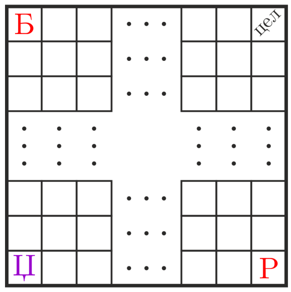
29. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Решенија на задачите со маркинг шема

18 мај 2025 година

Задача 1. Бетмен, Робин и Џокер се во три од ќошевите на квадратна 2025×2025 табла, така што Бетмен и Робин се на две полиња од иста дијагонала (цртеж десно). Во секој круг, прво Џокер се поместува на соседно поле (поле кое има заедничка страна), без да излезе од таблата. Потоа, во истиот круг Бетмен и Робин се поместуваат секој на соседно поле. Џокер победува ако успее да стигне на четвртото ќошно поле (цел на цртежот), а Бетмен и Робин ако го фатат Џокер, т.е. ако барем еден од нив се најде на исто поле со Џокер.



Ако во секој чекор, секој гледа каде се придвижиле останатите двајца, кој има победничка стратегија, Џокер или Бетмен и Робин? Образложи го одговорот.

Забелешка. Бетмен и Робин ја договараат стратегијата пред почетокот.

Решение. Една стратегија за победа на Бетмен и Робин е следната: Робин, кој е во ист ред со Џокер се движи така што останува во ист ред, а Бетмен, кој е во иста колона останува во иста колона со Џокер. Дополнително ако Џокер не го сменил редот/колоната, Робин/Бетмен се придвижува кон Џокер. **(2п.)**

На овој начин во секој чекор Џокер ќе биде во ист ред со Робин (лево) и во иста колона со Бетмен (долу), па во никој случај Џокер не може да стигне до ќошот горе-десно, т.е. не може да победи. **(1п.)**

Доказот дека Бетмен и Робин победуваат со оваа стратегија ќе го направиме на два начини.

Доказ 1: Го разгледуваме растојанието од Џокер до Бетмен и до Робин. На почетокот ова растојание е 2024 до секој од нив. Јасно ова растојание не може да се зголеми, бидејќи Бетмен и Робин или одат паралелно со Џокер (ако оди налево или надолу) или едниот се приближува за две полиња кон него (ако оди нагоре, а Бетмен надолу или оди надесно, а Робин налево). **(3п.)**

Освен тоа движењето налево и надолу е ограничено со рамката на таблата, па Џокер не може да го прави до бесконечност. Според ова во некои од чекорите растојанието ќе се намалува и по конечно многу чекори ќе биде нула, до Бетмен или до Робин. Со ова победуваат Бетмен и Робин. **(2п.)** ■

Доказ 2: Разгледуваме правоаголник P со едно теме во долниот лев ќош и страни спротивни на него: хоризонтална над полето во кое е Бетмен и вертикална десно од полето во кое е Робин (по секој круг правоаголникот се менува). Ако ги обоиме полињата на таблата наизменично црно-бело, забележуваме дека тројцата се на исто обоени полиња (2025 е непарен). Дополнително во секој чекор одат на соседно поле, па бојата за секој од нив се менува. Оттука, после секој чекор на Бетмен и Робин, тројцата се на полиња во една боја. Според ова доколку Џокер во некој момент се најде на горната/десната страна од P, тој е на исто поле со Бетмен/Робин и тие победуваат. **(3п.)**

Бидејќи во секој круг Бетмен или Робин се придвижува кон Џокер, должината на барем една од страните на P се намалува за 1. Заклучуваме дека по конечно многу чекори Бетмен или Робин ќе биде на исто поле со Џокер (ако Џокер оди на поле на растојание еден од страната на P или кога должината на едната страна ќе се намали на 1). Со ова Бетмен и Робин победуваат. **(2п.)** ■

Забелешка. Победничка стратегија за Бетмен и Робин носи 2 поени.

Забелешка. Доказ дека Џокер не може да победи носи 1 поен.

Задача 2. Нека B_1 е подножјето на висината повлечена од темето B кон страната AC во остроаголниот $\triangle ABC$. Точката D е средина на страната AB, а точката O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Правата B_1D ја сече правата CO во точката E. Докажи дека точките B, C, B_1 и E лежат на иста кружница.

Решение 1. Нека C_1 е подножјето на висината повлечена од темето C кон страната AB. Од

$$\angle BC_1C = \angle BB_1C = 90^\circ$$

следува дека четириаголникот BCB_1C_1 е тетивен. **(1п.)**

Нека опишаната кружница околу четириаголникот BCB_1C_1, по втор пат ја сече правата CO во точка E'. Тогаш

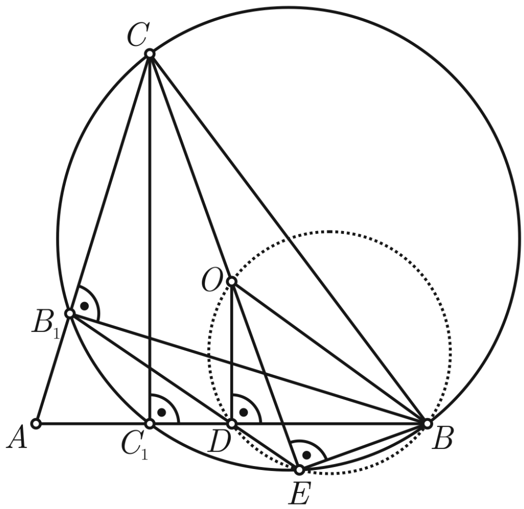
$$\angle BE'O \equiv \angle BE'C = \angle BC_1C = 90^\circ = \angle BDO.$$

Следува дека E' лежи на опишаната кружница околу $\triangle BOD$. **(2п.)**

Оттука $\angle E'DB = \angle E'OB = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 2\angle BAC$. **(2п.)**

Бидејќи $\angle BB_1C = 90^\circ$, а D е средина на AB, таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABB_1$, па $DB_1 = DA$. Оттука $\angle BDB_1 = 2\angle BAB_1 \equiv 2\angle BAC$. **(2п.)**

Заклучуваме дека B_1, D и E' се колинеарни, па $E \equiv E'$, т.е. точката E лежи на опишаната кружница околу четириаголникот BCB_1C_1, што требаше да се докаже. **(1п.)** ■



Решение 2. Бидејќи $\angle BB_1C = 90^\circ$, а D е средина на AB, таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABB_1$, па $DB_1 = DB$. **(2п.)**

Оттука следува дека $\angle EB_1B \equiv \angle DB_1B = \angle B_1BD \equiv \angle B_1BA = 90^\circ - \angle BAC$. **(3п.)**

Од друга страна бидејќи O е центар на опишаната кружница имаме

$$\angle ECB \equiv \angle OCB = 90^\circ - \frac{\angle BOC}{2} = 90^\circ - \angle BAC. \quad \textbf{(2п.)}$$

Според ова точките B, C, B_1 и E лежат на иста кружница. **(1п.)** ■

Решение 3. Нека аглите во триаголникот се означени стандардно со α, β и γ. Бидејќи $\angle BB_1C = 90^\circ$, а D е средина на AB, таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABB_1$, па $DB_1 = DA$. **(2п.)**

Оттука следува дека $\angle AB_1D = \angle DAB_1 = \alpha$. **(1п.)**

Освен тоа $\angle ACO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle COA = 90^\circ - \beta$. **(1п.)**

Оттука следува

$$\angle CEB_1 = \angle AB_1D - \angle ACO = \alpha - 90^\circ + \beta = 90^\circ - \gamma. \quad \textbf{(1п.)}$$

Сега добиваме $\angle CBB_1 = 90^\circ - \angle B_1CB = 90^\circ - \gamma$. **(2п.)**

Следува дека точките B, C, B_1 и E лежат на иста кружница. **(1п.)** ■

Решение 4. Бидејќи $\angle BB_1C = 90^\circ$, а D е средина на AB, таа е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABB_1$, па $DB_1 = DB$. **(2п.)**

Оттука следува дека $\angle DB_1B = \angle B_1BD = 90^\circ - \angle BAC = \angle CBO = \angle OCB$. **(2п.)**

Според ова постои спирална сличност со центар во B која $\triangle BDB_1$ го пресликува во $\triangle BOC$. **(2п.)**

Следува дека точката E лежи на опишаната кружница околу $\triangle BCB_1$ (аголот на ротација е еднаков на аголот меѓу правите DB_1 и OC). Последното е еквивалентно на бараното. **(2п.)** ■

Забелешка. Сличноста $\triangle BDD_1 \sim \triangle BOC$ може да се добие и од $BD : BO = \sin\gamma = BB_1 : BC$ или $\triangle BDO \sim \triangle BB_1C$. За овој дел се доделуваат вторите два поени.

Задача 3. Дали постои бесконечна низа од прости броеви $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, таква што за секој $i \in \mathbb{N}$ важи $p_{i+1} \in \{2p_i - 1, 2p_i + 1\}$? Образложи го одговорот.

Решение 1. Да претпоставиме дека ваква низа постои и p_i е првиот член на низата поголем од 3. **(1п.)**

Разгледуваме два случаи:

Ако $p_i = 3k + 1$, тогаш $p_{i+1} \in \{2p_i - 1, 2p_i + 1\} = \{6k + 1, 6k + 3\}$. Бидејќи $3 \mid 6k + 3 > 3$ заклучуваме дека $p_{i+1} = 6k + 1$. **(1п.)**

Со продолжување на постапката добиваме дека $p_{i+t} = 2^t \cdot 3k + 1$ за секое $t \in \mathbb{N}_0$. **(1п.)**

Бидејќи p_i е непарен од малата теорема на Ферма $2^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$. Оттука следува дека

$$p_{i+(p_i-1)} = 2^{p_i-1} \cdot 3k + 1 \equiv 3k + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Според ова $p_{i+(p_i-1)}$ е делив со p_i, а бидејќи е поголем од p_i заклучуваме дека не е прост, што е контрадикција на претпоставката. **(3п.)**

Слично ако $p_i = 3k - 1$, тогаш $p_{i+1} \in \{2p_i - 1, 2p_i + 1\} = \{6k - 3, 6k - 1\}$. Бидејќи $3 \mid 6k - 3 > 3$ заклучуваме дека $p_{i+1} = 6k - 1$. Со продолжување на постапката добиваме дека $p_{i+t} = 2^t \cdot 3k - 1$ за секое $t \in \mathbb{N}_0$. Бидејќи p_i е непарен од малата теорема на Ферма $2^{p_i-1} \equiv 1 \pmod{p_i}$. Оттука следува дека

$$p_{i+(p_i-1)} = 2^{p_i-1} \cdot 3k - 1 \equiv 3k - 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Според ова $p_{i+(p_i-1)}$ е делив со p_i, а бидејќи е поголем од p_i заклучуваме дека не е прост, што е контрадикција на претпоставката. **(2п.)**

Заклучуваме дека ваква низа не постои. ■

Забелешка. Еден разгледан случај ($p_i = 3k+1$ или $p_i = 3k-1$) се вреднува со 5 поени според шемата за $p_i = 3k + 1$.

Забелешка. Доколку се разгледани двата случаи ($p_i = 3k + 1$ и $p_i = 3k - 1$), но без доказот за $p_i \mid p_{i+s(p_i-1)}$ и двата се вреднуваат според шемата за $p_i = 3k + 1$, т.е. може да се добијат максимум 4 поени од тој дел.

Забелешка. За спомнување на теоремата на Ферма без конкретна идеја како да се искористи не се доделуваат поени.

Задача 4. Нека x, y и z се позитивни реални броеви така што $x^2+y^2+z^2=3$. Докажи дека

$$\frac{x^3}{2+x}+\frac{y^3}{2+y}+\frac{z^3}{2+z}\geq 1.$$

Кога важи равенство?

Решение 1. Имаме

$$
\begin{aligned}
1+2\sum_{cyc}\frac{x^3}{2+x} &= \quad \textbf{(1п.)}\\
\sum_{cyc}\left(2\cdot\frac{x^3}{2+x}+\frac{x^2+1+1}{9}\right) \overset{\text{КМ-АМ}}{\geq} \sum_{cyc}\left[2\cdot\frac{x^3}{2+x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x+1+1}{3}\right)^2\right] &= \quad \textbf{(3п.)}\\
\sum_{cyc}\left[\frac{x^3}{2+x}+\frac{x^3}{2+x}+\frac{(x+2)^2}{27}\right] \overset{\text{АМ-ГМ}}{\geq} \sum_{cyc}3\sqrt[3]{\frac{x^3}{2+x}\cdot\frac{x^3}{2+x}\cdot\frac{(x+2)^2}{27}} &= \quad \textbf{(2п.)}\\
3\sum_{cyc}\frac{x^2}{3} &=3,
\end{aligned}
$$

што го имплицира бараното. **(1п.)**

Равенство ќе важи само ако $27x^3=(x+2)^3$, т.е. $3x=x+2 \Longrightarrow x=1$. И слично $y=z=1$. **(1п.)** ■

Решение 2. Имаме

$$
\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{x^3}{2+x}=\sum_{cyc}\left(x^2-2x+\frac{4x}{2+x}\right) &= \quad \textbf{(2п.)}\\
-\frac{26}{9}\sum_{cyc}x+\frac{5}{9}\sum_{cyc}x^2+\sum_{cyc}\left[\frac{4}{9}x(x+2)+\frac{4x}{2+x}\right] &\overset{\text{АМ-ГМ}}{\geq} \quad \textbf{(4п.)}\\
-\frac{26}{9}\sum_{cyc}x+\frac{5}{3}+\sum_{cyc}2\sqrt{\frac{4}{9}x(x+2)\cdot\frac{4x}{2+x}} &=\\
\frac{5}{3}-\frac{2}{9}\sum_{cyc}x \overset{\text{АМ-КМ}}{\geq} \frac{5}{3}-\frac{2}{9}\sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)} &=1 \quad \textbf{(1п.)}.
\end{aligned}
$$

Равенство ќе важи само ако $x=y=z>0$ што е можно само за $x=y=z=1$ **(1п.)**. ■

Решение 3. Користејќи го даденото равенство и КМ-АМ добиваме:

$$
\begin{aligned}
9(x^2+y^2+z^2)=18+3(x^2+y^2+z^2)=3(1+1+x^2)+3(1+1+y^2)+3(1+1+z^2) \overset{\text{КМ-АМ}}{\geq}\\
(1+1+x)^2+(1+1+y)^2+(1+1+z)^2=(2+x)^2+(2+y)^2+(2+z)^2.
\end{aligned}
$$

Оттука бидејќи $x^2+y^2+z^2=3$ важи:

$$(x^2+y^2+z^2)^3\geq(2+x)^2+(2+y)^2+(2+z)^2. \quad \textbf{(2п.)} \tag{1}$$

Од неравенството на Холдер $((a_1^{r+s}+a_2^{r+s}+a_3^{r+s})^r(b_1^{r+s}+b_2^{r+s}+b_3^{r+s})^s\geq(a_1^rb_1^s+a_2^rb_2^s+a_3^rb_3^s)^{r+s})$, за $r=2$ и $s=1$ имаме:

$$\left(\frac{x^3}{2+x}+\frac{y^3}{2+y}+\frac{z^3}{2+z}\right)^2((2+x)^2+(2+y)^2+(2+z)^2)\geq(x^2+y^2+z^2)^3. \quad \textbf{(4п.)} \tag{2}$$

Користејќи го (1) во (2) добиваме:

$$(x^2+y^2+z^2)^3\left(\frac{x^3}{2+x}+\frac{y^3}{2+y}+\frac{z^3}{2+z}\right)^2\geq(x^2+y^2+z^2)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{2+x}+\frac{y^3}{2+y}+\frac{z^3}{2+z}\right)^2\geq 1,$$

од што бидејќи $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ го добиваме бараното неравенство: $\frac{x^3}{2+x}+\frac{y^3}{2+y}+\frac{z^3}{2+z}\geq 1$. **(1п.)**

Јасно бидејќи за да го докажеме (1) користиме КМ-АМ на x^2, 1 и 1, y^2, 1 и 1 и на z^2, 1 и 1, равенство може да важи само ако $x = y = z = 1$. Ова се потврдува со едноставна проверка. **(1п.)** ■

Решение 4. Од неравенството на Титу ($\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{b_1+b_2+b_3}$) и АМ-ГМ, добиваме

$$\frac{x^3}{2+x} + \frac{y^3}{2+y} + \frac{z^3}{2+z} = \sum_{\text{cyc}} \frac{x^4}{2x+x^2} \overset{\text{T2}}{\geq} \quad \textbf{(2п.)}$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{\text{cyc}}(2x+x^2)} \overset{\text{АМ-ГМ}}{\geq} \quad \textbf{(3п.)}$$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{\sum_{\text{cyc}}((x^2+1)+x^2)} = \frac{3^2}{3+2\cdot 3} = 1. \quad \textbf{(2п.)}$$

Од АМ-ГМ равенство важи само кога $x = 1$, $y = 1$ и $z = 1$. **(1п.)** ■

Забелешка. Поенот за ревенство се доделува само доколку е докажано неравенството.

Забелешка. Поените од различни решенија не се адитивни, т.е. може да се добијат поени само според едно решение или за целосно решена задача.

Забелешка. Во неравенството КМ≥АМ≥ГМ (меѓу средините), АМ означува Аритметичка средина, ГМ - Геометриска средина и КМ - Квадратна средина.

Задача 5. Нека M е средината на страната BC од $\triangle ABC$ и точката P, различна од B, е таква што четириаголникот $ABMP$ е тетивен и опишаната кружница на $\triangle BPC$ е тангентна на правата AB. Ако E е вториот пресек меѓу правата BP и опишаната кружница на $\triangle ABC$, одреди го односот $BE : BP$.

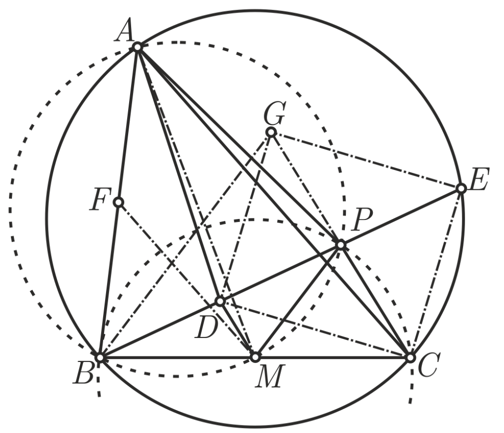
Решение 1. Ќе докажеме дека бараниот однос е $\frac{3}{2}$. **(1п.)**
Нека D е средината на отсечката BP. Имаме дека DM е средна линија во $\triangle BPC$, па

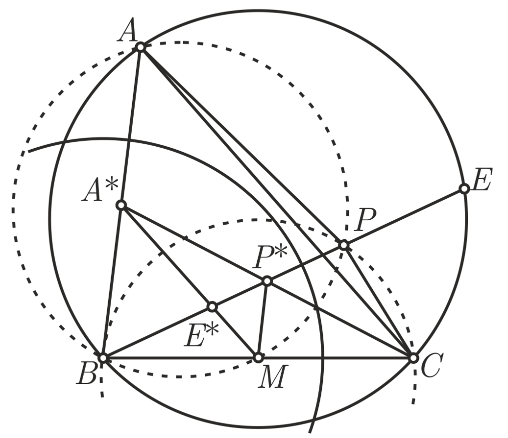
$$\angle DMB = \angle PCB = \angle DBA = \angle PMA \quad \text{и} \quad \angle BDM = \angle BPC = 180^\circ - \angle CBA = \angle APM.$$

Оттука, $\triangle BDM \sim \triangle APM$. **(2п.)**
Ова ни дава и дека $\angle MDP = \angle MBA$, а знаеме и дека $\angle DPM = \angle BAM$, па имаме и $\triangle MDP \sim \triangle MBA$. Сега,

$$\frac{PM}{MA} = \frac{DM}{MB} = \frac{BD}{MB} \cdot \frac{DM}{DP} = \frac{BD}{MB} \cdot \frac{MB}{AB} = \frac{BD}{AB},$$

па како што $\angle DBA = \angle PMA$, имаме $\triangle PMA \sim \triangle DBA$. **(3п.)**
Следува дека $\angle PDA = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - \angle APM = \angle CBA$, а знаеме и дека $\angle APD = \angle AMB$ и $\angle AED = \angle ACB$. Конечно, добиваме дека $\triangle ADP \sim \triangle ABM$ и $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, па мора $DP = PE$. Како што D е средина на BP, го добиваме бараниот соодност $\frac{BE}{BP} = \frac{3DP}{2DP} = \frac{3}{2}$. **(2п.)** ■





Решение 2. Бидејќи AB е тангента на опишаната кружница околу $\triangle BCP$ заклучуваме дека важи $\angle BPC = 180^\circ - \angle CBA$, па $\angle CPE = \angle CBA$. Од тетивниот четириаголник $ABCE$ за аглите имаме дека $\angle PEC \equiv \angle BEC = \angle BAC$. Според ова $\triangle EPC \sim \triangle ABC$, од каде $\angle ECP = \angle ACB$ и

$$\frac{PE}{BA} = \frac{CP}{CB}. \quad \textbf{(3п.)} \tag{3}$$

Од тетивниот четириаголник $ABMP$ имаме $\angle CMP = \angle BAP$. Освен тоа

$$\angle PCM = \angle ECM - \angle ECP = \angle ECM - \angle ACB = \angle ECA = \angle PBA,$$

при што за последното равенство го користиме тетивниот четириаголник $BCEA$. Оттука следува дека $\triangle ABP \sim \triangle MCP$, па имаме

$$\frac{BP}{BA} = \frac{CP}{CM}. \quad \textbf{(3п.)} \tag{4}$$

Со комбинирање на (3) и (4) добиваме $\frac{PE}{BP} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$. Оттука следува дека $\frac{BE}{BP} = \frac{3}{2}$. **(2п.)** ∎

Решение 3. Нека D е средина на BP, F е средина на AB и G е таква што P е средина на CG. **(1п.)**

Бидејќи AB е тангента на опишаната кружница околу $\triangle BCP$ следува дека $\angle BPC = 180^\circ - \angle CBA$, па $\angle GPB = \angle MBA$. Од друга страна MP е средна линија во $\triangle BCG$, па $\angle PBG = \angle BPM = \angle BAM$. Според ова $\triangle ABM \sim \triangle BPG$. **(3п.)**

Оттука $\angle PDG = \angle BFM = \angle BAC = \angle BEC$, т.е. $DG \parallel CE$. Оттука четириаголникот $DCEG$ е паралелограм, што значи дека $PE = DP = BD$. **(3п.)**

За соодносот имаме $\frac{BE}{BP} = \frac{3BD}{2BD} = \frac{3}{2}$. **(1п.)** ∎

Забелешка. Првиот поен се доделува само ако се дефинирани сите релевантни точки.

Решение 4. Нека $\mathcal{J}$ е инверзијата околу B со радиус $r := \sqrt{BM \cdot BC}$. **(1п.)**

Знаеме $\mathcal{J}(C) = M$ и $\mathcal{J}(M) = C$, а дефинираме $A^* := \mathcal{J}(A)$, $E^* := \mathcal{J}(E)$ и $P^* := \mathcal{J}(P)$. **(1п.)**

Тогаш со $\mathcal{J}$ кружницата $(ABMP)$ се пресликува во правата $A^* - P^* - C$, кружницата (ABC) се пресликува во правата A^*M и бидејќи AB е тангентна на (BPC), таа се пресликува во C-средишнате линија во $\triangle BCA^*$. **(2п.)**

Според ова P^* е средина на A^*C и оттука E^* е тежиштето на $\triangle A^*BC$. Сега, $\frac{BP^*}{BE^*} = \frac{3}{2}$, и конечно

$$\frac{BE}{BP} = \frac{\frac{r^2}{BE^*}}{\frac{r^2}{BP^*}} = \frac{BP^*}{BE^*} = \frac{3}{2}. \quad \textbf{(3п.)}$$

Според ова бараниот соодност е $\frac{3}{2}$. **(1п.)** ∎

Забелешка. Вториот поен се доделува само ако се дефинирани трите релевантни слики на точки при инверзијата, а следните два за трите слики на кружници.

Забелешка. Поените од различни решенија не се адитивни, т.е. може да се добијат поени само според едно решение или за целосно решена задача.

Забелешка. Еден поен се добива за точен резултат без доказ.