ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2025

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 1. Кружно се наредени $n \geq 2$ светилки, редоследно нумерирани со $1, 2, \ldots, n$ при кружно движење во насока на стрелките на часовникот. Секоја светилка е во една од следните две состојби: или **вклучена** или **исклучена**. Во почетната конфигурација од состојби, барем една светилка е вклучена. Во текот на секој од n денови ја менуваме тековната конфигурација состојби на следниот начин: за $1 \leq k \leq n$, на k-тиот ден започнуваме од k-тата светилка и се движиме во насока на стрелките на часовникот по кругот, менувајќи ја состојбата на секоја светилка низ која поминуваме, сé додека не вклучиме светилка што претходно била исклучена.

Докажете дека конечната конфигурација, добиена на n-тиот ден, се совпаѓа со почетната.

Решение. Да ги ренумерираме светилките со $0, 1, \ldots, n-1$ при кружно движење по насока на стрелките на часовникот, започнувајќи од првата светилка. Ќе користиме 0 (односно 1) за да означиме дека тековната состојба на светилката е исклучена (односно вклучена). На секоја дадена конфигурација состојби ѝ доделуваме бинарен код

$$b = \overline{b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0}_{\ (2)}\,,$$

каде што b_i е ознаката за состојбата на светилката со број i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. **(2п)**

Со $b(k)$ (за $0 \leq k \leq n$) го означуваме бинарниот код на конфигурацијата што резултира по трансформацијата спроведена на k-тиот ден. Да забележиме дека

(1) $$b(k) = b(k-1) + 2^{k-1} (\mathrm{mod}(2^n - 1))\,. \quad \textbf{(6п)}$$

Собирајќи ги равенствата (1) за $k = 1, \ldots, n$ **(1п)**, заклучуваме дека $b(n) = b(0)$. **(1п)** □

Задача 2. Нека $\triangle ABC$ остроаголен и A_1, B_1 и C_1 се подножјата на висините од A, B и C соодветно. На полуправите AA_1, BB_1 и CC_1 одбрани се точки A_2, B_2 и C_2 соодветно, надвор од $\triangle ABC$, така што

$$\frac{A_1A_2}{AA_1} = \frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{C_1C_2}{CC_1}.$$

Пресечните точки на B_1C_2 со B_2C_1, C_1A_2 со C_2A_1 и A_1B_2 со A_2B_1 се A', B' и C' соодветно.

Докажете дека AA', BB' и CC' имаат заедничка точка.

Решение. Забележуваме дека од $\triangle BB_1A \sim \triangle CC_1A$ следува дека

$$\frac{B_1A}{C_1A} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2},$$

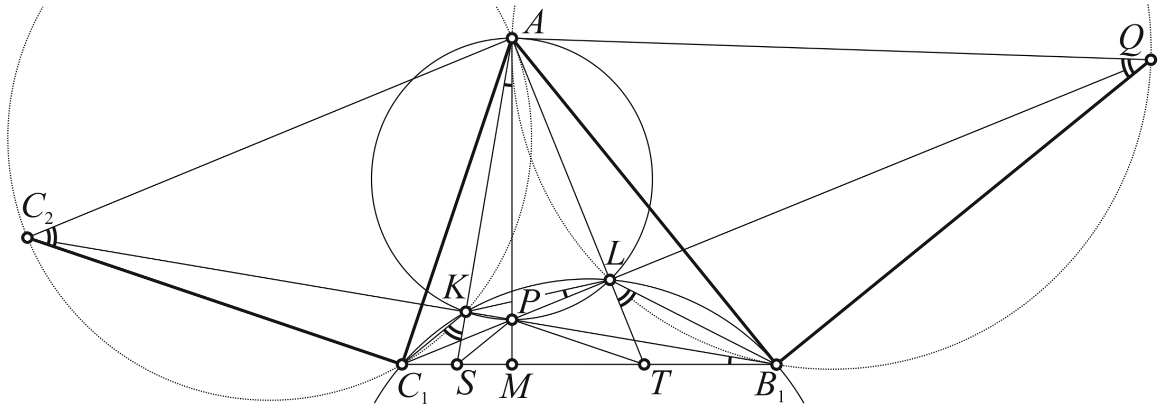
па

$$\frac{B_1A}{B_1B_2} = \frac{C_1A}{C_1C_2}. \quad \textbf{(1п)}$$

Нека AM е висината во $\triangle AC_1B_1$, P е пресечната точка на B_1C_2 со AM и Q е пресечната точка на C_1P со B_1B_2. Точките S и T на C_1B_1 се такви што $SP \parallel B_1Q$ и $TP \parallel C_1C_2$. Од $SP \perp B_1A$ следува дека P е ортоцентар на $\triangle ASB_1$, а од $TP \perp C_1A$, P е ортоцентар и на $\triangle AC_1T$. **(2п)** Нека K е подножјето на висината од B_1 во $\triangle ASB_1$, а L подножјето на висината од C_1 во $\triangle AC_1T$. Бидејќи $AKPL$ е тетивен (имено, $\angle PKA = 90^\circ = \angle ALP$) важи

$$\angle KLC_1 = \angle KLP = \angle KAP = \angle KB_1C_1.$$

Оттука и C_1B_1LK е тетивен, т.е. $\angle C_1KB_1 = \angle C_1LB_1$. **(2п)**



Од

$$\angle QLA = \angle QB_1A = \angle AKC_2 = \angle AC_1C_2 = 90^\circ$$

следува дека четириаголниците ALB_1Q и AC_2C_1K се тетивни. **(1п)** Според тоа добиваме

$$\angle AQB_1 = \angle TLB_1 = \angle C_1LB_1 - 90^\circ = \angle C_1KB_1 - 90^\circ = \angle C_1KS = \angle C_1C_2A.$$

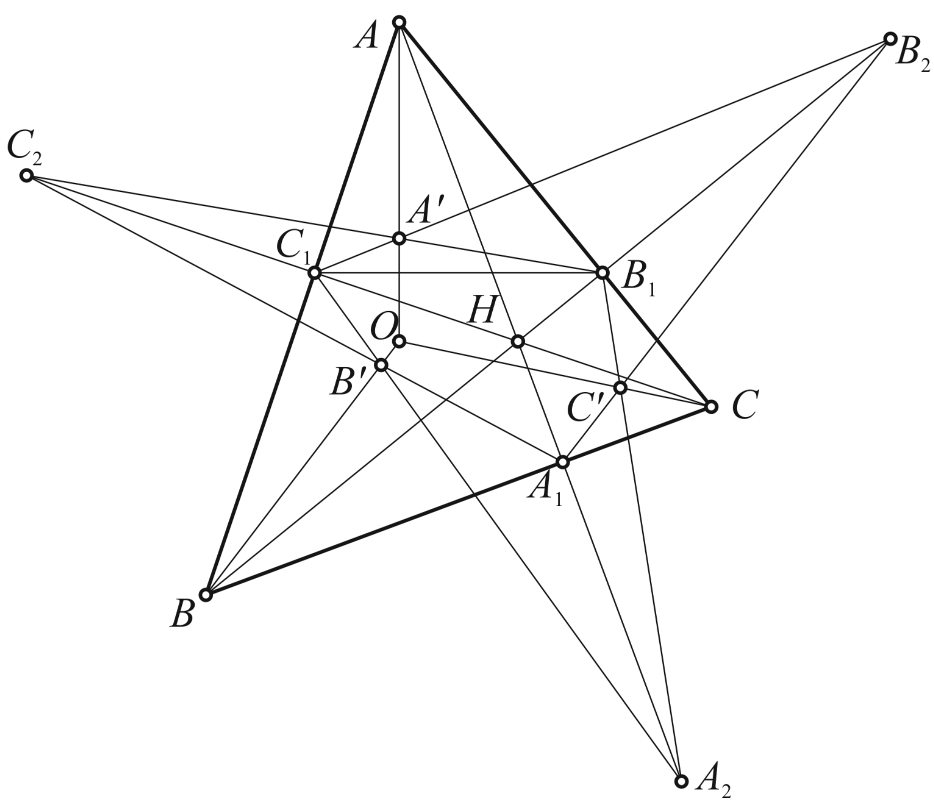
Заклучуваме дека $\triangle AC_2C_1 \sim \triangle AQB_1$, па

$$\frac{C_1C_2}{C_1A} = \frac{B_1Q}{B_1A}.$$

Бидејќи

$$\frac{B_1A}{B_1B_2} = \frac{C_1A}{C_1C_2},$$

важи $Q \equiv B_2$, од каде $P \equiv A'$. **(2п)**



Нека O е центарот на опишаната кружница окколу $\triangle ABC$. Бидејќи AC_1HB_1 е тетивен (имено, $\angle HC_1A = \angle AB_1H = 90^\circ$), имаме $\angle C_1AA' = 90^\circ - \angle B_1C_1A = 90^\circ - \angle B_1HA = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAO$. Оттука следува дека O лежи на AA'. Од причини на симетрија O е заедничка точка за трите прави (AA', BB', CC'). **(2п)** $\square$

Задача 3. Најдете ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ја задоволуваат равенката

$$f(xf(y)+f(x)) = f(x)f(y)+2f(x)+f(y)-1,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$ и неравенката $f(kx) > kf(x)$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и $k\in\mathbb{R}$ таков што $k>1$.

Решение. За $x=0$ во даденото ревенство добиваме $f(f(0)) = f(y)(f(0)+1)+2f(0)-1$, т.е. $f(f(0))-2f(0)+1 = f(y)(f(0)+1)$. **(1п)** Според ова ако $f(0)\neq -1$ заклучуваме дека $f(y)$ е константна. Ако $f(y)=c$ за секое $y\in\mathbb{R}$, тогаш $c=c^2+2c-1$, па $(c+1)^2=2$. Решенијата на оваа равенка се $c=-1+\sqrt{2}$ и $c=-1-\sqrt{2}$. Лесно се проверува дека $f(x)=-1+\sqrt{2}$ и $f(x)=-1-\sqrt{2}$ ја задоволуваат дадената равенка. Но, единствено $f(x)=-1-\sqrt{2}$ ја задоволува дадената неравенка. **(2п)**
Сега го разгледуваме случајот кога $f(0)=-1$. За $y=0$ во дадената равенка добиваме $f(f(x)-x) = f(x)-2$. Според ова ако $f(x)=2x-1$, тогаш $f(x-1)=2x-3$, а бидејќи ова е точно за $x=0$, добиваме дека $f(x)=2x-1$ за сите негативни цели броеви. **(1п)**
За $y=-1$ и цел $x\leq -1$ имаме

$$f(-x-1) = f(-3x+(2x-1)) = f(xf(y)+f(x)) = f(x)(f(y)+2)+f(y)-1 = -(2x-1)-4 = 2(-x-1)-1.$$

Заклучуваме дека $f(x)=2x-1$ за секој цел број x. **(1п)** Од $f(f(x)-x)=f(x)-2$ за $s\in\mathbb{R}$, $x=s$ и $f(x)=t$, добиваме дека $f(t-s)=t-2$, а за $x=t-s$ добиваме $f(s-2)=f(t-2-(t-s))=t-4$. Општо се добива $f(x+2m)=f(x)+4m$ за секој реален број x и цел број m. Нека сега $s>1$ е реален број кој не е цел и $a=[s]$ е најголемиот цел број помал од s. За $k=\frac{s}{a}>1$ од неравенството добиваме

$$f(s) > f(a)\frac{s}{a} = (2a-1)\frac{s}{a} = 2s-1-\frac{s-a}{a} > 2s-1-\frac{1}{a}. \quad \textbf{(1п)}$$

Слично за $b=a+1$, и $k=\frac{b}{s}>1$ имаме

$$f(s) < f(b)\frac{s}{b} = (2b-1)\frac{s}{b} = 2s-1+\frac{b-s}{b} < 2s-1+\frac{1}{b}. \quad \textbf{(1п)}$$

Бидејќи $f(s+2m)=f(s)+4m$ заклучуваме дека

$$2s-1-\frac{s-a}{a+2m} < f(s+2m)-4m = f(s) < 2s-1+\frac{b-s}{b+2m}.$$

А, бидејќи m може да биде произволно голем, $\frac{1}{a+2m}$ и $\frac{1}{b+2m}$ може да бидат произволно мали (поголеми од 0), па $f(s)=2s-1$ за секој $s>1$. Сега од $f(s+2)=f(s)+4$ Заклучуваме дека $f(s)=2s-1$ за секој $s\in\mathbb{R}$. **(2п)** Од

$$f(xf(y)+f(x)) = 2(x(2y-1)+2x-1)-1 = 4xy-2x-2y+2y+4x-2 =$$
$$(2x-1)(2y-1)+2(2x-1)+(2y-1)-1 = f(x)f(y)+2f(x)+f(y)-1,$$

функцијата $f(x)=2x-1$ го задоволува даденото ревенство, а од $f(kx)=2kx-1=k(2x-1)+(k-1)>kf(x)$ го задоволува и неравенството. **(1п)**
Функциите кои ги задоволуваат условите на задачата се: $f(x)=-1-\sqrt{2}$ и $f(x)=2x-1$. $\square$

Задача 4. За даден природен број n, нека p е непарен прост делител на n^2+n+2. Докажете дека постојат цели броеви a,b такви што $p=a^2+7b^2$.

Решение. Да забележиме дека постои $x \in \mathbb{N}$ за кое важи $p \mid x^2 + 7$ (т.е. -7 е квадратен остаток модуло p): навистина, $p \mid 4(n^2 + n + 2) = (2n + 1)^2 + 7$. (**2п**) Лемата на Туе имплицира дека постојат $a, b \in \mathbb{N}$ така што $a, b < \sqrt{p}$ и $a \equiv xb \ \ mod\, p$, односно $p \mid a^2 - x^2 b^2$, та $p \mid a^2 + 7b^2$ (**3п**), при што последниот израз е помал од $8p$ (односно, заради деливоста со p, помал или еднаков на $7p$). Оттука можеме да заклучиме дека $a^2 + 7b^2 = kp$ за некое $1 \leq k \leq 7$. (**1п**)
1° $k \in \{2, 6\}$
Како левата страна на $kp = a^2 + 7b^2$ е 2 модуло 4, можеме да заклучиме дека a, b имаат иста парност, па десната страна се дели со 4, контрадикција. (**1п**)
2° $k = 5$
Модуло 5 имплицира $5 \mid a^2 + 2b^2$, но ниту a ниту b е делив со 5 (бидејќи ова би значело дека $5 \mid p$, но $5 \nmid n^2 + n + 2$, лесна проверка), што не е возможно (поради тоа што -2 не е квадратен остаток модуло 5, односно бидејќи $a^2 + 2b^2 \equiv \begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix} \ \ mod\, 5$).
3° $k = 3$
Слично како во претходниот случај, со сведување модуло 3 добиваме дека $3 \mid p$ (но повторно, $3 \nmid n^2 + n + 2$), освен ако ниту a ниту b не се делат со 3, што би значело дека ни $a^2 + 7b^2$ не се дели со 3. (**1п**)
4° $k = 4$
Ако a, b се парни, тогаш $a = 2a_0, b = 2b_0$, та затоа $p = a_0^2 + 7b_0^2$. Ако и a и b се непарни, гледаме модуло 8 овојпат, заедно со фактот дека $m^2 \equiv 1 \ \ mod\, 8$ за m непарно; заклучуваме дека десната страна е делива со 8, што е контрадикција со нашата претпоставка дека p е непарен. (**1п**)
5° $k = 7$
Јасно е дека $7 \mid a$, та $p = b^2 + 7a_0^2$, каде $a = 7a_0$. (**1п**)
Конечно, од разгледуваните случаи можеме да заклучиме дека $p = a^2 + 7b^2$. $\square$

Коментари:
- За целосно решавање на случаите $k = 3$ и $k = 5$ се добива 1 поен. Ако барем еден од двата случаја е нецелосно решен (дури и другиот случај да е точно и комплетно решен), следуваат 0 поени;
- Има и помалку директен, но можеби некому порутински начин да се докаже дека -7 е квадратен остаток при делење со p, а тоа е со примена на следнава лема:
Ако $p \mid ax^2 + bxy + cy^2$ за p прост број, a, b, c цели броеви кои не се деливи со p и $(x, y) = 1$, каде x, y се целобројни, тогаш дискриминантата $D = b^2 - 4ac$ е квадратен остаток при делење со p. Докажување на соодветниот чекор од доказот со помош на оваа лема исто така се наградува со 2 поена, при што докажување на лемата не е потребно;
- Спомнување на лемата на Туе без правилно искористување на истата (погрешен модуларен израз, неточна горна граница за a и b...) се наградува со најмалку 1, најмногу 2 поена;
- Нецелосно решавање на било кој од случаите не се вреднува со поен.