ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2025

Ден 1

Среда, 7. Мај 2025

Задача 1. На страните на $\triangle ABC$ лежат следните точки: K и L на AB, M на BC и N на CA. Нека AM ја сече BN во P, KM ја сече LN во R, KN ја сече LM во S и CS ја сече AB во Q. Докажете дека точките P, Q и R се колинеарни.

Задача 2. Во езеро растат лотосови лисја во форма на правилен шестаголник со страна 1. Од секој лист може да израсне нов лист на растојание $\sqrt{3}$ од постоечкиот (меѓу центрите), доколку не се преклопува со ниту еден лист. Ако езерото е доволно големо и денес има само еден лотосов лист во него, доволно далеку од брегот, за колку најмалку денови може да има 2025 лисја во езерото?

Задача 3. Нека x_1, x_2, x_3 и x_4 се позитивни реални броеви. Докажете го неравенството:

$$\frac{x_1+3x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+3x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+3x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+3x_1}{x_1+x_2}\geq 8\,.$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2025

Ден 2

Четврток, 8. Мај 2025

Задача 4. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ такви што $f(a) \mid a$ и равенството
$$f(f(a) + kb) = f(a + kf(b))$$
е задоволено за секои $a, b, k \in \mathbb{N}_0$.

Задача 5. Даден $\triangle ABC$ со страни a, b, c, чиј центар на впишана кружница е I и радиус на опишана кружница е R. Нека P_1, P_2 и P_3 се плоштините на $\triangle ABI, \triangle BCI$ и $\triangle CAI$, соодветно. Докажете дека
$$\frac{abc}{12R} \leq \frac{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}{P} \leq \frac{3R^3}{4\sqrt[3]{abc}}\,.$$

Задача 6. Нека $n > 2$ е парен цел број и V е произволно множество од 8 различни цели броеви. Нека $E(V, n)$ е множеството парови $(u, v) \in V \times V$, такви што $u < v$ и $u + v = n^k$ за некој природен број k. За секој n, одредете колку најмногу елементи може да има $E(V, n)$.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.