јазика,
- 9 учесника зборуваат само француски и англиски јазик,
- 13 учесника зборуваат француски јазик и германски јазик,
- 12 учесника зборуваат германски и англиски јазик,
- 29 учесника зборуваат англиски јазик,
- 6 учесника зборуваат само француски јазик,
- 7 учесника зборуваат само германски јазик.

Определи ги вкупниот број на учесници на семинарот и бројот на учесници на семинарот кои зборуваат само англиски јазик.

Решение. Прв начин. Веновиот дијаграм кој одговара на дадените услови е



(**15 поени**)

Од овде заклучуваме дека вкупниот број на учесници на семинарот е еднаков на $6+9+8+11+2+10+7=53$, односно 53 учесника. (**5 поени**) Само англиски јазик зборуваат 8 учесника. (**5 поени**)

Втор начин. Нека x е бројот на учесници кои го зборуваат само англискиот јазик. Од тоа што 29 учесници зборуваат англиски јазик, следува дека 29 лица зборуваат англиски јазик и некој друг јазик. Англиски и француски јазик (без германски) зборуваат 9 учесници, англиски и германски јазик (без француски) зборуваат 12-2=10 учесници и сите три јазици ги зборуваат 2 учесници. (**5 поени**) Според тоа, добиваме дека $x+9+10+2=29$, односно $x=29-21=8$ учесници зборуваат само англиски јазик. (**10 поени**) Вкупниот број на учесници на семинарот е еднаков на $6+9+8+11+2+10+7=53$, односно 53 учесника. (**10б**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Дадена е дропката $\frac{99}{101}$, која е запишана и како децимален број.

а) Најди ја цифрата што стои на 2025. позиција после децималната запирка во записот како децимален број.
б) Определи го n, така што $S_n=2025$, каде S_n е збирот на првите n цифри после децималната запирка на дадената дропка запишана како децимален број.

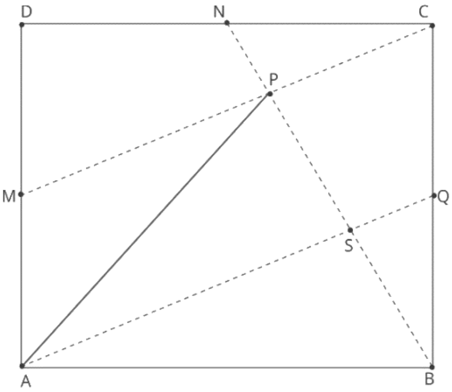
Решение. Дадената дропка запишана како децимален број е од облик $\frac{99}{101}=0,(9801)$, од каде следува дека е периодичен децимален број .
а) Ја бараме цифрата што стои на 2025. позиција после децималната запирка во записот како децимален број. Имаме $2025=4\cdot 506+1$, па остатокот 1 покажува дека првата цифра од периодот е бараната цифра, во нашиот случај тоа е 9. (**10 поени**)
б) Збирот на цифрите на бројот 9801 е еднаков на 9+8+0+1=18. (**5 поени**) Од тоа што бројот 2025 може да се претстави како $2025=112\cdot 18$ +9, добиваме дека $n=112\cdot 4+1=448+1=449$, односно збирот на првите 449 цифри после децималната запирка е 2025. (**10 поени**)

2. Нека a,b и c се различни прости едноцифрени броеви. Определи ги сите броеви од обликот $\overline{ab301c}$ кои се деливи со 66.
Решение. Бројот 66 го разложуваме на прости множители, односно $66=2\cdot 3\cdot 11$. (**5 поени**) Јасно е дека бројот $\overline{ab301c}$ треба да биде парен. Затоа што бројот 2 е единствениот парен прост број, добиваме дека $c=2$, односно бројот е од облик $\overline{ab3012}$. (**5 поени**) За да биде бројот делив со 3, збирот на цифрите треба да биде делив со 3, па добиваме дека збирот $a+b+3+0+1+2$ мора да биде делив со 3, односно $a+b+6$ да е делив со 3, односно $a+b$ е делив со 3. (**5 поени**) Исто така, од условот на задачата, цифрите се различни прости едноцифрени броеви, така добиваме дека $a,b\in\{3,5,7\}$, односно единствена можност за $\overline{ab3012}$ да биде делив со 3 е $a,b\in\{5,7\}$ (**5 поени**).
Значи, ги добиваме броевите 573012 и 753012. Од нив делив со 11 е 573012, па тоа е единствениот број што ги исполнува условите на задачата. (**5 поени**)

3. Две свеќи со различна должина и дебелина чинат 360 денари. Цените на свеќите се во ист однос како и нивните должини. Подолгата свеќа целосно ќе изгори за 3,5 часа од палењето, а пократката за 5 часа од палењето. Ако истовремено се запалат, после два часа горење должините ќе им се изедначат. Определи за колку проценти е подолга едната свеќа од другата и колку чини секоја од нив?
Решение. Нека со a ја означиме должината на подолгата свеќа, а со b на пократката свеќа. Од условот на задачата следува дека од подолгата свеќа за еден час ќе изгори $\frac{a}{3,5}=\frac{a}{\frac{35}{10}}=\frac{2}{7}a,$ а од пократката за еден час ќе изгори $\frac{1}{5}b$. (**5 поени**) После 2 часа горење, од подолгата свеќа ќе се потроши $2\cdot\frac{2a}{7}$, а од пократката $2\cdot\frac{b}{5}$. Од условот дека после 2 часа горење нивните должини ќе се изедначат, добиваме равенка од следниот облик $a-2\cdot\frac{2a}{7}=b-2\cdot\frac{b}{5}$, односно $\frac{3}{7}a=\frac{3}{5}b$, т.е. $\frac{1}{7}a=\frac{1}{5}b$. Оттука, $a=\frac{7}{5}b$, односно $a=1,40b$, што значи дека a е 40% подолга од b. (**10 поени**) Нека x е цената на првата а y на втората свеќа. Бидејќи цените на свеќите се во ист однос како и нивните должини, добиваме дека $x=1,4y$. Од условот на задачата знаеме дека $x+y=360$. Оттука добиваме дека $y=150$ и $x=210$. (**10 поени**)

4. Нека M и N се средини на страните AD и CD, соодветно, на квадратот $ABCD$. Отсечките BN и CM се сечат во точката $P.$ Докажи дека должината на отсечката AP е еднаква со должината на страната на квадратот.
Решение. За правоаголните триаголници BCN и CDM важи $\triangle BCN\cong\triangle CDM$ (според CAC, т.е. тие имаат две еднакви катети). (**5 поени**) Оттука, $\measuredangle BNC=\measuredangle CMD$ и $\measuredangle CBN=\measuredangle DCM$. За $\triangle CPN$ важи следново $\measuredangle CNP+\measuredangle PCN=\measuredangle CMD+\measuredangle PCN=\measuredangle CMD+\measuredangle MCD=90^0$ па следува дека $CM\perp BN$. (**7 поени**)

Нека Q е средина на страната BC. Четириаголникот $AQCM$ е паралелограм, па тогаш правата SQ е средна линија на $\triangle BCP$, а точката S, во која се сечат BP и AQ е средина на отсечката BP. (**8 поени**) Уште повеќе $AQ \perp BP$ па правата AQ е симетрала на отсечката BP. Оттука, $\overline{AP} = \overline{AB}$. (**5 поени**)



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Докажи дека бројот $1^{2025}+2^{2025}+3^{2025}+4^{2025}+5^{2025}+6^{2025}+9^{2025}$ е делив со 10.

Решение. Јасно $1^{2025}=1$. (**1 поен**) Степените на 2, завршуваат на броевите 2,4,8,6 наизменично, па од $2^{2025}=2^{4\cdot 506+1}$, следува дека 2^{2025} завршува на 2. (**4 поени**) Степените на 3, завршуваат на броевите 3,9,7,1 наизменично, па од $3^{2025}=3^{4\cdot 506+1}$, следува дека 3^{2025} завршува на 3. (**4 поени**) Степените на 4 завршуваат на броевите 4 и 6, наизменично, па од $4^{2025}=4^{2\cdot 1012+1}$, добиваме дека 4^{2025} завршува на 4. (**3 поени**) Степените на 5, завршуваат на 5, па 5^{2025} завршува на 5, (**3 поени**) а степените на 6 завршуваат на 6, па 6^{2025} завршува на 6. (**3 поени**) Степените на 9 завршуваат на 9 и 1 наизменично, па од $9^{2025}=9^{2\cdot 1012+1}$, добиваме дека 9^{2025} завршува на 9. (**3 поени**) Од тоа што 1+2+3+4+5+6+9=30, следува дека дадениот број завршува на 0, односно дека е делив со 10. (**4 поени**)

2. Нека $n \geq 1$ е природен број. Докажи дека n и $n+4$ не можат да се полни квадрати на природни броеви истовремено.

Решение. Нека n е природен број. Да претпоставиме дека n и $n+4$ можат да се полни квадрати на природни броеви истовремено. Според тоа, постојат природни броеви m и p, така што $n=m^2$ и $n+4=p^2$. (**3 поени**) Тогаш, $n=m^2$ и $n=p^2-4$, од каде следува дека $m^2=p^2-4$, односно $p^2-m^2=4$. (**3 поени**) Од последното добиваме дека $(p-m)(p+m)=4$. (**4 поени**) Бидејќи, p и m се природни броеви, $p+m$ е природен број, па и $p-m$ е исто така природен број, односно $p-m>0 \Rightarrow p>m$. (**3 поени**) Од сето ова, и од тоа што $4=1\cdot 4=4\cdot 1=2\cdot 2$ ги разгледуваме следните три случаи:

Случај 1. Нека $p-m=1$ и $p+m=4$. Тогаш, $p=m+1$, па со замена во $p+m=4$, добиваме дека $m+1+m=4 \Leftrightarrow 2m=3 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$. Но, ова противречи на тоа дека $m \in \mathbb{N}$. (**4 поени**)

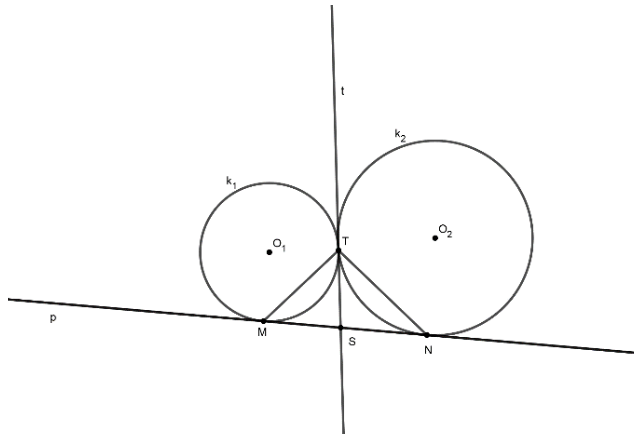
Случај 2. Нека $p-m=4$ и $p+m=1$. Тогаш, $p=m+4$, па со замена во $p+m=1$, добиваме дека $m+4+m=1 \Leftrightarrow 2m=-3 \Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$. Но, ова противречи на тоа дека $m \in \mathbb{N}$. (**4 поени**)

Случај 3. Нека $p-m=2$ и $p+m=2$. Тогаш, $p=m+2$, па со замена во $p+m=4$, добиваме дека $m+2+m=2 \Leftrightarrow 2m=0 \Leftrightarrow m=0$. Но, ова противречи на тоа дека $m \in \mathbb{N}$. (**4 поени**)

Следува дека со секој случај, претпоставката не е точна, со што докажавме дека n и $n+4$ не можат да се полни квадрати на природни броеви истовремено.

3. Две кружници k_1 и k_2 се допираат однадвор во точка T. Една нивна заедничка тангента ги допира кружниците во точките M и N. Определи ја големината на аголот MTN.

Решение. Нека p е заедничката тангента на кружниците која ги допира во точките M и N. Во точката T повлекуваме заедничка тангента t на кружниците. Нека S е пресечна точка на тангентите t и p. (**5 поени**) Притоа важи: $\overline{ST}=\overline{SM}$ (бидејќи се тангентни отсечки за кружницата k_1 од точката S) (**5 поени**) и $\overline{ST}=\overline{SN}$ (бидејќи се тангентни отсечки за кружницата k_2 од точката S). (**5 поени**) Од ова, следува дека $\overline{SM}=\overline{ST}=\overline{SN}$, односно M, N и T се точки од кружница со центар во S и дијаметар MN. (**5 поени**) Аголот MTN е периферен агол над дијаметарот MN, па од Талесовата теорема, следува дека $\angle MTN=90^\circ$. (**5 поени**)



4. Ема заминала на патување со одредена сума на пари. Првиот ден потрошила 1 денар и $\frac{1}{100}$ од остатокот од сумата. Вториот ден потрошила 11 денари, а потоа $\frac{1}{100}$ од новиот остаток. Третиот ден потрошила 21 денари, а потоа $\frac{1}{100}$ од новиот остаток итн. Последниот ден потрошила онолку парични средства колку што потрошила сите претходни денови заедно. Колку денови Ема била на патување, ако секој ден освен последниот трошела иста сума на парични средства и се вратила со 59301 денари?

Решение. Нека x е сумата на пари која ја понела Ема со себе на патувањето. Првиот ден потрошила $1+\frac{x-1}{100}$, (**2 поени**) па и останале $x-1-\frac{x-1}{100}$ денари. (**2 поени**) Вториот ден потрошила 11 денари, а потоа $\frac{1}{100}$ од остатокот, односно вториот ден потрошила $11+\frac{1}{100}\left(x-1-\frac{x-1}{100}-11\right)=11+\frac{1}{100}\left(x-\frac{x-1}{100}-12\right)$. (**4 поени**) Бидејќи секој ден освен последниот трошела иста сума на парични средства, добиваме дека треба да важи $1+\frac{x-1}{100}=11+\frac{1}{100}\left(x-\frac{x-1}{100}-12\right)$. (**4 поени**) Со решавање на последната равенка добиваме дека

$$1+\frac{x-1}{100}=11+\frac{1}{100}\left(x-\frac{x-1}{100}-12\right)\Leftrightarrow 100+x-1=1100+x-\frac{x-1}{100}-12\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{100}+x-x=1100-12-100+1\Leftrightarrow\frac{x-1}{100}=989\Leftrightarrow x-1=98900\Leftrightarrow x=98901,$$

односно дека Ема заминала на патување со 98901 денари. (**5 поени**) Со замена за $x=98901$ во $1+\frac{x-1}{100}$, добиваме дека првиот ден потрошила 990 денари. (**1 поен**) Од условот и сите наредни денови освен последниот ја потрошила истата сума на пари. Нека y е сумата која ја потрошила последниот ден и n е бројот на денови кога била на патување. Од условот, последниот ден потрошила онолку парични средства колку што потрошила сите претходни денови заедно, па $y=990(n-1)$. Исто така знаеме дека вратила 59301 денари, па добиваме дека $2y+59301=98901$. (**3 поени**) Со решавање на последната равенка, добиваме дека

$$2\cdot 990(n-1)+59301=98901\Leftrightarrow 2\cdot 990(n-1)=98901-59301\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1980(n-1)=39600\Leftrightarrow n-1=20\Leftrightarrow n=21,$$

односно добиваме дека Ема била на патување 21 дена. (**4 поени**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 9 ОДДЕЛЕНИЕ

1. За еден природен број велиме дека го има својството $\mathcal{P}$, ако тој може да се претстави како збир на квадратите на два различни природни броја. Нека n е природен број, така што бројот $9n$ го има својството $\mathcal{P}$. Докажи дека за кој било природен број a, бројот $(a^2+1)n$ го има својството $\mathcal{P}$.

Решение. Бидејќи бројот $9n$ го има својството $\mathcal{P}$, постојат природни броеви x и y такви што

$$9n = x^2 + y^2.$$

Следува дека $3|x$ и $3|y$, односно $x = 3u$ и $y = 3v$, за некои природни броеви u и v. Со замена, добиваме дека

$$9n = (3u)^2 + (3v)^2\,,$$
$$9n = 9u^2 + 9v^2\,,$$
$$n = u^2 + v^2.$$

Следува дека, ако бројот $9n$ го има својството $\mathcal{P}$, тогаш и бројот n го има својството $\mathcal{P}$. (**10** поени)

Ако $x < y$, тогаш $u < v$, па имаме

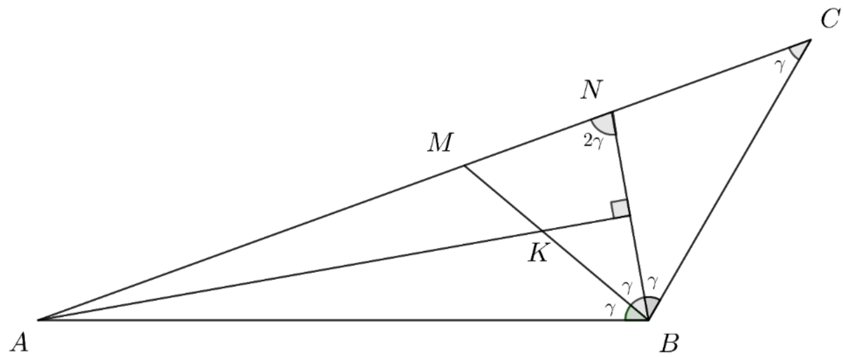
$$\begin{aligned}(a^2+1)n &= (a^2+1)(u^2+v^2) = \\ &= a^2u^2 + a^2v^2 + u^2 + v^2 = \\ &= a^2u^2 + 2\cdot au\cdot v + v^2 + a^2v^2 - 2\cdot av\cdot u + u^2 = \\ &= (au+v)^2 + (av-u)^2\,,\end{aligned}$$

Ако, пак, $y < x$, односно $v < u$, тогаш

$$\begin{aligned}(a^2+1)n &= (a^2+1)(u^2+v^2) = \\ &= a^2u^2 + a^2v^2 + u^2 + v^2 = \\ &= a^2u^2 - 2\cdot au\cdot v + v^2 + a^2v^2 + 2\cdot av\cdot u + u^2 = \\ &= (au-v)^2 + (av+u)^2,\end{aligned}$$

односно и бројот $(a^2+1)n$ може да се претстави како збир на квадратите на два природни броја, односно го има својството $\mathcal{P}$. (**15**поени)

2. Во триаголникот ABC, аголот ABC е трипати поголем од аголот ACB. На страната AC земени се точки M и N (M лежи меѓу A и N), така што $\measuredangle ABM = \measuredangle MBN = \measuredangle NBC$. Од точката A на правата BN е спуштена нормала која ја сече отсечката BM во точка K. Докажи дека правата NK е симетрала на $\measuredangle ANB$.



Решение. Нека $\measuredangle ACB = \gamma$. Тогаш, според условите во задачата имаме дека $\measuredangle ABC = 3\gamma$ и $\measuredangle ABM = \measuredangle MBN = \measuredangle NBC = \gamma$. Ќе забележиме дека $\measuredangle ANB = 2\gamma$ како надворешен агол за триаголникот NBC. (**10** поени)

Тогаш од равенството $\measuredangle ABN = \measuredangle ANB$ следува дека триаголникот ABN е рамнокрак, а неговата висина AK е симетрала на $\measuredangle NAB$. Освен тоа, во триаголникот ABN правата BK е симетрала на $\measuredangle ABN$. (**10** поени) Но, во триаголникот трите симетрали се сечат во една точка, а во нашиот случај тоа е точката K. Следува дека симетрала на $\measuredangle ANB$ е правата NK, што требаше да се докаже. (**5** поени)

3. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$. Докажи дека $\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = a - b$.

Решение. Јасно, $a > 0$ и $b > 0$. Од равенството $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$ ќе го изразиме b преку a. Добиваме дека

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{b}{b+1} \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} = \frac{b+1-b}{b+1} \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} = \frac{1}{b+1}\,,$$

односно $\frac{a+1}{a} = \frac{b+1}{1} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} = b+1$, од каде следува дека $b = \frac{1}{a}$. (**10** поени) Тогаш

$$\frac{a}{b^2+1}-\frac{b}{a^2+1}=\frac{a}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}-\frac{\frac{1}{a}}{a^2+1}=\frac{a}{\frac{1}{a^2}+1}-\frac{1}{a(a^2+1)}=$$

$$=\frac{a}{\frac{1+a^2}{a^2}}-\frac{1}{a(a^2+1)}=\frac{a^3}{a^2+1}-\frac{1}{a(a^2+1)}=\frac{a^4-1}{a(a^2+1)}.$$ (**10** поени)

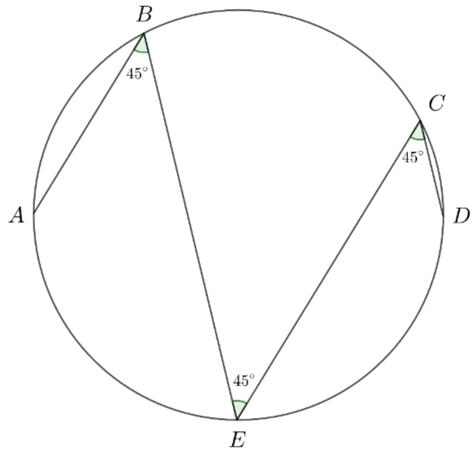
Но, $a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$, па следува дека

$$\frac{a}{b^2+1}-\frac{b}{a^2+1}=\frac{(a^2-1)(a^2+1)}{a(a^2+1)}=\frac{a^2-1}{a}=a-\frac{1}{a}=a-b\,,$$

што требаше да се докаже. (**5** поени)

4. На кружницата k се распоредени точките A, B, C, D и E, по дадениот редослед, во насока на движење на стрелките на часовникот, така што $\measuredangle ABE=\measuredangle BEC=\measuredangle ECD=45^\circ$. Докажи дека

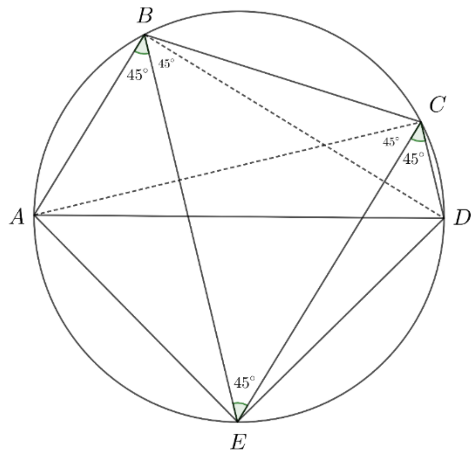
$$\overline{AB}^2+\overline{CE}^2=\overline{BE}^2+\overline{CD}^2.$$



Решение: Бидејќи $\measuredangle ABE=\measuredangle BEC$ имаме дека $AB||EC$. Значи четириаголникот $ABCE$ е трапез. Исто така, бидејќи $\measuredangle BEC=\measuredangle ECD$ имаме дека $BE||CD$. Значи и четириаголникот $BEDC$ е трапез. (**5** поени)

Од друга страна, тетивите AE, BC и ED се еднакви меѓу себе, т.е. $\overline{AE}=\overline{BC}=\overline{ED}$. Поради тоа $ABCE$ и $BEDC$ се рамнокраки трапези. …… (**5** поени)

Аглите $\measuredangle EBD=\measuredangle ECD=45^\circ$, како агли над ист кружен лак $\widehat{ED}$, па следува дека $\measuredangle ABD=90^\circ$. Исто така аглите $\measuredangle ABE=\measuredangle ACE=45^\circ$, како агли над ист кружен лак $\widehat{AE}$, па следува дека $\measuredangle ACD=90^\circ$. Значи $\overline{AD}$ е дијаметар на кружницата k. (**5** поени)



Затоа, според Питагоровата теорема

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2 \quad \text{и} \quad \overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$$

односно $\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$. (**5** поени)

Но, $\overline{BD}=\overline{CE}$ како дијагонала во рамнокракиот трапез $BEDC$ и $\overline{AC}=\overline{BE}$ како дијагонала во рамнокракиот трапез $ABCE$. Следува дека

$$\overline{AB}^2+\overline{CE}^2=\overline{BE}^2+\overline{CD}^2.$$ (**5** поени)