ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2025

Недела, 13. Април 2025

Задача 1. Кружно се наредени $n \geq 2$ светилки, редоследно нумерирани со $1, 2, \ldots, n$ при кружно движење во насока на стрелките на часовникот. Секоја светилка е во една од следните две состојби: или **вклучена** или **исклучена**. Во почетната конфигурација од состојби, барем една светилка е вклучена. Во текот на секој од n денови ја менуваме тековната конфигурација состојби на следниот начин: за $1 \leq k \leq n$, на k-тиот ден започнуваме од k-тата светилка и се движиме во насока на стрелките на часовникот по кругот, менувајќи ја состојбата на секоја светилка низ која поминуваме, сé додека не вклучиме светилка што претходно била исклучена.

Докажете дека конечната конфигурација, добиена на n-тиот ден, се совпаѓа со почетната.

Задача 2. Нека $\triangle ABC$ остроаголен и A_1, B_1 и C_1 се подножјата на висините од A, B и C соодветно. На полуправите AA_1, BB_1 и CC_1 одбрани се точки A_2, B_2 и C_2 соодветно, надвор од $\triangle ABC$, така што

$$\frac{A_1A_2}{AA_1} = \frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{C_1C_2}{CC_1}.$$

Пресечните точки на B_1C_2 со B_2C_1, C_1A_2 со C_2A_1 и A_1B_2 со A_2B_1 се A', B' и C' соодветно.

Докажете дека AA', BB' и CC' имаат заедничка точка.

Задача 3. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кои ја задоволуваат равенката

$$f(xf(y) + f(x)) = f(x)f(y) + 2f(x) + f(y) - 1,$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$ и неравенката $f(kx) > kf(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{R}$ таков што $k > 1$.

Задача 4. За даден природен број n, нека p е непарен прост делител на $n^2 + n + 2$. Докажете дека постојат цели броеви a, b такви што $p = a^2 + 7b^2$.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.