VII МАКЕДОНСКИ МАТЕМАТИЧКИ КОНГРЕС

ЗБОРНИК НА ТРУДОВИ

Струга, 27-30 Јуни, 2023

ЗБОРНИК

на трудови на Седмиот македонски математички конгрес

СЕКЦИЈА МАТЕМАТИЧКО ОБРАЗОВАНИЕ

PROCEEDINGS

of the VII Macedonian Mathematical Congress

SECTION MATHEMATICS EDUCATION

27-30 June, 2023
Struga, Macedonia

Зборник на трудови
Седми македонски математички конгрес
Секција- Математичко образование

Издавачи:

Сојуз на математичари на Македонија
Природно-математички факултет, Скопје

Publishers:

Union of Mathematicians of Macedonia
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Skopje

CIP - Каталогизација во публикација Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(062)(082)

МАКЕДОНСКИ математички конгрес (7 ; 2023 ; Охрид)

Зборник на трудови [Електронски извор] / на VII македонски математички конгрес, Струга, Македонија, 27-30 Јуни, 2023 : секција математичко образование = Proceedings / of the VII Macedonian
Mathematical Congress, Struga, Macedonia, 27-30 June, 2023 : section mathematics education ; [editors Gjorgji Markoski, Aneta Gacovska - Barandovska, Vesna Celakoska - Jordanova]. - Текст во пдф формат, содрж. 130 стр., илустр. - Skopje : Union of Mathematicians of Macedonia, Faculty of Natural Sciences and Mathematics : Сојуз на математичари на Македонија, Природно-математички факултет, 2025

Начин на пристапување (URL): https://smm.org.mk/зборници-на-трудови/. -
Наслов преземен од екран. - Опис на изворот на ден 02.01.2025 год. -
Напореден текст на мак. и анг. јазик. - Библиографија кон трудовите

ISBN 978-608-4929-05-5

а) Математика -- Собири – Зборници

COBISS.MK-ID 65027333

PROCEEDINGS

VII MACEDONIAN MATHEMATICAL CONGRESS

Благодарност

Сојузот на математичарите на Македонија ја изразува својата благодарност на Природно – математичкиот факултет во Скопје при Универзитетот „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје за успешната коорганизација на Седмиот македонски математички конгрес.

СОДРЖИНА

OPTIMIZATION PROBLEMS IN HIGH SCHOOL CLASSROOM

Gordana Nikolovska [1]

Irena Stojkovska [2]

Optimization means determining the best result of a process, in accordance with given conditions. In mathematics, it is determining the minimum or maximum of a function by which we describe the process. We optimize our activities every day. Maximizing benefits, minimizing costs, saving time, and other forms of optimization are in everyone's interest daily. Therefore, modeling and optimization techniques are of a great benefit to young people, especially high school students, in order to socialize and adapt successfully in the society, [3].

This paper gives an overview of several examples which present different types of optimization problems, appropriate for high school students. The given examples can be solved using different arithmetic or algebraic strategies, depending on the age of the students. Presented problems correspond to the application of the learned mathematical concepts, therefore we believe they would be interesting for most students. Moreover, we are certain that the challenges of optimization problems would be of a great importance for students' motivation in studying mathematics.

1.INTRODUCTION

Practically oriented problems represent an important part of mathematical problems in which students see the value of scientific knowledge for the reality that surrounds them, as well as the interactions between sciences. Solving them, and solving optimization problems as one of them, requires implementing all stages of the mathematical modeling approach. The necessary steps for solving an optimization problem are [3]:

1) Set the optimization problem conceptually, i.e. formulate an optimization goal and formulate constraints on the variables and parameters of the optimization object.

2) Define the unchangeable part of the optimization object fully and determine the variable part of the optimization object.

3) Select the mathematical method and construct a mathematical model of the optimization object, i.e. describe the optimization object in the language of

the chosen mathematical method.

4) In accordance with point 3, determine the type and nature of restrictions imposed in this problem on the variable characteristics, and parameters of the process or system.

5) In accordance with points 3 and 4, formulate and formalize the criterion, to choose the method of solution and formally set up the problem of optimization.

6) Develop an algorithm to solve the optimization problem.

7) Work out this algorithm or develop a program to solve the optimization problem on a computer.

8) Formulate the answer.

We should note that mathematical modeling approach is a non-linear process, which means that at some point, one might have to go back and make changes in the model or solution in order to get more accurate mathematics representation and solution of the problem, [2].

2. OPTIMIZATION PROBLEMS AND RESULTS OF THE STUDY

We have formed a list of optimization problems related to linear equations, linear inequality with one or two variables, linear function, quadratic function, two dimensional analytical geometry, trigonometry, and area of plane figures. The students that were solving the problems are first year students in a secondary school (15 years old) and third year in a secondary school (17 years old), in a High school in N. Macedonia. Our main goal was to encourage the older third year students to apply their newly gained mathematical knowledge on real world problems, and the younger first year students to try to solve the problems in different way using their more elementary knowledge (they have less topics covered than the students from the third year). We wanted to examine students skills to apply mathematical knowledge in solving real world optimization problems as well as the level of motivation for solving optimization problems since they contain questions that are hard to give up answering.

In this paper, we present several optimization problems that cover different topics (Table 1).

After each problem, a solution of the problem and some of the students answers (along with their discussions) are given. Qualitative analysis of students' answers has been made by comparing their answers with the solution of the problem, taking into account that different solutions of the problem are possible. The level of motivation is “measured” with the average duration of time spent on solving the problem, and questions asked while solving the problem.

Problem	**Topics**
1	Linear functions, Linear equations, Linear inequalities
2	Linear inequalities
3	Quadratic functions, Number patterns
4	Linear programming, Linear functions, Linear equations, Linear inequalities, Analytic geometry
5	System of linear equations, Analytic geometry, Quadratic functions
6	Trigonometry, Area of plane figures

Table 1. Topics covered by each of the presented problems.

Problem 1. Speakers. During the summer vacation, Luka works in the café I where he receives a daily wage of 650 denars. Every day he pays 40 denars for public transportation in each direction from home to the I and back. He also buys a meal at the price of 110 denars per day.

a) If Luka saves all the money he has left after the expenses for food and transportation, how many days does he need to work in the I in order to be able to buy speakers at a price of 8200 denars?

b) What is the minimum number of days he has to work to buy the speakers, if he travels by bicycle instead of by bus?

Solution. Let x denotes the number of days Luka should work in the café to buy the speakers. In situation a), each day Luka has $650-2\cdot 40-110=460$ denars left after he pays for transportation and food. After x days Luka will have $460\cdot x$ denars left. The price of the speakers is 8200 denars, so x must satisfy the following inequality $460\cdot x\geq 8200$, which is equivalent to $x\geq 17{,}826...$ Note that x is an integer, so the smallest integer that satisfy the last inequality is $x=18$. The answer is that Luka should work at least 18 days to be able to buy the speakers. In situation b), each day Luka has 650 – 100 = 550 denars left. Same reasoning as before leads to the answer that Luka needs to work at least 15 days to be able to buy the speakers.

Analysis of students’ answers. This is a problem that corresponds to the topics about linear function, linear equation, and linear inequality. The students did not write any mathematical model as equation or inequality at the beginning.

Each of the students calculated the money that Luka earns each day after he pays for transportation and food i.e. 460 denars. For the rest of the solution, students usually took two strategies. One of the strategies was trial and error, [6]. In this case, the students are guessing the number of days x and they compare the product $460 \cdot x$ with 8200. If $460 \cdot x = 8200$, that would be the exact correct guess and the problem is solved. If $460 \cdot x \leq 8200$, then they increase the product by 460, and add another day to the value x. If $460 \cdot x > 8200$, they just decrease the product by 460. The search stops if either $460 \cdot x = 8200$ or $460 \cdot x > 8200$, for the smallest natural number x that satisfies the inequality. Another group of students who wanted to save time and energy for calculations, simply did the division 8200:460. They discussed that if the quotient is an integer, that would be the answer, but if the quotient is a decimal number, then they will take the next integer as an answer. This was an interesting opportunity to introduce the terms for floor and ceiling function, at least for positive numbers, since the needed value for x can be written as a floor function $\lceil 8200 : 460 \rceil$.

After students solve the problem in "their" way, we pointed out that the mathematical optimization model for the problem is to find the smallest integer x such that the following inequality $460 \cdot x \geq 8200$ is satisfied. Then it was easy to make the modifications for the question b) and solve it.

Problem 2. Taxi ride. The price of a taxi ride is 20 denars per passenger plus 25 denars for each kilometer traveled. A group of friends has a total of 520 denars.

a) Compose a linear inequality that will represent how many kilometers y can one travel if the taxi group has x friends.

b) If there are three friends in the group, how many kilometers can they drive by taxi?

c) If a group of friends wants to travel 13 km, what is the maximum number of friends that group can have?

d) If a group of friends wants to travel 15 km and the taxi vehicle is a van with capacity of 7 seats including the driver, what is the maximum number of friends that group can have? Will the group have any money left after the ride?

Solution. Under given prize conditions, a group of x friends, can travel y kilometers, only if $20 \cdot x + 25 \cdot y \leq 520$. Solving b) means to find the greatest y such that the following inequality $20 \cdot 3 + 25 \cdot y \leq 520$ is satisfied, which is equivalent to $y \leq 18,4$, and the answer is that three friends can travel maximum

18,4 kilometers. To solve c) we have to find the greatest integer x such that $20 \cdot x + 25 \cdot 13 \leq 520$, which is equivalent to $x \leq 9,75$, and the answer is that the group can have maximum 9 friends. To answer the question d), we have to find the greatest integer x such that $20 \cdot x + 25 \cdot 15 \leq 520$ and $x \leq 6$. The first inequality is equivalent to $x \leq 7,25$, but taking the second constrained $x \leq 6$, we conclude that the maximum number of friends is 6. In that case, the group will have $520 - (20 \cdot 6 + 25 \cdot 15) = 25$ denars left.

Analysis of students' answers. The questions in this problem have been designed to lead students through the modeling process. After developing the linear inequality in a), the questions b) and c) are modifications of the initial inequality, using just one variable. Here, the students discussed the number sets where the solutions belong. The number of kilometers can be decimal number, but the number of people in the group must be a natural number. The question d) is an intention to make the students think more about the sense of the answer under additional constraints. Here, the possibilities for answers are more limited (maximum 6 passengers in the van), so the students prefer to find the answer by checking the possibilities, i.e. the intuitive idea of almost all of the students was to check if the group can have 6 friends so that the van will be full.

Problem 3. Tomato garden. Nikolina wants to plant a tomato garden in one day. With her furrowing machine, she digs out each row and each column to space the roots evenly, so that each root has enough room to grow. How many rows and columns should Nikolina make in her garden, so that she can plant the maximum number of roots, if the furrow machine has the energy capacity to dig a total of 50 rows and columns in one day?

Solution. Let x denotes the number of rows and y denotes the number of columns. Then the number of roots that can be planted is $x \cdot y$. The problem is to find the positive integers x and y that maximize the product $x \cdot y$ under the condition $x + y = 50$. From the condition $x + y = 50$ we get $y = 50 - x$, hereby the problem is equivalent to finding the positive integer x such that $x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$ is maximized. Since $x = -b / 2a$ maximizes the quadratic function $ax^2 + bx + c$, the answer is that Nikolina should dig $x = 25$ rows and $y = 25$ columns, to maximize the number of tomato roots.

The same model can be used for the problem: „Of all the rectangles with perimeter 100 and integer lengths, determine the one with maximum area."

Analysis of students' answers. After modeling the problem as a quadratic function, it turned out the students can not use the quadratic function since they haven't studied it yet. The younger students modeled the problem as

a number pattern question. Namely, they analyzed both sequences of products:

$$1 \cdot 49 < 2 \cdot 48 < 3 \cdot 47 < \ldots$$
$$49 \cdot 1 < 48 \cdot 2 < 47 \cdot 3 < \ldots$$

Both patterns are made by listing the possible values for number of rows and columns by increasing/decreasing by 1, keeping the sum equals to 50. Students who analyzed the problem this way, were getting greater values for the product. They noted that there are 50 products to check (in this stage they did not make correct prediction for the number of different products!). Further, they realized that these sequences cannot be increasing until the end, since the last product is the same as the first one, so they also wrote the last few products:

Rows (r)	1	2	3	…	47	48	49
Columns (c)	49	48	47	…	3	2	1
Product ($c \cdot r$)	49	96	141		141	96	49

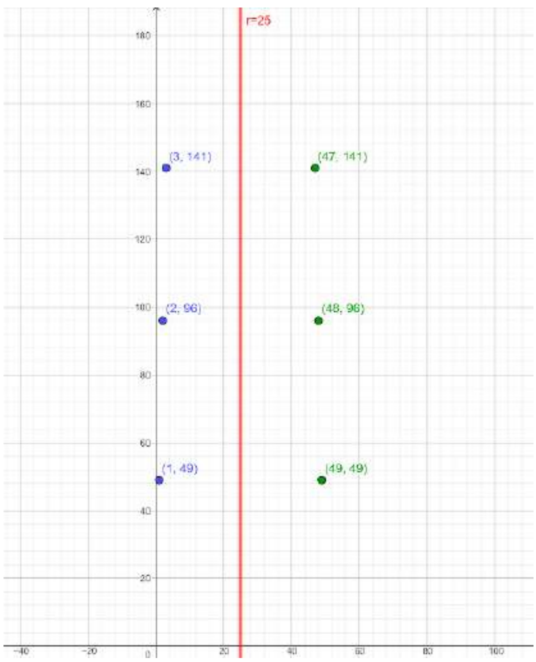


Figure 1. Using Geogebra to represent the first three and last three values for the sequence of products in the solution of Problem 3.

Noting that the last few products form a decreasing sequence, the students got the intuitive conclusion – there must be a maximum in between. Because the increments are symmetric on both sides of the sequence, they answered that the maximum should be in the middle, i.e., the maximum will be the product $25 \cdot 25$. Some of the students confirmed this answer graphically, not knowing that they were actually drawing a quadratic function and finding its maximum (Figure 1).

Problem 4. Theatre tickets. A youth cultural center organizes a show, and the members want to invest the money from the tickets in new equipment. The capacity of the hall is 200 guests. At least 75 tickets will be sold to members of the drama society. It is expected that at least three times as many guests will be members of the drama society, compared to the number of guests who are not members of the drama society. The entrance fee for members of the drama society is 30 denars, and the entrance fee for guests who are not members of the drama society is 50 denars. How many tickets should be sold to society members and how many to other guests in order to maximize the ticket revenue?

Solution. This problem can be modeled as a linear programming problem. Let x denotes the number of members, and y denotes the number of non-members of the drama society that have purchased a ticket, then the revenue that has to be maximized is $30x + 50y$. The constraints of the problem are: $x + y \leq 200$ (the capacity of the hall is 200 guests), $x \geq 75$ (at least 75 tickets are sold to members), $x \geq 3y$ (at least three times as many guests are members, compared to the number of guests who are not-members) and clearly $x \geq 0$, $y \geq 0$, for x, y - integers. Since this is a linear programming problem with two variables, we can solve it graphically. We draw the feasible region to determine its vertices: $(75,0),(200,0),(150,50),(75,25)$ (Figure 2). By the Fundamental theorem of linear programming, [1], the maximum of the objective function is attained at a vertex of the feasible region. Since the objective function $30x + 50y$ attains its maximum 7000 at $(150,50)$, the answer is that 150 tickets should be sold to members and 50 tickets should be sold to non-members to maximize the revenue.

Analysis of students' answers. Linear programming is not in the high school curriculum, so here is how students try to solve this problem. As in Problem 2, students easily modeled the objective function and constraints by answering the following questions:

- How many unknown variables are in the problem? Name them.
- How the revenue can be represented?
- What are the conditions that the unknowns must satisfy? (What are the constraints?)

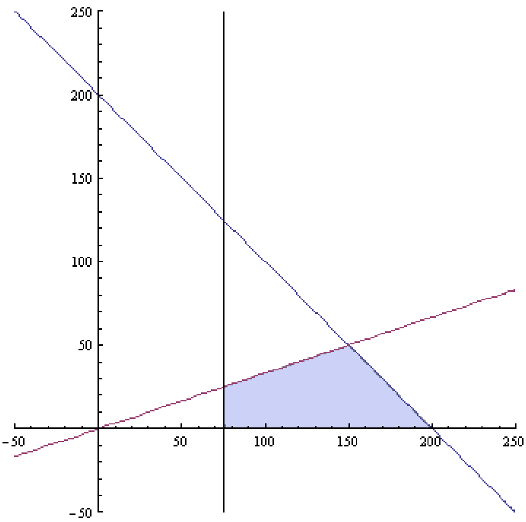


Figure 2. The feasible region of Problem 4.

Then, the problem was solved with different approaches from the students of different ages. The students from the first year, with knowledge of just linear equations and linear inequalities, tried to follow their intuition, which was "to check the boundaries". They started with the idea for using the maximum capacity of the hall, i.e., assuming $x+y=200$. Then substituting $x=200-y$ in the other inequalities, they got $200-y\geq 3y$, i.e., $200\geq 4y$ from where $y\leq 50$. Again, to achieve maximum revenue from the more expensive tickets, they said that $y=50$, which means that $x=150$. In this case, the intuition leads to the correct answer, although the solution is not complete. For instance, the constrained $x\geq 75$ was not analyzed. The more complete solution was given by the older students.

The students from third year had studied analytic geometry, so they got the specific assignment to represent the feasible region of the problem graphically (Figure 2) and to think about the relative position of the line $30x+50y=r$ that is representing the revenue, with the feasible region. Using dynamic simulation in Geogebra, they got the following conclusion:

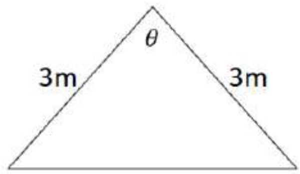
The line $30x+50y=r$ passes through the feasible polygon for values of r that correspond with feasible solutions. The maximum revenue r is obtained at the feasible point $(x,y)=(150,50)$.

Problem 5. Magazine subscriptions. The price of a magazine affects production and demand. This means that if the price goes up, the demand is decreasing. For example, a fashion magazine currently has 84000 subscribers who pay 30 euros each for a three-month subscription to the magazine. Market research predicts that if the price of a three-month subscription increases to 70 euros, then the magazine will lose 48000 subscribers. If we assume that the number of subscribers is linearly dependent on the price of the subscription, how much should the quarterly magazine subscription cost for the company to earn maximum revenue?

Solution. Since the number of subscribers y is linearly dependent of the price x of a three-month subscription, we can put: $y=ax+b$, where a and b are parameters that have to be determined. By solving the system of linear equations: $84000=30a+b$, $36000=70a+b$, we have that the linear dependence is $y=-1200x+120000$. The problem is to find x that maximizes the product $x\cdot y$ subject to $y=-1200x+120000$, which is equivalent to find x that maximizes the product $x\cdot(-1200x+120000)=-1200x^2+120000x$. As in Problem 3, we find that $x=50$ maximizes the last quadratic function. The answer is that with the three-month subscription of 50 euros, the revenue will be maximized.

Analysis of students' answers. This problem was well suited to the students of third year, who used the formula for equation of a line through two points to represent the relation between the price x of the subscription and the number y of the subscribers. The younger students also figured out this dependence by using the slope formula and checking the form of the equation, substituting the coordinates of the given points or by solving the system of linear equations as in the above solution. After finding the product that has to be maximized, students factorized it as: $-1200x^2+120000x=-1200x(x-100)$. Then they found that the zeros of the function are 0 and 100, and after checking few more numbers in between, the students intuitively got the answer that the extreme is in the middle of the interval [0, 100].

Problem 6. Camping tent. A tent is constructed with $3\,\text{m}$ long rods as in the given drawing. What should be the size of the angle at the base of the triangular tent to maximize the space at the top, giving more room under the tent?



Solution. The problem is to find the angle θ that maximizes the area of the given triangle, that is $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot \sin\theta$. Since $\theta = 90°$ maximizes the area, the answer is that the angle at the base of the given isosceles triangle should be equal to $45°$.

Analysis of students' answers. All the students agreed that the maximum area of this triangle would afford maximum room under the tent. This turned out to be an easy exercise for the students that know the formula for area of a triangle using trigonometry functions, as in the above solution. For the younger students, this was a more time-consuming problem, but also an opportunity to have a chance to experiment with mathematics and make it more interesting. Namely, they made a proportional smaller model of the isosceles triangle with some objects (pencils, pens, etc.) and calculated the area of the triangle for different values of the angle in between the equal sides. Changing the angle, they measured the length of the third side (the base), and they calculated the area of the triangle by using the Heron's formula. Some groups needed more time, but some groups found the best approximation with fewer experiments.

From the students' solutions, it is obvious that students can understand and solve some of the optimization problems, by using their mathematics knowledge, even if they haven't learnt any topics about optimization in their curriculum. For some of the problems, a guidance through the solution was needed, usually in a form of questions that lead to the mathematical model and solution algorithm. However, in order to verify the result mathematically i.e. to be sure that the mathematical model and solution algorithm are correct, there is a need for optimization topics in the curriculum.

More detailed analysis of students' answers and behavior are summarized in Table 2, where "Nobody" refers to 0-20% of the students, "Some" refer to 20-50% of the students, "Majority" refer to 50-80% of the students and "All" refer to 80-100% of the students. The quality of students' solutions is "measured" by comparing their answers with the solution of the problem, taking into account that different solutions of a problem are possible. The level of motivation is "measured" with the average duration of time spent on solving the problem and questions asked while solving the problem.

Problem	**Students' answers**	
	Students use recent studied mathematics concepts	**Students are motivated during solving the problem**
1	Nobody	All
2	Majority	All
3	Some	Majority
4	Some	Majority
5	Some	Some
6	Majority	All

Table 2. Summarized analysis of students' answers of the problems.

From the results in Table 2, we can say that the students like to engage themselves in the optimization type of questions because they look familiar to their everyday situations, and they are curious about the final answer. That is why in almost all the problems, most of the students wanted to guess, try a value, discuss, and ask further questions. The first approach towards the solution was usually not the recent covered mathematical concept because (according to the teacher's impression and later conversations with the students) the students do not intuitively feel that the given problem is something "so mathematical" and, they like to know the answer quickly. After the try-and-guess techniques, the students who usually show better academic results in the subject, turn to the mathematical concepts - to solve the problem if they haven't solved it before, or, to confirm their previously found solution with a mathematical model.

We believe that both approaches are good in combination: to nurture curiosity and believe in intuition and tricks, but also rely on the theoretically supported models to ensure mathematically more complete solutions. The guidance questions included in Problem 2 showed that questions of that kind can remind the students to use some specific mathematical concept, which is helpful into building the habit for it. But still, we do not always want to suggest the usage of these type of questions, because they could also restrict the students' thinking and limit the students' ideas, or influence their motivation in searching for alternate solutions.

3. CONCLUSION

Encouraging students to look for outside-the-formula solutions is very beneficial for their development. That is why we believe that if they are given problems that they can understand and will be curious about, they will be persistent in finding the answer. That is the importance of the context in mathematical problems. The students must learn to analyze and organize problem situations and to apply mathematics flexibly in problem situations that are meaningful to them. From the point of view of the student, the problems must therefore be accessible, inviting, and worthwhile solving, [7].

Our aim is to challenge the curiosity in students and lead them into using their knowledge in many variations. Mathematical thinking means looking at things carefully, looking for relationships between them, stripping them down to their essentials, whether it's numerical, structural or logical and then analyzing the underlying patterns. Looking for the functional dependence of the figures in the pattern or the elements of the sequence is a step forward in the investigation and in practice of prediction skills. This practice will help students to connect already learned material to the new material, and students can become more confident and motivated by knowing that they could obtain new knowledge by themselves, [4]. Helping children to understand sequences may improve their fluid reasoning, and improved fluid reasoning could result in improved learning and academic performance. It is also possible that some cognitive ability other than fluid intelligence is involved, [5].

We believe that by assigning optimization problems to the students, except challenging them to apply their mathematical knowledge, we also help in development of the optimization mindset of the young people. By solving optimization tasks, students will practice decision-making and planning skills. Students of modern times are used to doing multiple activities simultaneously, so building awareness of optimization can significantly help them in the further management of future events and processes in their lives.

REFERENCES

[1] D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, *Instroduction to linear optimization*, Athena Scientific, 1997.

[2] W. Blum, R. B. Ferri, *Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?*, Journal of Mathematical Modeling and Applications, 1(1) (2009), 45-58.

[3] N. A. Bushmeleva et al., *Technology for Teaching Students to Solve Practice-Oriented Optimization Problems in Mathematics*, EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14 (10) (2018), em1605.

[4] G. Nikolovska, I. Stojkovska, *Algebraic Strategies for Predictions in Elementary Mathematics Education*, Matematichki Bilten 40(2) (2016), 125-137.

[5] R. Pasnak et al., *Understanding number sequences leads to understanding mathematics concepts*, The Journal of Educational Research 109 (2016), 640-646.

[6] Y. E. Setiawan et al., *Generalization strategy of linear patterns from field-dependent cognitive style*, Journal of Mathematics Education 1(1) (2020), 77-94.

[7] M. Van Den Heuvel-Panhuizen, *The Role of Contexts in Assessment Problems in Mathematics*, For the Learning of Mathematics 25(2) (2005), 2-9.

1 NOVA International School Skopje,
Prashka 27, 1000 Skopje, N. Macedonia
e-mail: gordana.nikolovska.93@gmail.com

2 Institut of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics,
Ss. Cyril and Methodius University of Skopje,
Arhimedova 3, 1000 Skopje, N. Macedonia
e-mail: irenatra@pmf.ukim.mk

АНАЛИЗА НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОД ДРЖАВНАТА МАТУРА ЗА ЕКСТЕРНИОТ ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКА

Бети Ламева [1]

Соња Геговска-Зајкова [2]

Јасмина Маркоска [3]

1.ВОВЕД

Екстерно оценување на постигањата на учениците е процес што се спроведува во многу земји во светот, најчесто преку стандардизирани тестови на знаење. Резултатите добиени од овие тестови за образовните власти се индикатор за квалитетот на образовниот процес. Државната матура е еден вид екстерен завршен испит и се спроведува на крајот од средното четиригодишно образование. Таа е збир од повеќе екстерни и интерни испити, со кои се проверуваат и се вреднуваат знаењата, вештините и способностите кои учениците ги стекнале во четиригодишното средно образование.

Подготовките за воведување на државната матура во Република Северна Македонија започнаа на почетокот на 21. век, при што сите активности беа планирани и реализирани од Државниот испитен центар, во соработка со Министерството за образование и наука, Државниот просветен инспекторат, Бирото за развој на образованието, Центарот за стручно образование и обука, други институции, училишта и надворешни соработници. Првиот официјален документ со кој се дефинира моделот на испитите е Концепцијата за матура и завршен испит во јавното средно образование, донесена во 2005 година. Концепцијата беше изменета и дополнета во два наврати, а од учебната 2018/2019 година на сила е верзијата донесена во 2015 година [4].

Согласно Концепцијата, целите на државната матура се:

- Подигање на општото ниво на знаења, умеења и способности кај учениците.
- Следење и контрола на реализацијата на наставните програми.
- Заокружување на образованието со испит и стекнување диплома за завршено средно образование
- Поквалитетна и поправедна селекција при влезот во високото образование.
- Информирање на учениците, родителите и образовните институции за

постигањата на учениците добиени по пат на валидни и веродостојни мерења [4].

Државната матура за прв пат во Македонија беше реализирана во учебната 2007/2008 година. Нејзината улога во нашата држава покрај сертификациска е и селективна, односно резултатите од државната матура се користат и при рангирање на кандидатите при упис на високообразовните институции.

2. СТРУКТУРА И РЕАЛИЗАЦИЈА НА ДРЖАВНАТА МАТУРА

Државната матура се состои од три дела: задолжителен дел, изборен дел и проектна задача. Задолжителниот дел содржи еден наставен предмет: македонски јазик и литература или албански јазик и литература или турски јазик и литература. Изборниот дел се состои од три наставни предмети. Првиот изборен предмет е еден од предметите математика или странски јазик. Останатите два изборни предмети за гимназиско образование се избираат од Листата општообразовни предмети, а за стручно и уметничко образование еден предмет се бира од Листата на општообразовни предмети и еден од Листата на стручни наставни предмети. Проектната задача се состои од проучување проблем што ученикот го избира од некој од наставните предмети или пошироко од образовните области.

Проверката и оценувањето на знаењата, умеењата и способностите на учениците за наставниот предмет од задолжителниот дел, како и на првиот изборен предмет (екстерен дел од испитот) се вршат екстерно, од страна на надворешни, независни оценувачи. За вториот и третиот изборен предмет, како и за проектната задача (интерен дел од испитот) проверката и оценувањето се вршат интерно од училишните предметни комисии [3].

Државната матура се полага според посебни испитни програми, кои се изработени врз основа на наставните програми за соодветните наставни предмети. За предметите што се полагаат екстерно, испитната програма, како и испитните задачи ги изготвува државната матурска предметна комисија, чиј претседател е од редот на наставно-научниот кадар од универзитетите во Македонија, еден член е советник во Државниот испитен центар, а другите членови се стручни лица од соодветниот наставен предмет [3].

За секоја испитна програма е дефинирана спецификациска рамка со која се определува:

- Процентната застапеност на подрачјата застапени во тестот,

- Процентната застапеност на способностите, т.е. нивото на тежина,
- Бројот на задачи од секое подрачје и групата способности, соодветен на нивната процентуална застапеност во однос на вкупниот број задачи во тестот.

Испитната програма за испитот Математика е иста за сите видови на образование, односно е изработена како пресек на содржини кои ги изучуваат учениците од стручното и од гимназиското образование.

3. РЕЗУЛТАТИ ОД ЕКСТЕРНИОТ ИСПИТ ПО МАТЕМАТИКА

Екстерниот испитот по Математика, во рамките на државната матура треба да провери дали ученикот стекнал доволно знаења и способности што ќе му овозможат успешно да го продолжи своето образование, дали тие знаења се доволни тој успешно да се вклучи во процесот на работа и колкаво е нивото на неговата општа математичка писменост и култура [6]. Со други зборови, цел на испитот по Математика е да се провери дали со стекнатото знаење ученикот е подготвен да расудува логички, да решава проблеми, да ги користи соодветно математичкото знаење и способности во различни контексти, правилно да проценува и одредува методи најсоодветни за решавање на дадени проблеми, разбирајќи ја меѓусебната поврзаност на математичките подрачја.

Со испитната програма се опфатени повеќе математички подрачја распоредени во четири тежински нивоа:

С1 - Знае математички поими, факти и постапки,

С2 - Применува математички поими, факти и постапки,

С3 - Решава едноставни проблеми,

С4 - Расудува логички, критички и систематски.

Знаењата и способностите на учениците се проверуваат преку тест на знаење. Во тестот се застапени задачи од:

- затворен тип, (со повеќечлен избор), во кои ученикот избира еден од понудените четири одговори,
- отворен тип, кои може да бидат:
  - задачи со краток одговор,
  - задачи со целосна постапка на решавање.

Времето на решавање на тестот е 180 минути.

Целта на ова истражување беше да се направи анализа на постигањата на учениците на екстерниот испит по предметот Математика. Беа анализирани резултатите од јунскиот испитен рок во три учебни години: 2018/19, 2020/21 и 2021/22. Во учебната 2019/20 државната матура не беше реализирана, заради кризата предизвикана со вирусот CoVid 19.

Застапеноста на математичките подрачја во испитната програма претрпе неколку промени. Во табелата 1 е прикажана нивната застапеност во испитната програма за разгледуваните учебни години.

	2018/19	2019/20	2020/21	2021/22
Алгебра	35%	/	40%	40%
Геометрија	30%	/	35%	35%
Аналитичка геометрија	15%	/	15%	15%
Веројатност	10%	/	/	/
Прогресии	10%	/	10%	10%

Табела 1. Математички подрачја и нивна процентуална застапеност во тестот, по учебна година

Тестот по Математика во разгледуваните учебни години содржи 38 до 40 задачи од наведените подрачја, при што околу 20 задачи се од затворен тип, а по околу 10 задачи се со краток одговор, односно 10 со целосна постапка на решавање. Бројот на задачи и соодветниот број поени според спецификациската рамка за секоја испитувана година е даден во табелата 2.

Учебна година / Тип на задача	2018/19		2020/21		2021/22	
	Бр. на задачи	**Поени**	**Бр. на задачи**	**Поени**	**Бр. на задачи**	**Поени**
Повеќечлен избор	19	19	20	20	20	20
Краток одговор	11	17	9	18	10	19
Целосна постапка	9	29	9	33	10	39
Вкупно	**39**	**65**	**38**	**71**	**40**	**78**

Табела 2. Број на задачи и поени според спецификациската рамка

3.1. СТРУКТУРА НА УЧЕНИЦИТЕ

Во табелата 3 е прикажан вкупниот број на ученици кои полагале државна матура и бројот, односно процентот на ученици кои полагале Математика во разгледуваните три учебни години.

	Број на ученици по учебна година		
	2018/19	2020/21	2021/22
Полагале државна матура	14764	14773	15101
Полагале математика	2023	1510	1221
Полагале математика во %	13,7%	10,2%	8,1%

Табела 3. Број на ученици кои полагале државна матура

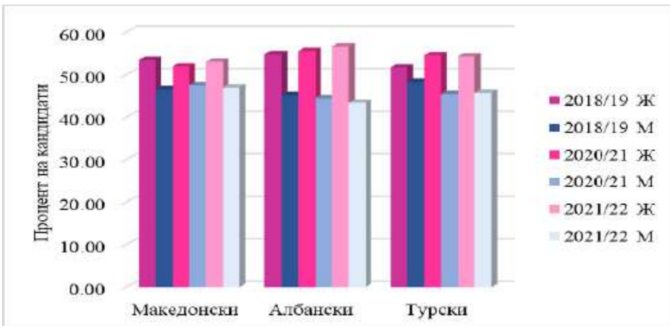
За жал, може да се забележи постојано намалување на бројот на ученици кои како втор екстерен предмет го бираат предметот Математика. Процентуалната застапеност на матурантите, во зависност од јазикот на кој учениците ја полагале државната матура, е речиси еднаков во трите испитувани години, како што може да се види на сликата 1 и тоа е во согласност со националната структура на населението во Македонија.

Слика 1. Наставен јазик на кој учениците полагале државна матура

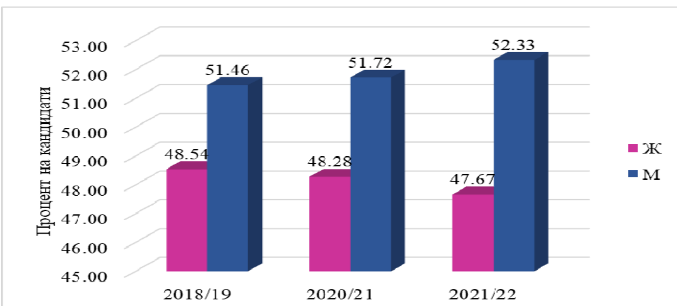
Меѓутоа, истиот заклучок не важи за процентуалната застапеност на учениците кои го полагале испитот Математика. Евидентно е дека многу мал број матуранти кои наставата ја следеле на албански и турски јазик избрале да полагаат математика, а она што е уште позагрижувачко е дека овој број има тенденција на постојано намалување (види слика 2.). Околу 90% од матурантите кои полагале математика се оние кои наставата ја следеле на македонски јазик.

На сликите 3 и 4 е прикажана половата структура на вкупниот број ученици кои полагале државна матура, односно бројот на ученици кои полагале математика, соодветно. Забележливо е дека меѓу матурантите во трите испитани години, независно од јазикот на кој тие ја следеле наставата, има повеќе девојчиња (помеѓу 53 и 57%). Но, состојбата е сосем поинаква кога станува збор за испитот Математика. Тука момчињата се застапени со околу 52%.

Слика 2. Наставен јазик на кој учениците го полагале испитот Математика

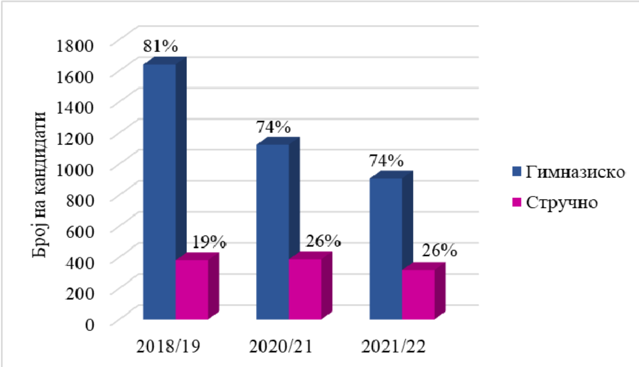


Слика 3. Полова структура на учениците кои полагале државна матура



Слика 4. Полова структура на учениците кои го полагале испитот Математика

Државниот испит по математика го полагаат само учениците од гимназиско и средно стручно образование. Како што може да се види на сликата 5, меѓу матурантите кои избрале да полагаат математика во трите години доминираат оние од гимназиското образование.



Слика 5. Структура на учениците кои го полагале испитот Математика според на видот на образование

3.2. АНАЛИЗА НА ЗАДАЧИТЕ

Просечниот процент на решеност на тестовите во јунскиот рок во 2018/19, 2020/21 и 2021/22 година изнесува 73,34%, 76,27% и 78,31%, соодветно.

Резултатите од анализата покажуваат дека најголемиот број задачи во јунскиот тест имаат добри психометриски карактеристики. Како мерка за тоа се користени следниве величини ([1], [2]):

- Индекс на тежина на задачата или p-вредност (процент на решеност, ако е изразен во проценти) – го претставува делот од учениците кои точно одговориле на дадено прашање, односно

$$p = \frac{n_c}{n},$$

каде што n е вкупниот број тестирани ученици, а n_c е бројот на ученици кои точно одговориле на даденото прашање. Ако $p < 0,2$, прашањето е тешко, а ако $p > 0,8$, тоа е лесно.

- Индекс на дискриминативност - покажува дали едно прашање може да ги раздвои учениците со подобар резултат од оние кои постигнале послаб резултат на тестот:

$$D = \frac{n_{c\_high} - n_{c\_low}}{\max(n_{high}, n_{low})},$$

$n_{c\text{-}high}$, $n_{c\text{-}low}$ е број на ученици со најдобар, односно најслаб резултат на тестот кои точно одговориле на прашањето, n_{high}, n_{low} *е* број на ученици со најдобар, односно најслаб резултат на тестот. Прашањето е дискриминативно ако бројот на ученици кои точно одговориле во групата со највисоки постигнувања е многу поголем од соодветниот број на ученици во групата со најниски постигнувања.

- Поинт бисеријалниот коефициент на корелација

$$r_{pbi} = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_0}}{\sigma}\sqrt{p(1-p)},$$

каде што $\overline{X_1}$ е средната вредност на резултатите на сите ученици кои одговориле точно, $\overline{X_0}$ средната вредност на резултатите на сите ученици кои одговориле неточно, а σ е стандардната девијација на вкупниот резултат. Овој коефициент е мерка за корелацијата на вкупните резултати на тестот со точните одговори на едно поединечно прашање. Препорачани вредности се за $r_{pbi} \geq 0,2$.

Голем број од задачите имаат висок процент на точна решеност, односно висока *p*-вредност, но истовремено се и со добра дискриминативност. Тоа би значело дека тестот е лесен, но и дека ги мери постигањата на учениците. Процентот на решеност на задачите со повеќечлен избор е релативно повисок во споредба со задачите од отворен тип, но нивната дискриминативност е слаба. Задачите од отворен тип имаат подобри показатели во целината на тестот. Во табелата 4 може да се види дека само две задачи имаат процент на решеност помал од 40%. Двете задачи се составен дел од јунскиот тест во 2020/21 година. Првата е задача е со повеќечлен избор од подрачјето Геометрија и е прикажана на сликата 5.

6 **Секоја основа и висината на еден трапез се намалени за 50%. Плоштината на тој трапез е намалена за:** **1 поен**

А. 50%

Б. 25%

В. 75%

Г. 90%

Слика 5. Задача 6, Државна матура Математика, јуни 2021 година

	Број на задачи според тип				
Процент на решеност	**0 - 39%**	**40 - 54%**	**55 - 69%**	**70 - 84%**	**85 – 100%**
2018/19					
Повеќечлен избор	0	0	0	1	18
Краток одговор	0	0	1	3	7
Целосна постапка	0	4	3	2	0
2020/21					
Повеќечлен избор	1	0	0	1	18
Краток одговор	0	0	0	2	7
Целосна постапка	1	1	4	2	1
2021/22					
Повеќечлен избор	0	0	0	0	20
Краток одговор	0	1	1	2	6
Целосна постапка	0	2	2	6	0

Табела 4. Процент на точно одговорени задачи според типот на задачата

Вредностите на p-индексот и поинт бисеријалниот коефициент на корелација за оваа задача се дадени во табелата 5. На прашањето точно одовориле 37% од учениците, но негативната вредност на r_{pbi} укажува на тоа дека учениците со добри постигнувања на целиот тест, ова прашање го одговориле погрешно. Дури 47% од учениците го избрале дистракторот В кој има позитивен r_{pbi}, а дистракторот Г го избрале само 1% ученици, што значи дека е нефункционален. Сето ова укажува на тоа дека ова прашање е проблематично.

Според табела 5, забележливо е дека нема голема разлика во процентот на точни одговори кај учениците од гимназиско и стручно образование, но негативниот r_{pbi} за сите кандидати се должи на негативната вредност на овој индикатор кај учениците од стручното образование.

	Сите кандидати		Гимназиско		Стручно	
	p %	r_{pbi}	p %	r_{pbi}	p %	r_{pbi}
А	15	-0,22	14	-0,22	15	-0,16
Б	37	-0,02	38	0,04	35	-0,09
В	47	0,19	47	0,14	48	0,22
Г	1	-0,03	1	-0,01	1	-0,05

Табела 5. Процент на точни одговори и поинт бисеријален коефициент на корелација за задача 6, јуни 2021

Кај задачите во кои се бодува постапката на решавање, резултатите се пониски, но и овде само една задача има процент на решеност p помал од 40%. Таа е дел од тестот реализиран во јуни 2021 година. И оваа задача е од подрачјето Геометрија и може да се види на на сликата 6.

36 Рамнокрак триаголник има агол при врвот од 120° и радиус на впишаната кружница $r=6$.
Одреди ја плоштината на триаголникот.

4 поени

1 2

Слика 6. Задача 36, Државна матура Математика, јуни 2021 година

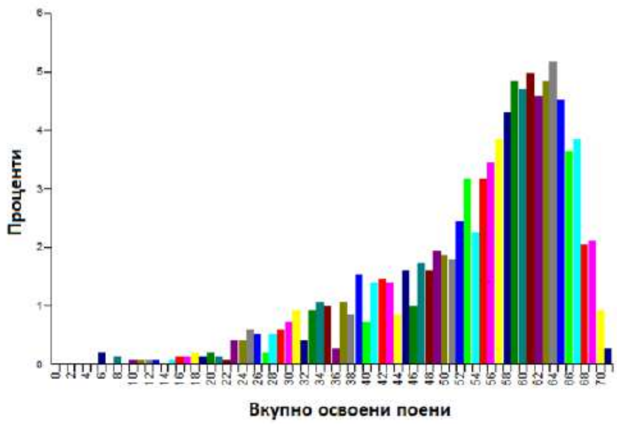
n	Процент на ученици кои добиле *n* поени		
	Сите кандидати	Гимназиско	Стручно
0	48	43	53
1	23	25	20
2	8	9	7
3	6	6	6
4	15	17	14

Табела 6. Процент на ученици и со соодветен број поени за задача 36, јуни 2022

Целосно решение на задачата дале само 15% од учениците, додека речиси половината не добиле ниту еден поен од предвидените 4 поени. Комплетните резултати за оваа задача може да се видат во табелата 6. Резултатите се значително послаби кај учениците од стручно образование. Интересно е тоа, што при прегледувањето на оваа задача, оценувачите утврдија дека учениците понудиле дури девет различни варијанти на решението, кои вклучуваат примена на знаењата од подрачјата геометрија и тригонометрија.

3.3. АНАЛИЗА НА ПОСТИГАЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

Резултатите покажуваат дека матурантите кои избрале да полагаат државна матура по предметот Математика ги имаа совладано сите подрачја застапени во испитната програма. Но, притоа не треба да заборавиме дека овој предмет го полагале релативно мал број матуранти и тоа се, главно, ученици кои своето образование планираат да го продолжат на техничките и природно-математичките факултети.



Слика 7. Постигања на тестот од јунскиот испитен рок, 2020/21 година

Гледајќи ги резултатите од тестот во целина, од хистограмот прикажан на сликата 7, се согледува дека распределбата на вкупниот број освоени поени на тестот е речиси нормална, но повлечена кон десно, односно кон повисоките вредности.Тоа значи дека тестот е релативно лесен. Притоа треба да се има предвид дека предметот Математика најчесто го избираат кандидатите кои имаат солидни познавања од овој наставен предмет и сосем е логично бројот на постигнати поени кај нив да биде висок. Слични хистограми ја прикажуваат распределбата на вкупниот број освоени поени на тестот спроведен во 2018/19 и 2021/22 година.

Просечниот процент на решеност на задачите од сите подрачја во трите испитувани години е висок. Тој е највисок за подрачјата Прогресии и Аналитичка геометрија. Најслаби резултати се постигнати во подрачјето Геометрија, иако и овде просечниот процент на решеност, освен во 2020/21 е повисок од 70% (види табела 8).

Подрачје	**2018/19**		**2020/21**		**2021/22**	
	Просечен процент на решеност	σ	**Просечен процент на решеност**	σ	**Просечен процент на решеност**	σ
Алгебра	71,87	2,54	78,55	5,78	80,60	5,38
Геометрија	73,50	2,32	66,35	4,46	76,44	2,87
Аналитичка геометрија	72,35	1,97	83,16	2,50	79,64	2,72
Прогресии	77,40	1,31	91,28	0,84	73,24	2,01
Веројатност	75,24	1,18	/	/	/	/
Вкупно	**73,34**	**4,32**	**76,27**	**11,99**	**78,31**	**13,08**

Табела 8. Просечен процент на решеност и стандардна девијација по подрачје, за 2018/19, 2020/21 и 2021/22 година

Повеќе од 65% од задачите во сите подрачја имаат процент на решеност повисок од 85% (види табела 9 подолу). Само кај две задачи од подрачјето Геометрија во јунскиот тестот од 2021 година, процентот на решеност е помал од 40% (тоа се задачите спомнати погоре). Во истото подрачје, во трите испитувани години, се среќаваат задачи со процент на решеност помеѓу 40 и 55%.

Учениците имаат потешкотии при решавање на задачата во која се бара да се определи висина на триаголник во кој е впишан паралелограм (просечниот процент на решеност е 48%), иако постојат повеќе начини да се дојде до решението. Релативно мал процент на решеност (47%) има задачата во кој се бара да се определи плоштината на телото добиено со ротација на триаголник околу најголемата страна.

Истото важи и задачата во која се бара волуменот на пирамида чијашто основа е трапез со дадена основа, крак и дијагонала (50%).

Подрачјето Алгебра е најзастапено во тестотовите, а процентот на решеност во трите разгледани години е над 55%.

	Број на задачи според подрачје				
Процент решеност	**0 - 39%**	**40 - 54%**	**55 - 69%**	**70 - 84%**	**85 – 100%**
2018/19					
Алгебра	0	0	2	3	8
Геометрија	0	1	0	1	7
Аналитичка геометрија	0	0	2	0	4
Веројатност	0	1	0	1	3
Прогресии	0	0	1	0	4
2020/21					
Алгебра	0	0	2	3	10
Геометрија	2	1	1	1	7
Аналитичка геометрија	0	0	1	1	5
Прогресии	0	0	0	0	4
2021/22					
Алгебра	0	0	2	5	9
Геометрија	0	2	1	1	10
Аналитичка геометрија	0	0	0	2	4
Прогресии	0	1	0	0	3

Табела 9. Процент на решеност по подрачје, за 2018/19, 2020/21 и 2021/22 година

Просечниот процент на решеност на тестот, во зависност од полот на учениците за трите години, е прикажан во табелата 10. Иако поголем број ученици што го полагале државниот испит по математика се момчиња, резултатите покажуваат дека девојчињата во просек постигнале подобри резултати во сите подрачја застапени на испитот.

Подрачје	2018/19		2020/21		2021/22	
	Женски	Машки	Женски	Машки	Женски	Машки
Алгебра	74.82	69,09	81,49	75,80	84,43	77,11
Геометрија	76.93	70,27	68,82	64,05	80,47	72,77
Аналитичка геометрија	76.94	68,02	85,99	80,52	85,07	74,70
Прогресии	79.72	75,20	93,22	89,48	78,74	68,23
Веројатност	77,19	73,40	/	/	/	/
Вкупно	**76.55**	**70,32**	**78,97**	**73,75**	**82,62**	**74,38**

Табела 10. Просечен процент на решеност според подрачје и пол, за 2018/19, 2020/21 и 2021/22 година

Во табелата 11 може да се види процентот на решеност на учениците во зависност од наставниот јазик. Кај учениците кои наставата ја следеле на македонски јазик се регистрира зголемување на просечниот процент на решеност од година во година, а пак кај учениците кои наставата ја следеле на албански јазик овој процент се намалува и за 2021/22 е под 65%. Кај учениците кои наставата ја следеле на турски јазик, се забележува понизок процент на решеност во 2020/21, додека во останатите две години тој е речиси идентичен. Во 2021/22 година, најниски постигања се регистрирани во подрачјето Геометрија, независно од јазикот на кој се изведувала наставата.

Подрачје	2018/19			2020/21			2021/22		
	Мак.	Алб.	Тур.	Мак.	Алб.	Тур.	Мак.	Алб.	Тур.
Алгебра	71,35	77,58	67,49	78,97	71,23	65,37	81,18	67,80	83,18
Геометрија	72,48	82,66	75,76	66,89	54,92	55,38	77,39	62,09	62,82
Аналитичка геометрија	71,43	81,76	68,18	84,00	65,65	64,04	80,34	63,24	85,32
Прогресии	74,28	81,97	88,74	92,07	77,96	66,32	74,22	61,83	50,00
Веројатност	77,79	73,45	78,79	/	/	/	/	/	/
Вкупно	**72,67**	**79,71**	**73,29**	**76,83**	**65,48**	**61,97**	**79,07**	**64,58**	**73,32**

Табела 11. Просечен процент на решеност и наставен јазик, за сите подрачја, во 2018/19, 2020/21 и 2021/22 година

Резултатите на учениците кои наставата ја следеле на македонски и турски јазик во 2018/19 година, во подрачјата Алгебра, Геометрија и Аналитичка геометрија, се послаби од соодветните резултати во учениците кои наставата ја следеле на албански јазик, што е во целост спротивно од резултатите во 2021/22 година.

Подрачје	**2018/19**		**2021/22**		**2021/22**	
	Гимназ.	**Стручно**	**Гимназ.**	**Стручно**	**Гимназ.**	**Стручно**
Алгебра	73,76	63,73	81,49	75,80	83,89	69,17
Геометрија	75,00	67,04	68,82	64,05	77,20	60,00
Аналитичка геометрија	75,19	60,13	85,99	80,52	85,66	66,38
Прогресии	77,36	66,10	93,99	89,48	82,91	68,14
Веројатност	79,54	68,17	/	/	/	/
Вкупно	**75,36**	**64,66**	**78,97**	**73,75**	**82,47**	**66,38**

Табела 12. Просечен процент на решеност и вид на образование за сите подрачја, во 2018/19, 2020/21 и 2021/22 година

И на крај, евидентно е дека учениците од гимназиското образование во просек имаат повисоки постигања од учениците што доаѓаат од стручното образование, што може да се види во табелата 12. Ова е очекувано, ако се има предвид бројот на часови од математика во двата вида образование.

4.ЗАКЛУЧОК

Актуелниот концепт на државната матура овозможува да се испитаат и да се проценат знаењата, вештините и компетенциите кои учениците ги стекнале во текот на основното и средното образование, во согласност со пропишаните образовни планови и програми. Во извештајот подготвен од ОЕЦД, кој излезе како резултат на извршеното скенирање на образованието во Македонија, концептот на државната матура доби највисоки оценки. Врз основа на резултатите од државната матура, знаењето на секој ученик може да се оцени објективно и непристрасно, а резултатите се споредливи за сите ученици кои ја полагале матурата. Тоа истовремено подразбира остварување на една од целите на матурата -

поквалитетна и поправедна селекција при влезот во високообразовните институции во РСМ. Уште повеќе, со резултатите од државна матура, учениците од нашата држава можат да се запишат каде било во светот, без дополнителни приемни испити.

Но, дали навистина државната матура овозможува поквалитетна и поправедна селекција на кандидатите?

Согласно ЗВО, одлуката за прием на кандидатите најголем дел од факултетите во РСМ ја носат исклучиво врз основа на успехот од средно училиште и резултатите од државната матура. Испитната програма за предметот Математика е иста за гимназиското и стручното образование, иако обемот и фондот на часови во стручното образование се многу помали во однос на гимназиското. Оттука, испитната програма мора да произлезе од наставните програми за предметот Математика што се изучува во стручното образование, а таа најчесто не соодветствува на потребите на високото образование.

Дополнително, на факултетите во РСМ постои можност за упис на кандидатите кои на државната матура полагале предмети кои се несоодветни за студиската програма на која конкурираат. Како резултат на тоа, во прва година на техничките и природно-математичките факултети се случува да се запишат студенти кои полагале странски јазик како екстерен изборен предмет и кои не ги поседуваат соодветните предзнаења од математика. Неретко се покажува дека тие се соочуваат со сериозни потешкотии во следењето на наставата. Извештаите за успешноста на студентите на прв и втор циклус студии на Факултетот за електротехника и информациски технологии [7] покажуваат дека неможноста да ја следат наставата заради недоволните предзнаења, е една од причините околу 13–19% од запишаните студенти да се испишат од факултетот после една година студирање. За овие студенти тоа е изгубена година. По првата студиска година 13–25% од запишаните студенти преминале во квотата со плаќање школарина**,** бидејќи не стекнале најмалку 50% од запишаните 60 кредити во првите два семестри, до почетокот на следниот зимски семестар. Курсевите од математика се застапени во првите два семестри на техничките и природно-математичките факултети во просек со повеќе од 12 кредити, па неисполнувањето на горниот услов многу често е последица на неуспехот во полагањето токму на математичките предмети.

Веројатно овој проблем може да се надмине со воведување приемен испит на факултетите, но прашање е дали е тоа вистинското решение, или така ќе се вратиме чекор назад. Секако, неопходно е да се воведе нов концепт на државната матура, во кој гимназиското и стручното образование ќе бидат раздвоени и со независно дефинирани испитни програми.

Но, да истакнеме и некои позитивни страни на државната матура. Вообичаено, само околу 1% од пријавените кандидати за запишување во прва година на ФЕИТ имале максимални 100 поени од успехот постигнат од средно образование и успехот од државната матура. Во уписната 2020/21, кога заради кризата предизвикана со вирусот CoVid 19 матурантите не полагаа државна матура, а поените при уписот се добиваа само врз основа на успехот постигнат од средното образование, дури 28% од пријавените кандидати за упис на ФЕИТ имале максимални 100 поени. Овие податоци ја потврдуваат констатацијата дека државната матура сепак е коректив на оценките што ги добиваат учениците во средното училиште и дека ваквиот облик на екстерно оценување придонесува за поквалитетна и поправедна селекција при влезот во високото образование.

Меѓу целите наведени во концептот на државната матура беше наведено и информирањето на учениците, родителите и образовните институции за постигањата на учениците, добиени по пат на валидни и веродостојни мерења. Но дали навистина мерењата се валидни и веродостојни? Сведоци сме на сериозни недоследности и повреди на процедурата за полагање на испитите, дефинирана во Правилникот [3], како: недозволено користење електронски уреди и мобилни телефони, напуштање на просторијата подолго од предвиденото време и сл.

Едно можно решение на овој проблем, кое истовремено ќе овозможи да се добијат пообјективни резултати од тестирањата, би било реализирање на екстерните испити во големи простории (спортски сали, училишни холови, амфитеатри на факултетите и др.) со цел овластените набљудувачи да имаат поголема контрола и увид во текот на тестирањето.

Мора интензивно да се работи на подигање на свеста кај сите засегнати страни во овој процес за значењето на државната матура и последиците со кои би се соочиле во случај на непочитување на предвидените процедури. Тоа би повлекло и додавање правни норми кои најстрого ќе ја санкционираат употребата на сите недозволени средства, како и несоодветното однесување при реализацијата на матурските испити.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Y. Attali, T. Fraenkel, *The Point-Biserial as a Discrimination Index for Distractors in Multiple-Choice Items: Deficiencies in Usage and an Alternative*, Journal of Educational Measurement, Vol. 37, No. 1, (2000), pp. 77-86.

[2] S. Varma, *Preliminary Item Statistics Using Point-Biserial Correlation and p-values*, Educational Data Systems, Inc. 15850 Concord Circle, Suite a Morgan Hill, CA 95037, https://jcesom.marshall.edu/media/24104/Item-Stats-Point-Biserial.pdf

[3] Правилник за државна матура, www.matura.gov.mk/data_files/state_graduate/mk/5213_правилник за матура.pdf

[4] Концепција за за државна матура, училишна матура и завршен испит во јавното средно образование, www.matura.gov.mk/data_files/state_graduate/mk/4101_Koncepcija_za_Drzavna_Matura_2023_n.pdf

[5] Извештај за резултатите од екстерните испити на државната матура, 2018/19 година, https://dic.edu.mk/wpcontent/uploads/2016/12/Izvestaj_za_rezultatite_od_eksternite_ispiti_na_drzavna_matura_juni_2018-2019-%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%BE.pdf

[6] Испитна програма за предметот Математика, http://www.matura.gov.mk/data_files/state_graduate/mk/4853_%d0%9c%d0%b0%d1%82%d0%b5%d0%bc%d0%b0%d1%82%d0%b8%d0%ba%d0%b0.pdf

[7] Извештај за успешноста на студентите на прв и втор циклус студии во 2018/19–2021/2022 година, Интерно издание на Факултетот за електротехника и информациски технологии, Скопје

1 Државен испитен центар,
ул. „Васил Ѓоргов“ бб, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: betilameva@dic.edu.mk

2 Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Факултет за електротехника и информациски технологии,
ул. „Руѓер Бошковиќ“ бр.18, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: szajkova@feit.ukim.edu.mk

3 СУГС „Георги Димитров“,
ул. „Варшавска“ бр.3, 1000 Скопје, Р. Северна Македонија
e-mail: jmarkoska@gmail.com

РЕШАВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИ ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ СО ПОМОШ НА ИГРА

Соња Чаламани [1]

Мерита Ајдини [2]

Мажанна Северин-Кузмановска [3]

Елена Котевска [1]

Современата методика во наставата по математика во одделенска настава укажува на можноста за решавање на едно од најважните прашања, прашањето за развој на креативно мислење и креативни способности на учениците. Еден од начините за развивање на ваквите способности во наставата по математика е решавање на текстуални задачи, како форма на креативна работа. Во овој труд покажано е како со помош на играта „Креираме мапи за да го најдеме богатството“, учениците можат да постигнуваат поголем успех при решавањето на текстуални задачи. Дадени се резултати пред и после примена на играта и со тоа се потврдува уверувањето дека секој ученик навистина може да научи, само треба да му се покаже како тоа да го направи. Ова истражување е направено на ученици од трето одделение од едно основно училиште во 2022 година.

1.ВОВЕД

Со математичките задачи и со нивното решавање учениците се среќаваат уште од почетокот на нивното образование. Тие се важна алатка за стекнување со основните математички знаења, вештини и навики, односно истите придонесуваат за развој на математичките способности и креативното мислење. Правилниот избор и примена на математичките задачи се предуслов за квалитетна настава по предметот математика и добри резултати на учениците. Затоа е потребно за задачите да се отстапува поголем дел од наставното време. За да се развие кај учениците способност за решавање на задачи, мора кај нив да се поттикне одреден интерес и да се развијат соодветни мисловни операции. Со цел да се постигне тоа, ученикот континуирано треба да се подучува како да им пристапува на математичките задачи. Тоа е процес кој започнува уште во прво одделение од основното образование. Математичките задачи треба да поттикнуваат на логичко мислење, математички способности, креативност, интерес за математиката, интелектуално задоволство и популаризација на математиката [3].

Во литературата по методика во наставата по математика можат да се сретнат различни дефиниции за поимот текстуална задача. Така според руските автори М.И. Моро и А.М. Пискало текстуална задача е „*прашање формулирано со зборови, на кое може да се даде одговор со помош на аритметички операции*". Ј.Ф. Чекмарев и Б.Т. Снигерев даваат дефиниција во која се споменуваат величини и зависност меѓу нив. Според нив, текстуална задача се вика „*прашање во кое треба да се определи бројна вредност на некоја непозната величина, по дадени бројни вредности на други величини, кои се наоѓаат во одредена зависност, како меѓу себе, така и со непозната величина*". Според А.П. Стоилова и А.М. Пискало „*текстуална задача е опишување на некоја ситуација на природен јазик, со барање да се даде количествена карактеристика на некоја компонента на таа ситуација, да се воспостави постоење или непостоење на некаков однос меѓу нејзините компоненти или да се определи видот на тој однос*".

Според тоа може да се прифати дека текстуалната задача е вербално опишана ситуација, во која на проблемски начин се искажани врските помеѓу величините од кои за барем една од нив не ни е позната бројната вредност и таа може да се определи со примена на аритметички операции што произлегуваат од врските помеѓу величините [3]. Текстуалните задачи кои претставуваат конкретни, на учениците познати животни ситуации, им помагаат природно, без многу напор да ги усвојат математичките сознанија во различни животни ситуации. Со запишувањето на текстуалните задачи во форма на броен израз, равенка или други записи, на учениците им се овозможува прикажување со истите симболи на задачи различни по содржина. На тој начин кај учениците се развива разбирање за математиката, како сеопфатна и универзална во опишување на природните и општествените појави. Самостојно составување, решавање и проверување на точноста на решавањето е вистинска творечка и истражувачка работа на учениците. Решавањето на текстуалните задачи бара примена на одредени мисловни операции, па затоа тоа е најкорисна и најзначајна мисловна активност на учениците. Со решавањето на задачите покрај усвојувањето на математичкото знаење и развивањето на мисловните способности, учениците се мотивираат за издржување на нови напори, се развива истрајност, упорност и други позитивни карактеристики на личноста на учениците.

2. МАТЕМАТИЧКИ ИГРИ

Веќе подолго време различни експерти, педагози и математичари дебатираат за улогата и вредноста на играта и нејзино влијание во наставата и ефективното учење во учењето математика. Определбите „за“ и „против“ играта во образовен контекст продуцираат аргументи за играта кои ја држат високо во програмата на образовни политики, истражувања и секојдневна пракса на наставниците. Играта продолжува да добива сериозен третман, а потврда за тоа се модерните истражувања кои се направени и се уште се прават во врска со употребата на играта, заради идеалното соединување на теоријата и праксата како и обезбедување на квалитет и подобрување на истото во процесот на учењето и наставата по математика.

Дидактичко-методичкото поставување на математичките текстуални задачи низ игровната активност се однесува на нејзината солидна организација, планирање и создавање на структура што ќе ги утврдува точно елементите во нејзината реализација. Наставниците треба да бидат тие што ги знаат различните значења со цел да одлучат кој пристап и кои дидактичко-методолошки ситуации ќе се спроведат на час, со цел да се создава зависен однос меѓу играта и учењето математика. Затоа за секој наставник по одделенска настава посебен предизвик би требало да претставува прашањето - како учениците да се научат да учат [4]. Во врска со начините на самостојно учење заедно со колегите наставници од одделенска настава години наназад се обидуваме преку низа на различни активности (меѓу кои е и истражувањето направено за овој труд) да им се помогне на учениците во развивањето на мета-когнитивните вештини, т.е. осознавање на сопствениот начин на учење и пронаоѓање на ефикасна стратегија која води кон успех [1].

Убедени сме дека сите деца можат да научат, само треба да знаат како и да веруваат дека можат. Ако ги поставиме прашањата: Која работа знаат да ја направат децата најдобро? Што е неразделен дел во животот на детето? Одговорот е играта. Тоа е активност која е омилена кај децата и би требало да се реализира и на часовите по математика, бидејќи играта е неразделен дел од животот на детето. Поаѓајќи од претходно искажаното, сметаме дека оваа активност е добро подетално да ја разгледаме и да ја примениме при решавање на текстуални математички задачи.

Проучувајќи ја теоријата, согледувајќи ги искуствата на нашите наставници и нивната работа со учениците, забележавме дека некои од игрите преку кои се вежбаше на часовите по математика, се издвоија како прифатливи, мотивирачки и блиски за нив. Потоа тоа полека почна да преминува во конкретно осмислени и организирани активности, од кои произлезе и ова истражување чии резултати се дадени во трудот подолу. Во еден период, во индивидуалната работа со учениците кои имаат потешкотии во учењето математика, се забележува дека тие својот неуспех го лоцираа во решавањето на текстуални задачи. Наставниците исто така, кога беа прашувани одговараа дека учениците грешат при решавањето на текстуалните задачи и дека тоа се должи на тоа што не успеваат да ја прочитаат и да ја разбираат задачата. Бидејќи работата на наставниците е полна со предизвици, се појави нов предизвик – Како да им се помогне на учениците да постигнуваат поголем успех при решавањето на текстуалните задачи?

Со оглед на тоа што: техниката „мрежа на темата“ се покажа како успешна при работа со текстови, „концептуалните мапи“ се покажале како успешна техника во учењето како да се учи [6]. Бидејќи текстуалните задачи содржат текст и концепт, а игрите се дел од предизвикот, оттука произлезе и истражувачкото прашање:

Дали преку примена на играта, како техника за сликовито претставување (концептуални мапи), може да се подобри читањето, разбирањето и решавањето на текстуалните задачи кај учениците од III одделение? И благодариме на нашата колешка, коавтор на овој труд и долгогодишен одделенски наставник, што во однос на предметот математика покажа доволно храброст да работи со учениците на нова активност како што е играта „Креираме мапи за да го најдеме богатството“.

3. ИГРАТА: „КРЕИРАМЕ МАПИ ЗА ДА ГО НАЈДЕМЕ БОГАТСТВОТО“

Проучувајќи ја литературата која се однесува на техниките за сликовито претставување, наидовме на поимот концептуална мапа и тука всушност ја пронајдовме и нашата игра. Техниката на концептуално мапирање ја развил Joseph D. Novak и неговиот тим на Универзитетот Корнел во седумдесеттите години од XX век, и се заснова на когнитивните теории на David Ausubel. Концептуалното мапирање е техника за визуелизирање на врските помеѓу различните поими, а концептуалните мапи се графички алатки за организирање и претставување на знаењата. Поимите се запишуваат во текст боксови, а се поврзуваат со стрелки и знаци [5].

Во наставната, оваа техника може да се употребува во процесот на учење на нови содржини, при повторување, систематизирање на тема, но и за проверка на наученото. Текстуалната задача по математика претставува проблемска ситуација во која се дадени повеќе информации и податоци кои треба да се воочат и да се најдат врските помеѓу нив, односно да се разбере концептот на самата задача. Според Mayer, R. E., "*Решавањето на текстуалните задачи бара претставување на проблемот, изработка на план за решавање и извршување на тој план. Освен што мораат да ги совладаат основните аритметички и алгебарски вештини, учениците мораат да научат и како да ги употребуваат тие вештини за да можат успешно да решаваат математички проблеми* " [2].

Техниката на концептуално мапирање ја применивме преку играта: ***„Креираме мапи за да го најдеме богатсвото"***, и истата стана многу омилена меѓу учениците и им помогна при решавањето на текстуални задачи. Играта се состои од следното: прво се чита задачата, а потоа во облачињата се запишуваат посебните делови на задачата: што е познато, што не е познато, што треба да определиме, кои се врските меѓу познатите и непознатите и др. Облачињата секогаш се наоѓаат над барањето кое е поставено во задачата. Во „ковчегот на богатството" се става тоа што е „скриено", т.е. решението на задачата кое учениците треба да го пронајдат. Понекогаш се креира и добра приказна која нè потикнува да ја решиме задачата. Се црта шема со која се „наоѓа богатството", како што е дадено во примерот подолу.

Пример 1. Во еден овоштарник Марко собрал 840 јаболка кои треба да се пакуваат во гајби. Првиот ден тој спакувал 9 гајби со по 52 јаболка во секоја гајба. Колку јаболка останале неспакувани?

Колку јаболка останале неспакувани?

Бројниот израз кој соодветствува е:

$$840 - 9 \cdot 52 = 840 - 468 = 372$$

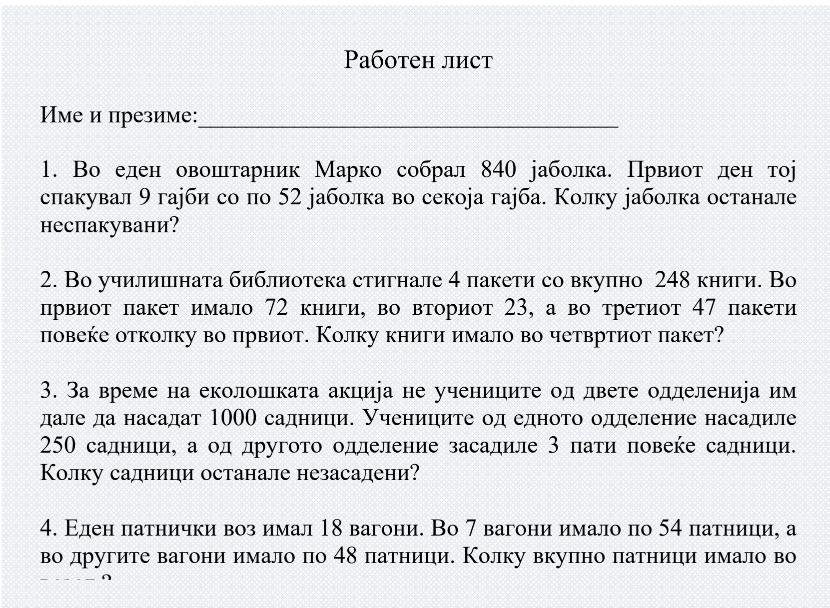
Бараниот одговор е: 372

3.1. АКЦИОНЕН ПЛАН ЗА АКЦИОНОТО ИСТРАЖУВАЊЕ

Пред почетокот на истражувањето изготвен е акционен план кој се одвиваше во три фази:

1. Период на подготовка

Во периодот на подготовка за акционото истражување одделенскиот наставник, кој води трето одделение, беше вклучен во изборот на текстуални задачи, кои потоа ги распоредивме во три категории според нивото на сложеност. Критериумот за ниво на сложеност беше: бројот на елементи и врски (операции) во задачата и во колкава мера елементите и врските (операциите) се експлицитно дадени во задачата.



Работен лист

Име и презиме:____________________________________

1. Во еден овоштарник Марко собрал 840 јаболка. Првиот ден тој спакувал 9 гајби со по 52 јаболка во секоја гајба. Колку јаболка останале неспакувани?

2. Во училишната библиотека стигнале 4 пакети со вкупно 248 книги. Во првиот пакет имало 72 книги, во вториот 23, а во третиот 47 пакети повеќе отколку во првиот. Колку книги имало во четвртиот пакет?

3. За време на еколошката акција не учениците од двете одделенија им дале да насадат 1000 садници. Учениците од едното одделение насадиле 250 садници, а од другото одделение засадиле 3 пати повеќе садници. Колку садници останале незасадени?

4. Еден патнички воз имал 18 вагони. Во 7 вагони имало по 54 патници, а во другите вагони имало по 48 патници. Колку вкупно патници имало во

Слика 1. Примерок од работен лист работен пред вежбањето

Сите задачи, пред да ги распоредиме во групи за вежби и примери, ги решивме со употреба на концептуални мапи со што сакавме да стекнеме увид како функционира ваквиот начин на решавање. Откако задачите беа распоредени по категории, четири задачи, од кои една од прво ниво, две од второ ниво и една од трето ниво, беа избрани за почетното и крајното мерење, т.е. изготвен е работен лист со 4 текстуални задачи кој е даден на сликата 1 погоре.

2. Период на употреба на играта - акција

Промената на вежбањето во решавањето текстуални задачи беше во однос на техниката на решавање. На учениците им беше претставена играта, концептуалните мапи и решавањето на текстуални задачи со нивна помош. На крајот на вежбањето се очекуваше учениците да умеат да согледаат што се бара во задачата, кои податоци се дадени, какви се врските помеѓу податоците, односно кои операции треба да се употребат и како точно да ја постават задачата.

Активностите се одвиваа според горенаведениот циклус во текот на 5 дена. Откако завршија вежбите со задачи од прво ниво на сложеност се премина на задачи со второ ниво, па на задачи со трето ниво на сложеност. Учениците работеа на работни листови, кои потоа беа прегледувани и беше правена квантитативна и квалитативна обработка на резултатите. Задачите ги запишуваа и во своите тетратки за да можат повторно дома да ги разгледуваат истите. Откако завршија вежбите, на учениците повторно им беше даден работен лист со четири текстуални задачи, како на почетокот пред да започне вежбањето (Слика 2 подолу).

3. Прибирање на податоци

- Почетно мерење (Работен лист со 4 текстуални задачи);
- Мерење за време на акцијата (Анализа на задачите кои учениците ги решаваа и следење на начинот на решавање по давање повратна информација);
- Мерење на крајот од акцијата (Работен лист со 4 текстуални задачи).

Работен лист

Име и презиме:___________________________________

1. Во еден овоштарник Марко собрал 430 круши. Првиот ден тој пакувал 11 гајби со по 35 круши во секоја гајба. Колку круши останале непакувани?

2. Ликовната секција добила 3 пакети со вкупно 248 прибори за цртање. Во првиот пакет имало 63 прибори, во вториот 28 повеќе отколку во првиот. Колку прибори имало во третиот пакет?

3. За време на акција за украсување на дворот на училиштето, на учениците од три одделенија им дале да насадат 500 цвеќиња. Учениците од едното одделение насадиле 150 цвеќиња, а од другото одделение засадиле 2 пати повеќе цвеќиња. Колку цвеќиња останале незасадени?

4. Во 4 автобуси се распоредуваат ученици за екскурзија. Во првиот и вториот автобус биле распоредени по 35 ученици, а во останатите биле распоредени вкупно 50 ученици. Колку ученици тргнале на екскурзија?

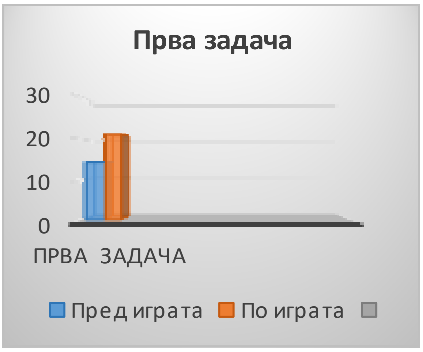
Слика 2. Примерок од работен лист работен после вежбањето

3.2. КВАЛИТАТИВНА И КВАНТИТАТИВНА АНАЛИЗА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Во овој дел ќе ги претставиме резултатите од истражувањето, до кои дојдовме после спроведена квалитативна и квантитативна анализа на активностите поврзани со истражувањето.

Задача	**Број на точно решени задачи**	
	Пред примена на играта	После примена на играта
1	14	21
2	8	17
3	15	19
4	19	11

Табела 1. Анализа на Работен лист пред и после примена на играта



Графикон 1.

Графикон 2.

Графикон 3.

Графикон 4.

Податоците претставени во Табелата 1 и Графиконите 1, 2, 3 и 4 покажуваат дека, кај сите четири задачи бројот на ученици кои точно ги решиле задачите во второто мерење е поголем во однос на првото мерење.

Со квалитативната анализа што ја правевме на работните листови ги согледавме грешките кои учениците ги прават при решавањето на текстуалните задачи. Учениците не можат да ги согледаат сите елементи во задачата, не се соодветни врските меѓу елементите, не се применети соодветни операции, а при постапното решавање на крајот кога треба да се дојде до решението се изоставa некој елемент. Според учениците, потешкотии при решавање на задачите се јавуваат затоа што задачите се неразбирливи, комплицирани, имаат многу податоци, кои тие не ги земаат предвид бидејќи не ги читаат внимателно текстуалните задачи.

Квантитативната анализа што ја направивме на резултатите пред и по увежбувањето укажува на тоа дека бројот на ученици кои точно ги решиле задачите е поголем по вежбањето (табела 1 и графиконите 1, 2, 3, 4). Но уште подрагоцени се резултатите и забелешките од следењето на напредокот на учениците за време на вежбањето, затоа што токму тие зборуваат за процесот на учење низ кој поминувале учениците, за тоа како станувале свесни за сопственото учење и напредувале.

Најважно од сè, она што не може да се покаже со бројка, збор или слика, е промената во однесувањето на учениците. Од неактивни ученици стануваат активни, т.е. ученици кои имаат за цел да станат велемајстори за решавање на текстуални задачи со помош на креирање на мапи за барање на скриеното богатство – секако, математичко.

4. ЗАКЛУЧОК

Ова истражување го потврдува нашето уверување дека секој ученик навистина може да научи, само треба да му се покаже како. Најголемите неуспеси на учениците најверојатно се должат на нивните стравови од она што не им е познато и од она што не го разбираат. Со примената на играта на часот по математика наместо стравови, добивме насмеани и ведри лица на учениците.

Потешкотии се појавија во поглед на планираното време. Играта беше тешко да се заврши за еден час како што планиравме. Учениците очекуваа повратна информација од она што го работевме претходниот час, па анализа на задачата, бараа да имаат доволно време за вежбање, но и за дискусија, така што моравме да останувамe повеќе од превиденото.

Ова е искуство кое сметавме дека треба да се сподели со одделенските наставници, за да ги мотивираме да ги применуваат игрите на часовите по математика, посебно при решавање на текстуални задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Џ. Род, М.Е. Кнапмилер, М. Туре *Математика со размислување во почетните одделенија*, Биро за развој на образованието, 2011.

[2] R. E. Mayer, *Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving*, Instructional Science, 26(1998) 49 – 63.

[3] M. Seweryn-Kuzmanovska, S. Chalamani, *Textual and Problem Tasks in the Modern Teaching of Mathematics*, International Conference „Education and Research Across Time and Space” 1100th Death Anniversary of St. Clement of Ohrid, ISBN: 978-9989-100-50-5 (2016) 678 – 682.

[4] S. Chalamani, M. Seweryn-Kuzmanovska, *Mathematics Teachers' Role in Problem Task-Solving Teaching*, International Scientific Conference "The Education at the Crossroads – Conditions, Challenges, Solution and Perspectives", Macedonian Academy of Sciences and Arts, Bitola, ISBN: 978-608-4616-89-4 (2018) 199 – 202.

[5] *Introduction to concept mapping-Joseph D. Novak,* http://uwf.edu/jgould/ConceptMappingIntro.pdf

[6] *Classroom Assessment Techniques Concept Mapping – Michael Zeilik*, http://www.flaguide.org/cat/conmap/conmap1.php

1 Технички факултет Битола,
Македонска Фаланга 37, (7000) Битола, Р. Македонија
e-mail: tfbedu@tfb.uklo.edu.mk

2 ООУ „26 Јули",
ул. Индира Ганди бр. 31, Општина Шуто Оризари, (1000) Скопје,
Р. Македонија
e-mail: ou26juli@yahoo.com

3 Педагошки факултет,
Васко Карангелевски б.б, (7000) Битола, Р. Македонија
e-mail: pfbt@uklo.edu.mk

ВИЗУЕЛИЗАЦИЈА НА ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ И НИВНИТЕ СВОЈСТВА

Мира Ташкова [1]

Зоран Трифунов [2]

1.ВОВЕД

Со последните промени во образованието во Македонија се намали или остана истиот, многу мал, фонд на часови по математика, како во гимназиите така и во средните стручни технички училишта. Но, за учениците да бидат идни успешни инженери потребно е да имаат добри познавања од математиката. Па во овие услови, ние како наставници по математика, треба да изнајдеме начин како да го постигнеме истото. Примената на софтверите и нивно користење при изучување на математиката, е еден од начините како да дојдеме до посакувани подобри резултати. [4], [5], [6], [7], [8], [9].

Во овој труд ќе презентираме како со помош на слободниот софтвер GeoGebra визуелно ќе ги претставуваме функциите и со динамички аплети ќе определуваме: дефинициона област, множество вредности, нули, монотоност и друго. Ќе претставиме и некои аплети за елементарни функции каде коефициентите се зададени со лизгачи, со кои динамички ќе се менуваат функциите и ќе се определуваат нивните својства. Сите овие аплети се достапни на интернет и истите ќе може да ги користат и самите ученици при стекнување на нови знаења по математика [10], [11], [12].

За оваа тема се одлучивме поради проблемите со кои се среќаваме секојдневно во работата во изминатите години, како пред воведување на модуларно дизајнираната програма така и после тоа. Проблемот е настанат уште во 2007 година, кога неделниот фонд на часови во стручните училишта е намален на три часа неделно во прва и втора година и два часа неделно во трета и четврта година по редовна математика и уште два часа за изборна математика. Меѓутоа предметот изборна математика учениците не го избираат, па ученици во овој период немаат континуитет во изучувањето на наставните содржини по математика. Последните промените во средното стручно образование од 2019 година со кои се зголеми бројот на поими и содржините што треба да се изучат, а фондот на часови остана ист, го намалија интересот кај учениците за изучување на математиката. Исто така, учениците се помалку го избираат предметот математика како изборен предмет, поради зголемениот интерес за изучување на другите понудени изборни предметите, како што се: Веб програмирање, 3Д моделирање, Мултимедија и слично.

Во наставните програми за модуларно дизајнирани програми од 2019 година, за сите години средно образование, воведени се многу нови наставни содржини кои треба да се изучуваат, а фондот на часови не е променет. Во трета година воведени се наставни содржини за испитување и својства на функции, кои за успешно презентирање од наставниците и совладување од страна на учениците, наставниците може да користат динамички софтвери [13], [16], [18]. На тој начин учениците ќе можат да ги совладаат планираните содржини, а притоа ќе го применуваат и своето знаење од стручните предмети.

2.ПРИМЕНА НА АПЛЕТИТЕ ЗА ПРЕЗЕНТИРАЊЕ НА НАСТАВНИТЕ СОДРЖИНИ ПО МАТЕМАТИКА

Користејќи го слободниот софтвер GeoGebra направени се аплети кои се користат во реализирањето на наставата по математика во средните стручни училишта.

График на линеарна функција

Најнапред ќе се задржиме на графикот на линеарна функција и условот за паралелност кои се опфатени во модуларна единица 6: Линеарна функција и систем од две линеарни неравенки со две непознати во прва година [1].

Во примерите накратко ќе биде објаснета постапката за изучување на линеарните функции на класичен начин, а потоа ќе бидат дадени и аплетите кои може да се користат при реализирање на наставата.

Пример 1. Нацртај график на функцијата $f(x)=3x-1$.

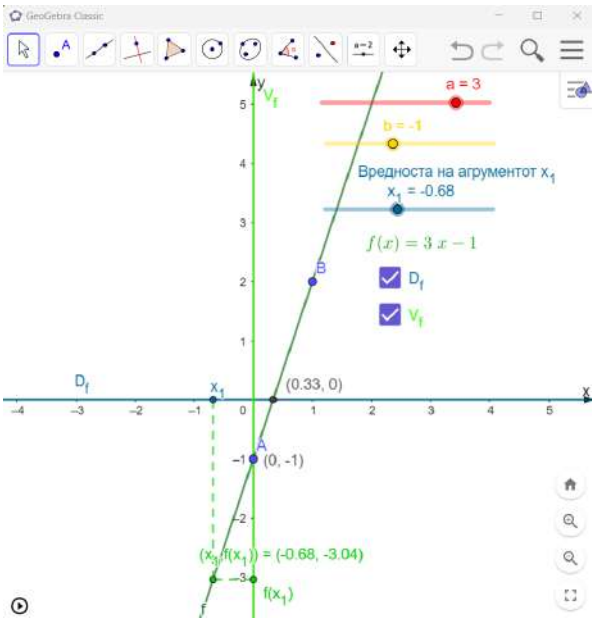
За цртање на графикот на функцијата доволно е да определиме две произволни точки кои припаѓаат на грфикот, и потоа да се скицира линијата.

За $x=0$, $f(0)=3\cdot 0-1=-1$, т.е. A(0,-1),

За $x=1$, $f(1)=3\cdot 1-1=2$, т.е. B(1,2).

Добивме две точки и низ нив минува единствена права која може да ја скицираме.

Истата постапка за цртање на график на линеарна функција може да ја разгледаме и на аплетот за график на линеарна функција, каде низ двете точки може да повлечеме права (со наредбата за права линија низ две точки) и да го добиеме нејзиниот график. Но во аплетот додаваме и лизгачи за коефициентите на линеарната функција и со поместување на лизгачите може да добиеме различни линеарни функции и да ги разгледуваме својствата што важат за нив.



Цртеж 1. Визуелизација на График на линеарна функција и својствата на функцијата (link).

Својствата што важат за линеарната функција, визуелно ги претставуваме на аплетот. Со поместување на лизгачите ги набљудуваме промените на линеарната функција.

Својства на линеарна функција:

1. Дефинициона област на линеарната функција е множеството на реални броеви $D_f = R$. Со чекирање на полето D_f, во плава боја се обојува x – оската која е дефиницона област.
2. Множеството вредности на линеарната функција е $V_f = R$. Со чекирање на полето V_f, во зелено се обојува y – оската која е множество вредности.

(За исцртување на дефиницоната област и множеството вредности се користи и лизгач за x_1 координатата на произволната точка од правата

$(x_1, f(x_1))$ и со вклучена анимација и траг од проекциите на точката на x и y – оската се добиваат дефиниционата област и множеството вредности.)

3. Графикот на линеарната функција ја сече y – оската во точката $(0,b)$

   Ако $b > 0$, графикот ја сече функцијата во позитивниот дел на y – оската.

   Ако $b = 0$, графикот минува низ координатниот почеток.

   Ако $b < 0$, графикот ја сече функцијата во негативниот дел на y – оската.

4. Ако $a > 0$, функцијата монотоно расте.

   Ако $a < 0$, функцијата монотоно опаѓа.

   Ако $a = 0$, функцијата е константна.

Својствата 3 и 4 се визуелизираат во аплетот со поместување на лизгаците a и b.

Чекори за конструкција на Аплет – Линеарна функција.

Име	Дефиниција	Вредност
□@>X a		a = 3
□@>X b		b = -1
$C=:F8X0 f	a x + b	f(x) = 3 x - 1
">G:0 C	Пресек(f, xОска, 1)	C = (0.33, 0)
">G:0 D	Пресек(f, yОска, 1)	D = (0, -1)
">G:0 A		A = (0, -1)
">G:0 B		B = (1, 2)
□@>X x_1		x_1 = -2.75
">G:0 E	(x_1, f(x_1))	E = (-2.75, -9.25)
□@020 g	Нормала(E, xОска)	g: x = -2.75
">G:0 F	Пресек(g, xОска)	F = (-2.75, 0)
□@020 h	Нормала(E, yОска)	h: y = -9.25
">G:0 G	Пресек(h, yОска)	G = (0, -9.25)
□BA5G:0 i	Отсечка(F, E)	i = 9.25
□BA5G:0 j	Отсечка(G, E)	j = 2.75
"5:AB B5:AB1	"f(x)=" + (ФормулаТекст(f)) + ""	"f(x)=3 \; x - 1"
□@020 p		p: y = 0
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB c		c = true
□@020 eq1		eq1: x = 0
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB d		d = true

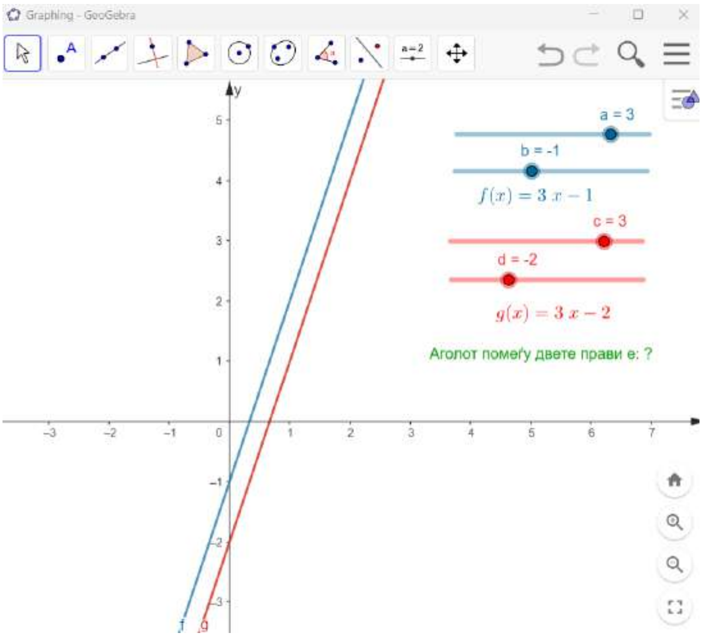
Слика 1. Чекори на конструкција на Аплет – Линеарна функција

За определување заемен односот на две прави конструран е Аплет – Заемен однос на две прави.

Пример 2. Во истиот координатен систем нацртај график на функцијата $f(x)=3x-2$. Каков е заемниот однос на двете прави?

Правите кои имаат ист коефициент на правецот се паралелни па само повлекуваме права паралелна на дадената која ја сече y-оската во точката (0, −2).

Аплет – Заемен однос на две прави, за дискусија на условот за паралелност и нормалност на две функции. Со поместување на вредностите на лизгачите може визуелно да се претстави заемна положба на правите.



Цртеж 2. Заемен однос на две правии (link).

График на квадратна функција Текот на квадратна функција се изучува во модуларна единица 6: Квадратна функција, квадратна неравенка, систем и вкупност од квадратни неравенки со една непозната, од втора година [2].

Пример 3. Нацртај график на функцијата $f(x)=x^2-2x-1$.

За да го нацртаме графикот на било која квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$, ги одредуваме карактеристичните точки на функцијата:

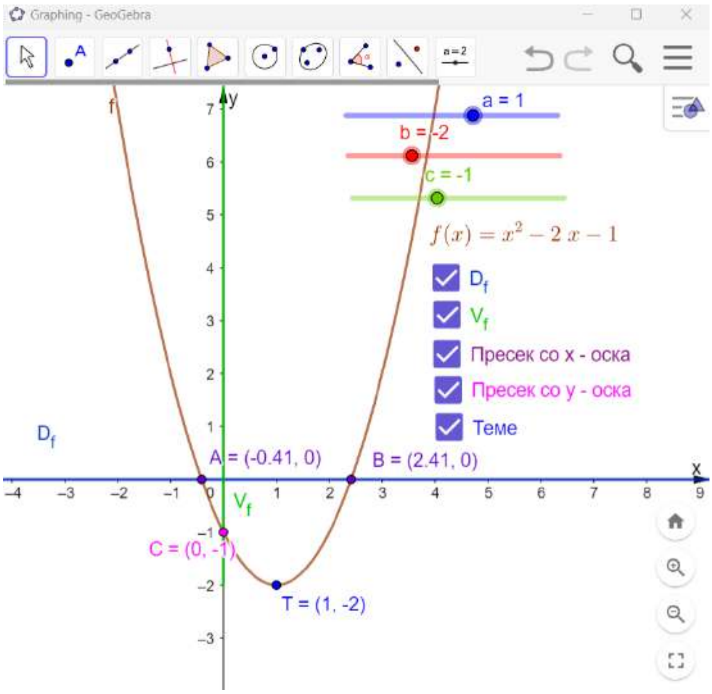
1) Теме $T(\alpha,\beta)$, $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$, $\beta=-\dfrac{D}{4a}$, т.е. $T(1,-2)$ е темето на функцијата,

2) Нули на квадратна функција (пресек со x – оската, $f(x)=0$), т.е. $x_1=1-\sqrt{2}\approx-0.4$ и $x_2=1+\sqrt{2}\approx 2.4$ или означените точки A и B.

3) Пресек со y – оската, за $x=0$, т.е. $C(0,-1)$.

4) Произволни точки (по потреба), и цртање на графикот.

Аплет за график на квадратна функција.



Цртеж 3. График на квадратна функција (link).

Со помош на Аплетот за квадратна функција со поместување на лизгачите за коефициентите $a=1$, $b=-2$ и $c=-1$ се добива графикот на квадратната функцијата од примерот 3. На графикот се претставени карактеристичните точки на функцијата.

Својства на квадратната функција:

1) Дефинициoната област е множеството на реални броеви: $D_f=R$,

со чекирање на полето за D_f графички се добива дефиниционата област.

2) Темето на функцијатае $T(\alpha,\beta)$, со чекирање на полето за „Теме“ се прикажува темето на функцијата. (При воведување на темето на параболата во аплетот се користи дефиницијата за теме на парабола).

3) Ако $a>0$ - параболата е отворена нагоре и за $x=\alpha$ функцијата има најмала (минимална) вредност $y_{\min}=\beta$. Темето $T(\alpha,\beta)$е најниска точка, минималната вредност на функцијата.

Ако $a<0$ - параболата е отворена надоле и за $x=\alpha$ функцијата има најголема (максимална) вредност $y_{\max}=\beta$. Темето $T(\alpha,\beta)$е највисока точка, максималната вредност на функцијата.

(Со поместување на вредностите на лизгачот „a“ визуелно се претставени својствата).

4) За $a>0$ множеството вредности на функцијата е$V_f=[\beta,\infty)$.

За $a<0$ множеството вредности на функцијата е $V_f=(-\infty,\beta]$.

5) Графикот на функцијата е симетричен во однос на правата $x=\alpha$.

Чекори на конструкција на Аплет – Квадратна функција.

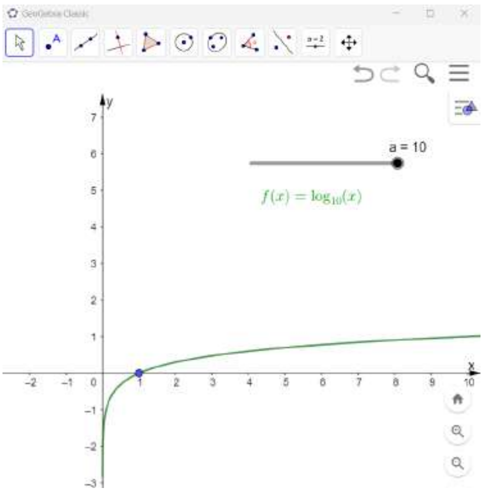
Име	Дефиниција	Вредност
□@>X a		a = 1
□@>X b		b = -2
□@>X c		c = -1
$C=:F8X0 f	a x² + b x + c	f(x) = 1 x� - 2 x - 1
">G:0 T	((-b) / (2a), f((-b) / (2a)))	T = (1, -2)
">G:0 A	Пресек(f, xОска, 1)	A = (-0.41, 0)
">G:0 B	Пресек(f, xОска, 2)	B = (2.41, 0)
">G:0 C	Пресек(f, yОска, 1)	C = (0, -1)
□@020 g		g: y = 0
□>;C?@020 h	Полуправа((0, y(T)), C)	h: x = 0
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB d		d = true
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB e		e = true
"5:AB B5:AB1	"f(x)=" + (ФормулаТекст(f)) + ""	"f(x)=x^{2} - 2 \; x - 1"
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB i		i = true
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB j		j = true
□C;>20 (;>38G:0) 2@54=>AB k		k = true

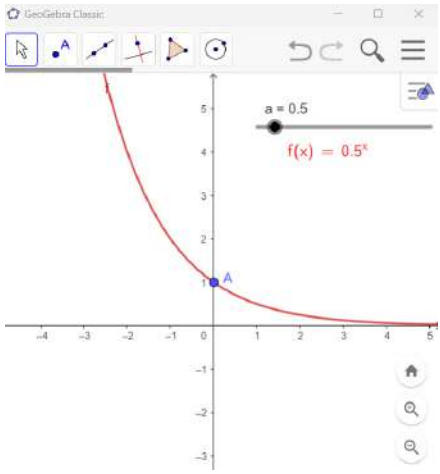
Слика 2. Чекори на конструкција на Аплет – Квадратна функција

График на експоненцијална и логаритамска функција. Од содржините од трета година ќе се задржиме на модуларна единица 1: Експоненцијална функција. Експоненцијална равенка и модуларна единица 2: Логаритамска функција. Логаритамска равенка, [3].

На сличен начин како погоре објаснетите аплети се конструирани и аплетите за графиците на експоненцијална и логаритамска функција и визуелно се преставени својствата на функциите.

Аплети за логаритамска и експоненцијална функција





Цртеж 4. Логаритамска функција (link). **Цртеж 5.** Експоненцијална функција (link).

При дефинирањето на експоненцијална и логаритамска функција и дискусија на нивните својствата, наставникот користи динамички софтвер при што се дискутираат монотоноста на функциите, пресеците со оските, областа на дефинираност и множеството вредности на различни експоненцијални и логаритамски функции.

За графикот на тригонометриските функции со модуларно дизајнираната програма не се планирани часови за одредување на монотоност, интервали на растење и опаѓање, менување на тригонометриските функции, парност, период на тригонометриски функции, како и последователно цртање на тригонометриските функции: $y=a\sin(bx+c)+d$; $y=a\cos(bx+c)+d$ и $y=a\,tg(bx+c)+d$. Графициите на овие функции би можело да се презентираат само со помош на математичката програма Geogebra, за кои се изработени и аплети и поставени на веб.

3. СПОРЕДБА НА СОДРЖИНАТА НА НАСТАВНИТЕ ПРОГРАМИ ПО МАТЕМАТИКА ПРЕД 2019 И ПО ПРОМЕНИТЕ ВО 2019 ГОДИНА

Во продолжение е споредбата на наставните содржини по математика со последните промени во средното стручно образование, кога фондот на часови остана непроменет (2 часа неделно), но се зголеми бројот и обемот на содржините кои се изучуваат.

Разлика во наставни содржини и број на часови	Наставни планови – реформирани НП-Р (задолжителни 2 писмени работи)	Наставни планови - модуларно дизајнирана НП-М (задолжителни 4 писмени работи)
НП-Р - 25 часа, со НП-М - 24 часови. Додадени се логаритамскомски и експоненцијални равенки	Експоненцијална функција и логаритамска функција, 25 часа	Експоненцијална функција. Експоненцијална равенка. 10 часа. Логаритамска функција. Логаритамска равенка. 14 часа.
НП-Р - 22 часа, со НП-М - 18 часови. Додадени се адициони теореми и тригонометриски равенки	Тригонометриски функции од произволен агол, 22 часа.	Тригонометриски функции од произволен агол, 18 часа. (нема монотоност, интервали на растење и опаѓање, менување на т.ф. парност, период, скицирање на некои т.ф.)
НП-Р - 25 часа, со НП-М - 18 часови. Додадено е кружница	Точка во рамнина, 10 часа. Права во рамнина, 15 часа.	Аналитичка геометрија во рамнина, 18 часа
Додадена е една модуларна единица		Комбинаторика и веројатност. 12 часа

Табела 1. Споредба на наставните содржини.

Со последните промени во образованието, во споменатите наставни содржини е зголемен бројот на поими кои се изучуваат, а фондот на часови или останал ист или се намалил. За полесно совладување на сите наставни содржини кои се предвидени со модуларната програма, задолжително наставниците ќе треба да користат технички помагала и аплети изработени во некои од слободните софтвери, но и учениците да користат слободни софтвери за визулизација на решенијата.

4. УСПЕХ НА УЧЕНИЦИТЕ ПО МАТЕМАТИКА

Во прилог е успехот по математика на учениците од ССОУ Коле Неделковски од Велес, постигнат во четирите тримесечија во учебната година 2022/2023.

	Прво тримесечие	Полугодие	Трето тримесечие	Крај година
Паралелка 3-6	3,56	3,69	2,86	4,06
Паралелка 3-7	4,12	4,09	4,00	4,60
Паралелка 3-8	2,48	2,85	2,48	3,30

Табела 2. Успех на учениците од трета година.

	Прво тримесечие	Полугодие	Трето тримесечие	Крај година
Паралелка 1-1	1,63	2,06	2,00	2,52
Паралелка 1-2	1,76	2,15	1,63	2,42

Табела 3. Успех на учениците од прва година.

Доколку се направи анализа на постигнатиот успех на учениците по тримесечја може да се примети дека успехот на учениците е намален во периодот кога има наставни содржини со графици на функции, нивно испитување и скицирање.

Затоа, потребно е како наставници дополнително да се обучиме во примената на динамичкиот софтвер во наставата и истиот да го користиме за цртање графици на функции. Со ова постигнатите резултати на учениците би биле подобри. Исто така, ќе треба да се охрабрат учениците активно да се вклучат во наставата и да користат слободни софтвери.

5. ЗАКЛУЧОК

Интересот на учениците е поголем доколку се работи со математичката програма Geogebra, учениците имаат доволно познавања и можат да ги исполнат зададените задолженија како на час така и за домашна работа.

За успешно совладување на наставните содржини од страна на учениците, препорака и потреба е во иднина да се избегне класичниот начин на предавање, користење на табла, линијар и креда, за исцртување на график на функција и презентирање на својствата на функцијата, при што малку опаѓа интересот на учениците. Потребно е да се користат и динамички софтвери за цртање на график на функција и аплети за визуелизација, како од страна на наставниците, така и од страна на учениците. За домашни работи, треба да се задаваaат и задолженија каде учениците ќе користат слободни софтвери за реализација на истите.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Целакоски, В. Бакева, Б. Миладиновиќ, Ј. Стефановски, *Математика за прва година средно стручно образование за сите струки*, МОН на РМ, 2010.

[2] Н. Целакоски, В. Бакева, Б. Миладиновиќ, *Математика за втора година средно стручно образование за сите струки*, МОН на РМ, 2010.

[3] Н. Целакоски, В. Бакева, Б. Миладиновиќ, Ј. Стефановски, *Математика за трета година средно стручно образование за сите струки*, МОН на РМ, 2010.

[4] D. Jovevski, TA Pachemska, V Popovska, Z Trifunov, *Learning mathematics using digital tools-digitalization of materials for studying*, South East European Journal of Sustainable Development, 7 (2023), pp 53-60.

[5] Z. Trifunov, T. Jusufi, E. Karamazova, T. Atanasova-Pacemska, *Importance of Visualization in Math Problems at the Universities*, South East European Journal of Sustainable Development, 3 (2019) pp. 17-23.

[6] D. Karuovi, I. Tasic, V. Hains, D. Glusac, Z. Namestovski, C. Szabo, M. Kocaleva, D. Milanov, *Students' habits and competencies for creating virtual learning environments,* Computer Applications in Engineering Education, (2020), pp. 1-19.

[7] Z. Trifunov, L. Zenku, T. Jusufi-Zenku, *Application of Newton's Backward Interpolation Using Wolfram Mathematica*, International Journal of Mathematics Trends and Technology, Volume 67 Issue 2, (2021), pp. 53-56.

[8] Z. Trifunov, *Definite integral for calculating volume of revolution that is generated by revolving the region about the x (y) - axis and their visualization.* Journal of International Scientific Publications, 18. (2020), pp. 178-186.

[9] C. Hoyles, *Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology,* Research in Mathematics Education, 20:3, (2018), pp. 209-228.

[10] L. Stojanovska, Z. Trifunov, *Constructing and Exploring Triangles with GeoGebra,* Anale Seria Informatica, Vol VIII, Fa c.2, România, (2010), pp. 45-54.

[11] J. Chen, M. Wang, P.A. Kirschner, C.C. Tsai, *The role of collaboration, computer use, learning environments, and supporting strategies in CSCL: A meta-analysis,* Review of Educational Research, 88 (6) (2018), pp. 799-843.

[12] P. Drijvers, M. Doorman, P. Kirschner, B. Hoogveld, P. Boon, *The effect of online tasks for algebra on student achievement in grade 8 Technology,* Knowledge and Learning, 19 (1–2) (2014), pp. 1-18.

[13] J. Golding, E. Barrow, G. Grima, *Power Maths: implementation, response and learning in a pandemic,* Autumn. London: Pearson UK, 2021.

[14] D. Hillmayra, L. Ziernwald, F. Reinhold, S. Hofer, K. Reiss, *The potential of digital tools to enhance mathematics and science learning in secondary schools: A context-specific metaanalysis,* Computers & Education, Volume 153, August 2020.

[15] W. Adesope, JC Nesbit, Q. Liu, *Intelligent tutoring systems and learning outcomes: A meta-analysis,* Journal of Educational Psychology, 106 (4) (2014), pp. 901- 918.

[16] Z. Trifunov, E. Karamazova, T. Atanasova, *Introduction of discrete and continuous random variable*“. LAP LAMBERT Academic Publishing, (2015)

[17] D. Biswajit, Ch. Dhritikesh, *Newton's backward interpolation: Representation of numerical data by a polynomial curve*, International Journal of Applied Research, (2016), pp 513-517.

[18] *Геогебра*, *Направени задачи,* https://www.geogebra.org/u/zorantrifunov

1 ССОУ „Коле Неделковски“,
Ул. Андон Шурков бр. 4а, (1400) Велес, Р. Македонија
e-mail: mira.taskova@yahoo.com

2 Универзитет „Мајка Тереза“,
Ул. Мирче Ацев бр. 4а, (1000) Скопје, Р. Македонија
e-mail: zoran.trifunov@unt.edu.mk

„ДАЛИ СТЕ ПОДГОТВЕНИ?” - ГЕНЕРАЦИЈАТА Z Е ТУКА

Викторија Илиеска [1]

Анкица Спасова [2]

Методија Јанчески [3]

Живееме во ера на брз развој на современите технологии. Овие трансформации имаат влијание врз сите општествени сфери во денешниот свет. Различните лични верувања, социјалната средина и генерациската припадност се рефлектираат во однесувањето, комуникацијата, ставовите и мотивациските цели. Економските услови, животните вредности, културниот контекст на околината, технолошките, образовните и социјалните можности во колективниот и индивидуалниот свет, можат да доведат до различни потреби и стратегии на однесување дури и во рамките на самата „генерација“.

Прво ќе дадеме неколку главни карактеристики за „XYZ - генерации“ според модерниот, класичен концепт предложен од американските автори Вилијам Штраус и Нов [2]. Во предвид се земени: сегашни/идни наставници родени во генерацијата X/Y (X/41-55 години, Y/26-40 години) и ученици/студенти родени во Z/Alpha генерација (Z/5-25 години, Алфа-родени по 2015 година), со нивната специфичност за балканските земји, конкретно во Македонија. Откако ќе „погледнеме“ во перспективата на потрошувачите и психолошките опсервации за генерацијата Z, ќе предложиме конкретни стратегии и работни техники за тоа како наставниците треба да работат со нив за да ги изградат новите граѓани на светот на 21 век.

Ќе завршиме со можни текови и аспирации на нашиот пристап, а ќе разгледаме и како овие студенти може да развијат одредени вештини за подготовка за високо образование, особено за математика. Студентите од генерацијата Z сè повеќе се стремат кон независност, вреднуваат идеи, иновации и претприемништво - тие го трансформираат образовниот систем во многу аспекти што ќе бара од едукаторите да се прилагодат и справат со овие промени. И ние сме тука да им помогнеме!

1. ГЛАВНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА СВЕТСКО НИВО

- Генерација X (родени меѓу 1965-1980 година)

Во време на социјални идеали и духовни потраги), карактеристични по: скептицизам и цинизам, социјална и политичка рамнодушност, недостаток на иницијатива, висока образованост, склоност кон индивидуализам, нерелигиозност и низок авторитет кон институциите) [1].

Работна етика и извршување задачи: зголемена интелектуална способност, богато работно искуство, тактичност, друштвени, амбициозни, високо ефикасни, продуктивни и упорни. Кариерата, образованието и материјалното богатство им играат важна улога. Не бараат нови начини, туку користат веќе докажани. Системот на вредности им овозможува високи резултати во сите области на животот. Терминот – работохолизам, потекнува токму од нив. Неисполнетиот проект, работниот неуспех или неиспочитуваниот рок ги сфаќаат многу сериозно. Преголемиот обем на работа и одговорност им предизвикува стресни ситуации.

- Генерација Y (милениумска, "Петар Пан", родени меѓу 1980-1995 година).

Доминантна карактеристика им е мобилната комуникација во нивното растење со големо влијание врз нивните вредности и ставови. Главни карактеристики: навика за постојана комуникација, важна им е соработката, не се подготвени да го поминат целиот живот на едно место. Побрзи, попродуктивни и пообразовани од своите претходници, посоредочени на кариерата, отколку на фамилијарниот живот. Ги поврзува „концепт на вечна младост" и нарцизам, без брзање да ги превземат одговорностите за зрелост. Пораснати во услови на "стаклено ѕвоно", навикнати да им се исполнети сите желби, идеалистички, па дури и непрактични. Себеси се сметаат за оптимисти, со преференции кон дигитални уреди, промени и ризици. Се грижат за надворешниот свет и интеграцијата во глобалниот простор [1].

Работна етика и извршување задачи: се стремат кон различни професии, подготвени се за обука и преквалификација, претпочитаат флексибилно работно време, често и сами ги менуваат условите и правилата ако тоа ја зголемува ефикасноста (сакаат да учествуваат во одлуките, а особено им е важно е да го споделат тоа што го искусуваат). Често се жалат на недостаток на повратни информации. Преферираат „хоризонтална" визија за социјални контакти. Веруваат дека за ефикасен тим, нема потреба од лидер (ниска лојалност кон работодавци и брендови).

- Генерација Z (GenTech, Post-Millennials, iGeneration: Дигитални домородци, родени од 1995 до 2010 година, во време на економска криза и рецесија, постмодернизам, глобализација и светска економска криза).

Растат во ера на Интернет и не го паметат времето без негов директен пристап. Под стрес, глобални, вниматлени, со флуиден идентитет, бунтовници, најмалку религиозни, ја прифаќаат различноста.

Главни карактеристики: Лесно се прилагодуваат на промени, ценат брза реакција и мобилност, им веруваат на своите пријатели повеќе отколку на авторитетите, прва генерација за која подеднакво се важни реалниот живот и дигиталниот свет. Веруваат дека можат да го направат светот подобро место за живеење. Од нивната емоционална интелегенција која го потенцира самоуправувањето, може да се потенцира способноста да ги контролираат избувнувањата и спокојно да разговараат за несогласувањата. Според ова се очекува дека ќе тежнеат кон избалансиран начин на живот, ќе работат за општото добро и креативното уживање како резултат на личните чувства, ќе се спротивставуваат на лошите навики и ќе настојуваат да ги решат еколошките и социјалните проблеми, верувајќи во светскиот мир [2].

- Alpha-генерација (родени по 2010-2011 година).

Се верува дека ќе бидат најприлагодливите досега и никогаш нема да бидат без нивниот паметен телефон. Технологијата за нив не е алатка, туку е интегрирана како дел од нивните животи. Се предвидува да бидат поизбалансирани, позитивни и помалку агресивни [3].

2. НЕКОЛКУ КАРАКТЕРИСТИКИ ЗА XYZ НА БАЛКАНОТ

X - претставниците се опишуваат себеси како забавни луѓе кои сакаат предизвици, но не и одговорност. Покрај успешната кариера, важно им е да го поминат корисно и слободното време. Како вредности ги сметаат: отпор кон власитите, рамнотежа меѓу работата и животот, а од технологијата издвојуваат: ТВ, Walkman, компјутер [3], [4].

Y- претставниците се оптимисти дека промените се можни, но тешко се спроведуваат. Повеќе го вреднуваат искуството и интересниот начин на живот што можат да ги прикажат на социјалните медиуми, наспроти имотот и статусните симболи на X. Дел од младоста опстојувале со аналогната технологија. Како вредност го напоменуваат искуството, а од технологија и брендови ги издвојуваат: мобилната телефонија, интернетот, MP3, Torrent, Apple, Gogle, Facebook [3], [4].

Z - претставниците избегнуваат ризици. Посветуваат големо внимание на студиiите и кариерата. Целосно го имаат интегрирано социјалниот поредок, нормите и проблемите. Најголема вредност им е индивидуалноста, а од технологија и брендови користат: паметни телефони, Cloud-услуги, Streaming, Chatthing Room, Snapchat, Instagram [3], [4].

Специфично за Македонија: со индивидуалците X се случи прифаќањето на домашните компјутери, интернетот и видеоигрите. Y имаат персонални компјутери, поседуваат мобилен телефон, користат Instant Messages, блогираат, поголем дел од информациите ги добиваат од интернет наспроти ТВ, симнуваат филмови и музика од интернет, повеќе купуваат преку интернет, а карактеристична е големата присутност на социјалните медиуми како Facebook и Twitter. Генерацијата Y има огромна слобода во поглед на однесување, информираност и технологија. Оваа генерација сака да ги искористи предностите кои модерното општество и технологијата им ги овозможуваат (сепак политичко-економските пречки се неизоставен дел на овие желби) [5].

3. ПОТРОШУВАЧКА ПРЕСПЕКТИВА

X „го конзумирале" статусот, Y искуствата, Z се чувствува пријатно при повеќе начини на изразување на себеси. Потрагата по автентичност генерира поголема слобода на изразување и отвореност за разбирање на различни култури. За Z најважна е: потрага по вистината [6].

Од истражувањата на McKinsey, поврзани со сознанија за ставовите на Z, за влијанието на пошироката популација и потрошувачката во Бразил (2018 година, генерацијата Z сочинувала 20 % од населението, со примерок земен од Ресифе, Рио де Женеиро и Сао Паоло) и во Азиско-пацифичкиот регион (2019 година, до 2025 година оваа генерација ќе сочинува четвртина од населението, со примерок од 16000 потрошувачи во Австралија, Кина, Индонезија, Јапонија, Јужна Кореја и Тајланд), добиени се следните заклучоци: во Бразил претставниците го ценат индивидуалниот израз, родовата флуидност, се борат за човековите права, одлучуваат на аналитички и прагматичен начин, веруваат во ефикасноста на дијалогот при решавање на конфликти. Додека во Азиско – Пацифичкиот регион, доминира навиката да добијат се и веднаш, екстремното потпирање на социјалните медиуми и големото влијание на видео содржини.

Вкрстените корелациски заклучоци од двете истражувања се дека : Z е хиперкогнитивна генерација која се потпира на информации од многу извори, интегрира виртуелни и „offline“ искуства. Се потпира на препораки од пријателите, доминантно им е експериментирањето и нелојалноста кон брендови (освен т.н. “вредносни истражувачи”, најголем дел од Јапонците, дури 80%, претпочитаат бренд наспроти нов производ), технологија ја користат да проверат дали компаниите етички ги претставуваат производите, не споделуваат лични податоци „online“, чекаат попусти, но спремни се и да платат повеќе доколку производот ги персонализира, штедливи се, преферираат стабилна работа наспроти висока плата, еколошки свесни, при што 60% -80% од нив сметаат дека компаниите треба да бидат одговорни за своите постапки [6], [7].

Според истражувањето од Институтот за развој на пазари INSEAD и фондацијата HEAD (2017 година) откриени се овие аспирации и вредностите кај X, Y и Z генерациите: кај Y и Z процентот кај жените (61%) скоро се изедначил со 63% кај машките испитаници во однос на амбициите за лидерство, X и Y лидерството и менторството го сметаат за предизвик, додека Z сметаат дека високото ниво на одговорност е најатрактивната работа за лидерството. Z и Y се залагаат да работат за меѓународни организации и се ентузијасти во врска со потенцијалот на виртуелната реалност (при проекти и аудио/видео конференции); сите работници се согласуваат дека дигиталните способности на нивните организации не се задоволувачки и се за флексибилни работни аранжмани. При избор на „online“ -обуките, 69% од Z избрале личен контакт, наспроти 13% „online“ [8].

4. ПСИХОЛ0ШКИ СОГЛЕДУВАЊА ЗА ГЕНЕРАЦИЈАТА Z

Емоционална интелегенција: ги разбираат гаџетите подобро од човечките емоции, самосвесни се, секогаш знаат да проценат за што сте способни и да побараат помош ако им треба [9], не прават нешто ако и самите не сакаат. Не се многу дружељубиви, насочени се кон себе (ги нарекуваат „генерација MeMeMe“, потенцирајќи го нивниот фокус на сопствените мисли и чувства, со ниско ниво на емпатичност и социјални вештини).

Користење на Интернет: начин да добијат пристап до информации, алатка за стекнување социјални вештини кои потоа ги применуваат во реалноста, со концентрација на своите интереси, социјалните мрежи ги користат за да ја зајакнат и развиваат врската со пријателите (алатка за градење идентитет).

Поседуваат одредена скептичност кон технологијата: иако 62% од претставниците преферираат да се изразат дигитално отколку лично, со висока присутност на социјалните мрежи: YouTube (79%), FB (78%), Instagram (69%), Snapchat (68%) и Twitter (49%) и голем интерес за визуелниот момент (видеа, слики, пораки, брзина на кореспонденција), сепак веруваат дека социјалните медиуми, технологијата и вознемирувањето на интернет ќе имаат големо влијание врз нив. Се сметаат за ранливи и некомпетентни, зошто имаат "олеснет" живот, од технологијата која не ги учи на логичност при размислувањето.

Голем дел од родителите се согласуваат дека промената во образовната парадигма е значајна, но и дека технологијата влијание на комуникација и образованието, а резултатите од промените се различни. Иако паметните телефони нудат потенцијал за индивидуално поучување, останува загриженоста за зависноста од технологија и недостаток на самоконтрола што може да го наруши развојот на детето.

5. СТРАТЕГИИ И ТЕХНИКИ ЗА ЕДУКАТОРИТЕ

Кај овие мултитаскинг реалисти, насочени кон иднината, кои разговараат преку слики, активно работат на својот личен успех и се стремат кон колективна свесност, а печатениот збор прв пат го имаат видено во електронска форма (заменет со симболи или универзални икони, а книгите заменети со Youtube-видеа), образованието се префрла од структурирани училници, учебници и извештаи до таблети, графици и видео-презентации. Тие се пост-линеарни: живеат во свет со хипер-врски, претставуваат технолошки најписмена и социјално најмоќна генерација, интуитивни се и самоуверени корисници на дигиталната технологија [10]. Се изразуваат повеќе писмено (пост-писмени), учат дисконтинуирано и нелинеарно (пост-структуирани), бараат возбудлива и креативна содржина, ја ценат визуелната и интерактивната комуникација со брз и лесен пристап до информации (пост-логични).

И покрај тоа што се индивидуалисти, претпочитаат интерактивна настава и соработка (истражувањето спроведено од компанијата Барнс и Нобл, покажа дека денешните ученици одбиваат да бидат пасивни во наставата, 51% од одговорите се дека најдобро учат низ практични примери и уживаат во дискусиите на часот преку интерактивни разговори, наспроти 12-те % чии одговори се дека најдобро учат преку слушање).

Сепак, едно од клучните прашања овде е, кои недостатоци се јавуваат кај овие ученици во процесот на образование. Шато и Ервин (Shatto and Erwin) ја забележале неспособноста на оваа генерација да ја анализира валидноста на информациите и нивното критичко користење на истите. Втор сериозен проблем е краткотрајното внимание. Бидејќи се склони да се изразуваат креативно, ако не согледаат релевантност на материјалот за учење, почнуваат да губат интерес и доживуваат пад на концентрација. Самата изложеност на технологија, не мора да значи дека тие автоматски правилно ќе ја искористат во процесот на учење. Др. Hallowell & Ratery (2011, стр.28), ова го нарекуваат краток распон на внимание како „нарушување на стекнатиот недостиг на внимание", бидејќи нивните мозоци се предодредени да разбираат сложени визуелни слики. Затоа, визуелниот пристап кон наставата кој вклучува графици, анимации или видео содржини е ефективен. Додека Хикс (2011) истакнува дека и покрај тоа што може да изгледаат како невнимателни и отпуштени, тие „впиваат" исто толку информации како и оние кои изгледаат целосно ангажирани.

Вилијамс (2015) тврди дека овие ученици се многу свесни за општествените прашања, внимаваат на иднината, моментално примаат информации и исто толку брзо го губат интересот. Иако на некој начин, се како претходните генерации (потпирајќи се на електронските уреди слабеат нивните социјални вештини), сепак се свесни за трендовите поради раното воведување во напредната технологија и адаптацијата на истата. Постојано се ангажирани во споделување информации со користење на мноштво отворени платформи. Мобилните уреди се нивна предност заедно со медиумите со кои можат да комуницираат (Гупта, Гаган, 2014).

Универзитетските професори треба да размислат колку е важно да се воспостави образовна средина со јасна цел да се олесни стекнувањето знаења, вештини, ставови и вредности. Таа средина треба да поттикне педагошки компоненти кои опфаќаат информации, перформанси, ситуации и практични искуства заедно со активности за соработка со други ученици, што овозможува размена на знаења, чиј резултат е најголемо индивидуално учење (тие чувствуваат дека она што го учат е релевантно за нивната иднина). Активното ангажирање со информациите што ги добиваат им дава сеопфатен пристап кон учењето и критичкото размислување. Учењето се повеќе се одвива надвор од училницата и наставниците треба да се прилагодат на физичките и виртуелните образовни средини за да бидат во тек со тековниот напредок во образованието (Jaleniauskiene и Juceviciene, 2015).

Со сите наведени преференции, поучувачите/професорите/ едукаторите треба да се трудат соодветно да ја прилагодат наставата, со развивање на критичкото размислување за да го максимизираат ангажманот на овие ученици, односно да бидат: реалисти (комуникацијата со учениците да им е веродостојна и транспарентна, да разберат дека тие не очекуваат да знаеме за нивниот животен стил , ниту да ја прифатиме нивната култура, туку едноставно бараат разбирање и почитување); релевантни (да ги прилагодат нивните стилови на предавање за визуелна едуцирана генерација); одговорни (наместо фокус да е наставниот план, да се пренасочат на ученичките стилови на учење и потреби, со индивидуални планови за учење); релациони (да создадат средина во која учениците ќе бидат со целосен ангажман и вклученост со главата-знаење, рацете-апликација/примена и срцето-инспирација). Сето тоа ќе ја зголеми веројатноста за учење и зголемување на можностите да се обликуваат новите модерни жители на иднината [10].

Самите едукатори и невронаучници ги нарекуваат генерации за декодирање. На пример, препорака за лидери на вработени и наставници - менаџери во “училницата”, од невронаучникот Betty Chung, е наставникот да има активна соработка со нив, за да ги процени и прилагоди начините за стилот на комуникација и да ја разбере нивната перспектива. Самата потврдува дека согледувајќи ги разликите што ги нарушуваат интеракциите, сепак постојат и сличности кои можат да се искористат за да се поттикне креативноста и солидарноста на тимската работа. Самата така успеала да ги согледа нивните вредности, аспирации и ставови кон нивните кариери, при што претпрочитала комуникациските медиуми со цел како лидер, да ги “признае” нивните основни вредности и да ги негува најхармоничните работни односи при работа на заедничка цел [11].

Шато и Ервин ги предлагаат овие практични совети: Користете мобилна технологија кога е можно, користете задачи што може да се завршат на таблети/телефони, поттикнете ја соработката користејќи технологија, зајакнете ги концептите со YouTube- видеа и вклучете практични искуства во училницата.

Во продолжение ќе укажеме на важноста на мултимедијалните апликации во образованието од математичката област, поконкретно за оваа генерација.

6. АНИМАЦИИ, СИМУЛАЦИИ И КОМПЈУТЕРСКИ ИГРИ

Анимациите се со способност реално и визуелно да опишат делумно или целосно некој настан или процес. При нивното прикажување, ученикот може да ја активира/стопира, но не може да влијае на истата. За разлика од нив, симулациите (динамички и визуелни презентации на различни појави/процеси) нудат интеракција. Учениците учествуваат во репродукција на вистински/замислен настан, со самостоен избор на вредностите на влезните податоци (околности на некое динамичко сценарио) со што влијаат на продуцирањето на соодветен излез (исход). Нивна своевидна надградба се компјутерските игри (упростени и динамички модели на реален/хипотетички систем, со играчи кои меѓусебно се натпреваруваат/соработуваат, почитувајќи ги нејзините правила).

Бројни научни студии покажале дека користењето на мултимедијални апликации во сите образовни степени, може значајно да го олесни разбирањето и усвојувањето на наставниот материјал, да го подигне нивото на усвоените знаења и вештини кај учениците, а учењето да им го направат поинтересно и попривлечно. Тие се моќна алатка која може да го унапреди квалитетот на образовниот процес (во согласност со наставните програми, прилагодени на возраста на учениците) со способност и да ги ангажираат, но и да ги наградуваат. Нудат поинаков поглед на наставниот материјал, поттикнуваат примена на активни методи на учење и го зголемуваат нивото на мотивација, интеракција и комуникација меѓу учениците.

Земајќи ги в предвид карактеристиките на Генерација Z и предностите на мултимедиите, препорачуваме нејзина задолжителна примена во наставата, но и изучување на истата во рамките на континуираното образование и професионалниот развој на самите наставници. На крај ќе укажеме на два позитивни примери за примена на мултимедија во македонското образование, кои иако беа функционални, веќе не се во употреба.

Веб-порталот „Агрегатор на видео-содржини“ (се наоѓаше на адресата www.eduvideos.mon.gov.mk) започнат од Министерството за образование и наука (МОН) во 2011 година, со значајно унапредување во 2015 година, имаше околу 1000 едукативни видео-содржини кои им беа на располагање на учениците и наставниците од основните и средните училишта, наменети за образовни цели, стручно оспособување, како и за лица со посебни потреби.

Во 2009 година, компанијата Интел на Министерството за информатичко општество и администрација (МИОА) му донираше 513 е-содржини (кои МИОА ги искористи како основа за симулации, мултимедијални лекции, белешки за учење и дополнителни образовни алатки, кои ги постави на порталот skoool.mk). Содржеа едукативни содржини за основно училиште математика и запознавање на околината во прв период; математика и природни науки во втор период; математика, физика, биологија и хемија во трет период и математика и за физика, биологија и хемија во средно образование. Целта беше да се поттикне интересот, љубопитноста и проникливоста кај учениците да ги разберат и истражуваат клучните концепти од математичката област (теориските информации беа дополнети со аудио-визуелни презентации). Порталот преку тестови за самопроверување и самовреднување (за предметите од основното училиште) нудеше можност за утврдување на стекнатите знаења и нивно систематизирање, како и проверка на знаењата.

Потврда за квалитетот на е-содржините е самиот факт дека проектот е-school е имплементиран во образовните системи во 25 држави во светот, вклучително во повеќе развиени држави, меѓу кои: Велика Британија, Турција, САД и Русија.

7. ЗАКЛУЧОК

Припадник на Z генерацијата накратко сака: заедничко учење, делење на задачата со врсниците, мултитаскинг, "Направи сам", "Комфорна зона", релевантност, интерактивност, ангажирање, иновација, предизвик и креативност. Наспроти нив, наставниците треба да користат видеа, видео – игри, Е-учење, Nano-учење, хумор, повратна информација, лично усовршување и дизајнерско мислење [12].

Дигиталноста на генерацијата Z, нè натера да станеме поквалификувани во користење на различни типови уреди, програми и апликации што можат да бидат интегрирани на нашите часови: користење на мобилни телефони, пристапат до е- учебници/прирачници, користење на блогови (каде често учениците дискутираат за изучената или содржината што следи). Односно, со користење на нивните социјални алатки за содржина која е од нивно значење сме го искористиле нивниот начин на прибирање и задржување на информации релевантни за нивниот живот, го поттикнуваме нивниот ентузијазам додека го споделуваат својот финален производ со своите соученици преку тимски проекти (поттикнувајќи ја креативноста), преку користење на техниката-“една минута”, кратки квизови и онлајн прашања [13], може да влијаеме на интересот да го задржиме нивното внимание и преку користење на игри (тие се виртуелни гејмери и сакаат предизвици), се со цел правилно да ги насочиме новите граѓани на овој модерен свет.

ЛИТЕРАТУРА

[1] KASASA | Boomers *Gen X, Gen Y, and Gen Z Explained,* https://www.kasasa.com/blog/boomers-gen-x-gen-y-gen-z-and-gen-a-explained

[2] *WikiEnx.com | Генерација Z, и неговото место во историјата. Теоријата на генерации.Генерации X, Y и Z,* https://ma.wikienx.com/formira%d1%9ae/naukata/79126-generaci%d1%98a-z-i-negovoto-mesto-voistori%d1%98ata.html

[3] *srednja.hr | Što dolazi nakon X, Y i Z: Kojoj generacijskoj grupi pripadaju današnji prvašići?,* https://www.srednja.hr/novosti/sto-dolazi-nakon-x-y-z-kojoj-generacijskoj-grupi-pripadaju-danasnji-prvasici/

[4] *LIKA CLUB | Generacija X, Y, Z ili Alpha klinci: Znate li razlike između generacija i kojoj pripadate ?,* https://likaclub.eu/generacija-x-y-z-ili-alpha-klinci-znate-li-razlike-izmedu-generacija-i-kojoj-pripadate/

[5] Драган Шутевски | *Генерација X и генерација Y,* http://www.pretpriemac.com/generacija-x-i-generacija-y/

[6] *McKinsey & Company | True Gen’: Generation Z and its implications for companies,* https://www.mckinsey.com/industries/consumer-packaged-goods/our-insights/true-gen-generation-z-and-its-implications-for-companies#

[7] *McKinsey & Company | What makes Asia−Pacific’s Generation Z different,* https://www.mckinsey.com/business-functions/marketing-and-sales/our-insights/what-makes-asia-pacifics-generation-z-different

[8] *Harvard Business Review | A Survey of 19 Countries Shows How Generations X, Y, and Z Are — and Aren’t — Different, 2017*, https://hbr.org/2017/08/a-survey-of-19-countries-shows-how-generations-x-y-and-z-are-and-arent-different

[9] *fakulteti.mk | Емоционална интелегенција-социјални вештини кои не ги учите на училиште,* https://www.fakulteti.mk/news/16-08-05/emocionalna_inteligencija_-_socijalnite_veshtini_koi_ne_gi_uchite_na_uchilishte

[10] *mccrindle.com* | Generation *Z at school,* https://mccrindle.com.au/insights/blogarchive/generation-z-at-school/

[11] *LABLOGATORY | Decoding Generations,* https://labmedicineblog.com/2017/10/20/decoding-generations/

[12] *FACULTY FOCUS | Generation Z: Re-thinking Teaching and Learning Strategies,2020,* https://www.facultyfocus.com/articles/teaching-and-learning/generation-z-re-thinking-teaching-and-learning-strategies/

[13] C. Seemiller , M. Grace, *Generation Z Goes to College,* Jossey-Bass, 2016

1 ООУ„Коле Неделковски",
ул. Антоније Грубишиќ, бр.8, 1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: vikiiki@gmail.com

2 ООУ „Тихомир Милошевски",
ул. 1, бр. 62, Ѓорче Петров,1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: a_kaladziska@yahoo.com

3 Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј",
Ул. Руѓер Бошковиќ, бр. 16, 1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: metodija.jancheski@finki.ukim.mk

ОТКЛУЧУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКАТА СПОСОБНОСТ: ИСТРАЖУВАЊЕ НА ДИГИТАЛНИТЕ ПЛАТФОРМИ КАКО КАТАЛИЗАТОРИ ЗА НАДМИНУВАЊЕ НА ПРЕЧКИТЕ ВО УЧЕЊЕТО

Добри Јовевски[1]

Татјана Атанасова - Пачемска[2]

Александра Пешевска Митановска[3]

1. ВОВЕД

Математичките вештини се критични не само за напредувањето во учењето и образованието воопшто, туку и за функционирањето во секојдневни ситуации. Недостатокот на математички вештини може да има големо влијание на академскиот успех, изборот на професија и емоционалната благосостојба [1]. Децата со развојна дискалкулија и дислексија покажуваат различни развојни способности [2] со дефицити во нумеричката обработка, транскодирање, броење, користење на основни факти, аритметички вештини и решавање текстуални задачи [2], [3]. Преваленцата на дискалкулија и дислексија кај децата во основното образование варира од 1,8% до 5% [3], [4].

Студиите покажаа дека различни интервенции можат да ја подобрат нумеричката писменост кај децата со дискалкулија и дислексија [4]. Landerl [5] во својата мета-анализа во врска со ефикасноста на различни пристапи за третман на деца со математички пречки, открива умерен ефект (Hedges' g = 0,50), што е слично на други истражувања [5], [6].

Врз основа на емпириски докази се предлагаат третмани на овие деца, со различни карактеристики за ефикасност. Во последно време, се развиваат програми за учење со примена на компјутерска технологија. Овие програми не ги заменуваат традиционалните методи, туку го поддржуваат развојот и автоматизацијата на когнитивните аспекти во нумеричкиот домен [3]. За децата со дискалкулија и дислексија, учењето со примена на компјутерската технологија нуди значителни предности [7]. Интелигентните системи за туторство (ITS) креираат профил на ученикот и индивидуално адаптираат задачи, што го подобрува учењето [8].

Една од таквите алатки е Calcularis 2.0, која се заснова на теоријата за невро-когнитивниот развој на нумеричкото спознание. Таа има за цел да ги подобри нумеричките вештини и да ги тренира аритметичките операции кај децата со дискалкулија и дислексија, истовремено зголемувајќи ги когнитивните способности [9].

2. ТЕОРЕТСКА РАМКА И РЕЛЕВАНТНИ ИСТРАЖУВАЊА

Да се осврнеме на разновидната теоретска подлога поврзана со користењето на дигитални платформи и интелигентни системи за туторство во подобрувањето на математичкото образование, со фокус на учениците кои се соочуваат со дислексија и дискалкулија. Првично, ќе се фокусираме на дефинирањето на клучните термини и концепти поврзани со оваа област, пред да ги истражиме теоретските рамки што ги поттикнуваат современите методи за подучување и помош за учениците.

Првата невропсихолошка дефиниција на развојната дискалкулија, според Коск (1974), гласи: тешкотија во математичките перформанси поради оштетување на деловите од мозокот кои се вклучени во математичката обработка, без истовремено оштетување на општата ментална функција. Оваа дефиниција е истата дефиниција што истражувачите во когнитивната невронаука ја користат денеска кога ги бараат причините и карактеристиките на дискалкулијата. Дискалкулијата предизвикува сериозни проблеми во разбирањето на математичките поими, извршувањето на операции и пишувањето на броеви. Децата со ова нарушување се соочуваат со предизвици во перцепцијата, вниманието и усвојувањето на математички знаења, вклучувајќи тешкотии во разбирањето на математичките поими, извршувањето на операции и пишувањето на броеви. Ова нарушување исто така влијае на перцепцијата, вниманието и развојот на математичките способности кај децата. Луѓето со дискалкулија можат да се соочат со тешкотии во аплицирањето на математичките концепти во пракса.

Дислексијата првпат била опишана како „слепило на зборови“ од Адолф Кусмаул (1877). Германскиот невролог ја опишал како „потполно слепило за текст... иако силата на видот, интелектот и способностите за говор се недопрени“. Овие деца, иако биле многу способни во другите области, имале екстремни тешкотии со читањето. Дислексијата е нарушување во учењето кое вклучува тешкотии во читањето поради проблеми со препознавање на говорните звуци и учење на нивната врска со буквите и зборовите (декодирање). Децата со дислексија читаат неточно и бавно, заменуваат графички слични букви, долго пишуваат, тивко читаат текст, ги заменуваат зборовите со слични основи.

Дигиталните платформи се компјутерски системи или апликации кои обезбедуваат учење, обука или интеракција помеѓу корисниците. Во контекстот на образованието, овие платформи претставуваат онлајн ресурси или софтвери што се користат за учење и поддршка на образовни процеси.

Интелигентните системи за туторство (ITS) се програми или алатки кои користат вештачка интелигенција за да креираат персонализирани искуства во учењето. Овие системи го анализираат и следат напредокот на учениците, прилагодувајќи ги учебните материјали според нивните потреби и способности.

Калкуларис е еден од примерите на интелигентни системи за обука во математика, целен софтвер кој обезбедува индивидуализирана поддршка за учениците со математички предизвици, вклучувајќи дискалкулија и дислексија. Овој програм се фокусира на подобрување на нумеричките способности и математичкото разбирање преку интерактивни активности.

2.1. ДЕЦАТА СО ПОТЕШКОТИИ И ДИГИТАЛНИТЕ АЛАТКИ ПО МАТЕМАТИКАТА

Факт е дека концептуалниот развој во училишната математика може да биде поддржан со дигитални алатки, како што нагласува и Hoyles (2018): „односите кои се клучни за математичкото разбирање се поистакнати, поопипливи и манипулативни. Екранот на компјутерот им дава можност на наставниците и учениците да го кажат експлицитно она што е имплицитно и да привлечат внимание на она што често останува незабележано“ [10].

Дополнително, компјутерот претставува атрактивен медиум за учење обезбедувајќи интензивна обука во стимулативна средина [9]. Особено за децата со дискалкулија и дислексија, компјутеризираната едукација обезбедува можност и средина за учење одвоена од конкурентниот притисок на перформансите и споредбите со врсниците. Ова особено е важно, бидејќи постојаното искуство на неуспех може да доведе до математичка анксиозност или негативни ставови кон наставникот, што може да го намали потенцијалот за постигнување и способноста за учење [9].

Се претпоставува дека децата со истовремени пречки во математиката и читањето покажуваат основни дефицити во фонолошката обработка. Затоа, овие деца би можеле да имаат посериозни или различни проблеми при изведување аритметички процедури (на пр., стратегии за броење), како и при враќање на аритметички факти [11].

Одредени студии покажаа дека математичката анксиозност може да има негативен ефект врз долгорочниот професионален успех кај учениците[11], [12].

3. МЕТОДОЛОГИЈА НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

Трудот содржи податоци за процесот на дигитализација во предметот математика, најпрво како потреба, а потоа како предизвик и тренд во новото време, нудејќи брз пристап кон многу информации, нивна обработка, селекција на информациите, како и брза и лесна проверка на стекнатите знаења кај учениците.

3.1. ЦЕЛ НА ПРОУЧУВАЊЕ

Целта на истражувањето е да се анализира колку дигиталните алатки и интелигентни системи за туторство (ITS), за кои се обучени некои од наставниците, помагаат и го олеснуваат квалитетот на учењето и настава по предметот математика, особено кон децата со индикации на дискалкулија и дислексија. Значи, врската на користењето на дигиталните алатки – платформи (користење или не) со квалитетот на наставниот процес по математика со посебен осврт на учениците – децата со индикации на дискалкулија и дислексија (успехот пред и после користењето на дигиталните платформи и математичката анксиозност).

Претпоставуваме дека успехот после користење на дигиталните платформи по предметот математика кај децата со индикации на дискалкулија и дислексија расте и математичката анксиозност се намалува со користење на дигиталните платформи.

3.2. ИСТРАЖУВАЧКИ ТЕХНИКИ, ИНСТРУМЕНТИ, МЕТОДИ И МОСТРА

Во истражувањето се опфатени група на наставници од одделенска настава, предметни наставници предметот математика и ученици од второ - седмо одделение. Истражувањето е направено на репрезентативна бројка од наставници и ученици од неколку основни училишта во Република Северна Македонија. Наставниците беа анкетирани според тоа дали и колку користат дигитални платформи по предметот математика. Од друга страна пак, од вкупно 92 ученика со индикации на дискалкулија и дислексија резултираа 52 ученика.

Бидејќи училиштата (службите) немаа доволни информации (ученички досиеја) за децата кои манифестираат индикации на дискалкулија и дислексија, за потребите на истражувањето се користеа три стандардни инструменти од кои два инструменти за проценка на вербалната и невербалната интелигенција, како и перформансите во читањето, правописот и аритметиката. Посебно се детектираше дискалкулија и дислексија преку краток стандардизиран математички тест за дијагностицирање на дискалкулија и дислексија, и еден за математичка анксиозност (интервју).

1) Основна дијагностика на специфични развојни нарушувања кај деца од основно училиште (BUEGA - Basisdiagnostik Umschriebener Entwicklungsstörungen im Grundschulalter) [13] служеше за проценка на вербалната и невербалната интелигенција, како и перформансите во читањето, правописот и аритметиката, посебно детектирање на дискалкулија и дислексија. Внатрешните коефициенти на конзистентност утврдени за секое училиште се доволни од (α = 0,81 до α = 0,95). Комбинираната оценка за изведбата на читање и правопис е средната вредност на оценките (стандардизирани Т- оценки) постигнати во читање и правопис.

2) Rechenfertigkeiten - und Zahlenverarbeitungs - Diagnostikum за второ до шесто одделение (PZD 2–6) - RZD 2–6 [14] е стандардизиран математички тест за дијагностицирање на дискалкулија и дислексија. Тестот ги проценува основните нумерички капацитети (на пр., препознавање, броење, споредба на број/количина и претставување на број) како и аритметички вештини (собирање, одземање, множење и делење). Тестот овозможува диференцирана проценка на извршувањето на задачата на ученикот (ниво на знаење) и потребното време на ученикот да ги реши задачите (ниво на брзина). Постигањата на двете нивоа (ниво на знаење: α = 0,89 до α = 0,90; ниво на брзина: α = 0,89 до α = 0,92) од доволни до високи.

3) Интервју за математичка анксиозност (MAI) - МАИ [15] служеше за проценка на математичката анксиозност на децата со помош на термометар за анксиозност. Од децата беше побарано да го оценат својот интензитет на математичка анксиозност во четири различни ситуации кои

беа илустрирани со слики. За да го оценат нивниот интензитет, тие добија термометар направен од картон, каде што можеа да го прилагодат својот страв со рачно поместување на црвената колона во термометарот од никаква вознемиреност до многу присутна вознемиреност. Внатрешната конзистентност измерена со помош на Кронбаховата алфа е доволна (α = 0,76).

Значи, индикатори за успешноста на користењето на дигиталните платформи во наставата по математика се успехот на учениците и намалената математичка анксиозност. Според нивните вредности за ПРЕД и ПОТОА во однос на користење на дигиталните платформи, во оваа истражување се донесува заклучок за ова проблематика.

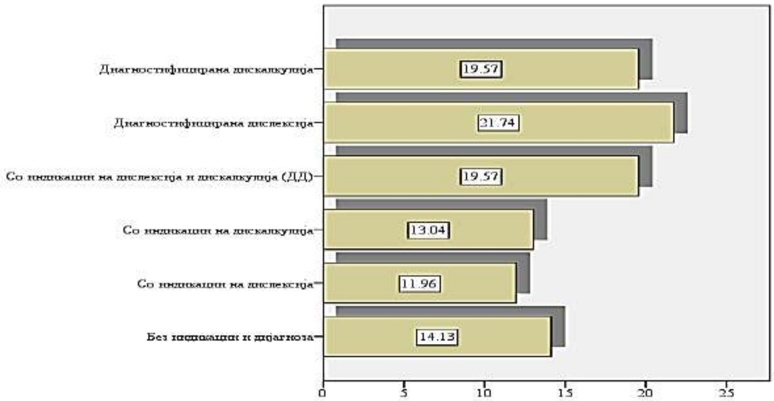
Со првите два инструмента се класифицирани потенцијалните ученици според стандардна методолошка класификација и тоа БЕЗ индикации и дијагноза, СО индикации на дислексија, СО индикации на дискалкулија, СО индикации на дислексија и дискалкулија (ДД), Дијагностифицирана дислексија и Дијагностифицирана дискалкулија.

Податоци за успехот за времето пред користење на дигитални платформи за децата со потешкотии со дислексија и дискалкулија се собрани од архивите на наставниците по математика и од одделенските раководители. Податоците за нивото на математичка анксиозност се добиени во самите анкетирања каде што интервјуто за математичка анксиозност е спроведено на часот по математика кога не се користени дигитални платформи за учениците со потешкотии, дислексија и дискалкулија и кај истите ученици на друг час кога се користени за учениците со потешкотии, дислексија и дискалкулија.

Анализата е направена со користење на квантитативни методи со процентуална застапеност, користејќи дескриптивни статистики на нумерички и процентуални вредности како и конклузивни статистики со Вилкоксоновиот тест за потенцијалните разлики на аритметичките средини.

3.3. НАОДИ И РЕЗУЛТАТИ

По обработката на податоците резултатите покажаа дека од вкупно анкетираните ученици со потенцијални потешкотии или со потенцијални индикации за дислексија и дискалкулија, според стандардните инструменти BUEGA и PZD 2–6, 52 ученици покажаа таква симптоматологија по предметот математика. Во Графикон 1 се прикажани проценти на овие ученици и тоа над 21% од 52 ученика резултираа со дислексија, над 19% со индикации со дислексија и дискалкулија (ДД) и исто толкав процент со дискалкулија наспроти 14,13% со некои други симптоми на потешкотии кои не се дел од дислексија или дискалкулија.



Графикон 1. Ученици со дислексија и дискалкулија од 2 до 6 одделение спрема BUEGA и PZD стандардните инструменти

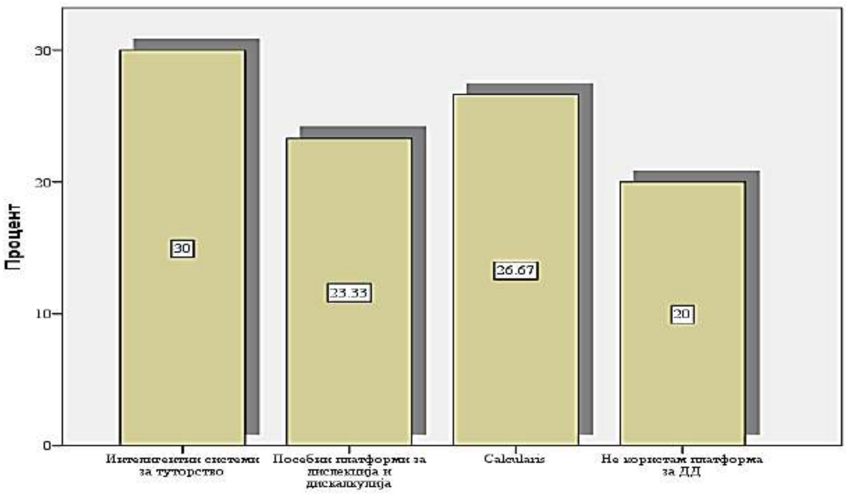
Пред да ги анализираме резултатите на овие ученици ПРЕД и ПОСЛЕ користењето на дигиталните платформи, како што наведовме, во истражувањето се анкетираа и наставниците по предметот математика за тоа дали, какви и колку дигитални платформи се користат по предметот математика. По обработката на резултатите за вкупно 30 наставници, утврдено е дека 70% од нив користат динамични математички алатки наспроти 30% кои користат хипермедијални системи по математика (Табела 1).

Табела 1. Наставници според вид на користење на дигитални алатки по математика

	Фреквентност	процент
Динамични математички алатки – Интелигентни системи	21	70
Хипермедијални системи по Математика	9	30
Вкупно	30	100

Појаснување: Интелигентни системи се системи кои според Nattland и Kerres [16] можат да презентираат нова содржина земајќи го в предвид претходното знаење на учениците и да овозможат индивидуално прилагодување на тежината на задачата или темпото на презентирање на нова содржина за потребите на ученикот. Хипермедијални системи се оние кои пак според дефиниција не се дизајнирани да поучуваат единици за учење на структуриран начин, туку служат како нелинеарни хипертекстни системи кои најчесто се користат како енциклопедии во образовните поставки, обезбедувајќи информации поврзани преку хиперврски според Ma et al. [17].

На прашањето кои специфични дигитални алатки ги користат за учениците со индикации на дислексија и дискалкулија, 30% од наставниците одговорија дека користат или барем се обидуваат да користат интелигентни системи за туторство по предметот математика (некои од нив следеле и некоја обука за такви системи). Над 26% одговорија дека се запознаени со Calcularis 2.0 и неретко го користат со такви ученици, 23% користат некои други платформи од интернет и 20% воопшто не користат никакви платформи за овие ученици со ДД потешкотии (Графикон 2).



Графикон 2. Користење на дигитални платформи за учениците со индикации на дислексија и дискалкулија (ДД)

Како што наведовме, податоци за успехот на учениците по математика, за времето кога не се користени дигитални платформи при работа со ученици со потешкотии, дислексија и дискалкулија се собрани од архивите на самите наставници по математика или одделенските раководители. По обработката на овие податоци и податоците за успехот по математика за време на анкетирањето, во Табела 2 се прикажани дескриптивни статистики за аритметичките средини за успехот ПРЕД и ПОТОА:

Табела 2.Среден успех во математика - ПРЕД користење на дигитални платформи и ПОТОА

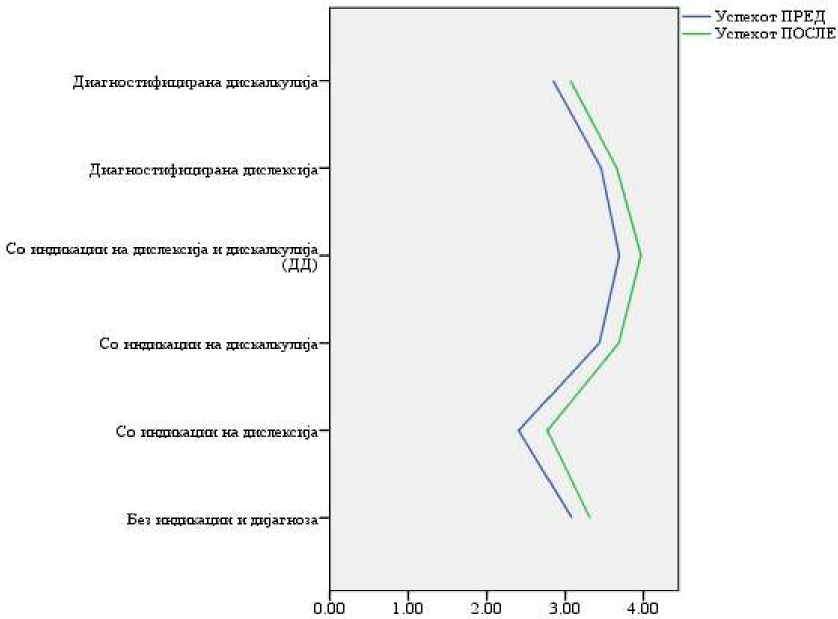
		Успех ПРЕД	Успех ПОТОА
N	Valid	92	92
	Missing	0	0
Mean		3.2017	3.4517
Std. Deviation		1.20055	1.00050

Успехот на овие ученици со ДД пред користење на дигитални платформи достигнува М=3.20 со стандардна девијација СД =1.20 наспроти успехот на истите ученици после користење на дигитални платформи со М=3.45 и СД=1.00. Ова значи дека после воведување на дигитални системи по предметот математика, кај овие ученици со потешкотии, особено со дислексија и дискалкулија, успехот по математика им е подобрен.

Во Табела 3 според Z= – 4.796 со Sig=0.000 ($p<0.01$) констатираме дека овие разлики на средните големини на успехот пред и после користењето на дигитални платформи има статистичка значајност, односно, констатираме дека користењето на дигиталните платформи за учениците со потешкотии особено со дислексија и дискалкулија влијае врз подобрување на успехот по математика.

Табела 3. Wilcoxon Signed Ranks Test
Значајноста на разликите за аритметичките средини на успехот пред и потоа

Успех ПОТОА > Успех ПРЕД		N	Mean Rank	Sum of Ranks	Z	Sig.
Успех ПРЕД – Успех ПОТОА	Negative Ranks	0[a]	.00	.00	-4.796[b]	.000
	Positive Ranks	23[b]	12.00	276.00		
	Ties	69[c]				
	Total	92				



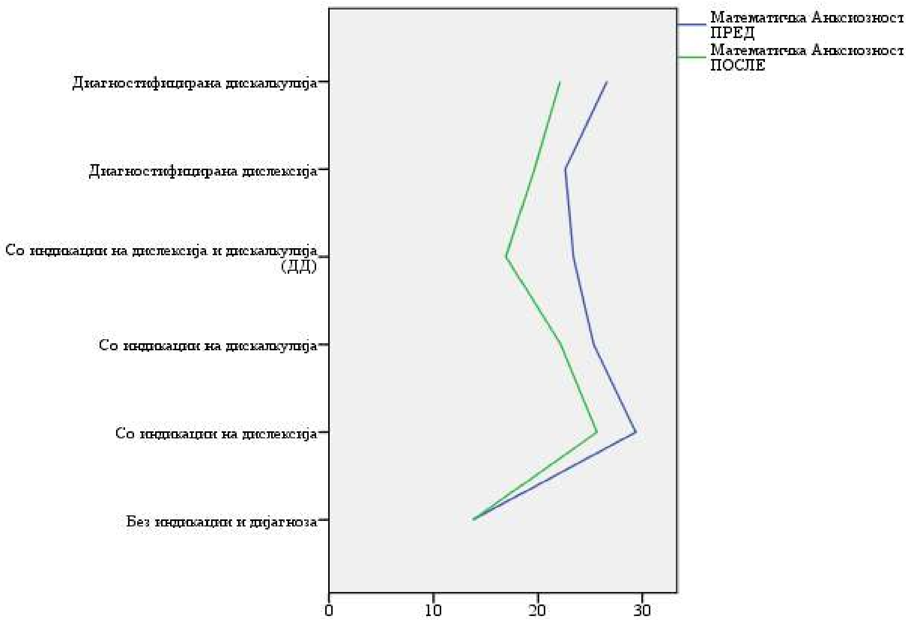
Графикон 3. Успехот Пред и После користење на дигитални платформи за учениците со ДД

Од друга страна пак, податоците за нивото на математичка анксиозност се добиени во самите анкетирања, каде што интервјуто за математичка анксиозност е спроведено на часот по математика кога не се користени дигитални платформи за ученици со потешкотии со дислексија и дискалкулија и кај истите ученици на друг час кога се користени дигиталните платформи. По обработката на овие податоци за математичката анксиозност, во Табела 4 се прикажани дескриптивни статистики за аритметичките средини за математичката анксиозност Пред и Потоа:

Табела 4.Математичка анксиозност Пред користење на дигитални платформи и После

		Математичка анксиозност ПРЕД	Математичка анксиозност ПОТОА
N	Valid	92	92
	Missing	0	0
Mean		23.46	19.82
Std. Deviation		12.855	10.332

Математичката анксиозност на овие ученици со ДД пред користење на дигитални платформи достигнува М=23.46 со СД=12.86, наспроти математичката анксиозност на истите ученици после користење на дигитални платформи со М=19.82 со СД=10.33. Последново укажува дека по воведување на дигитални системи по предметот математика кај ученици со потешкотии, особено со дислексија и дискалкулија, математичката анксиозност им е опадната.



Графикон 4. Математичката анксиозност Пред и После користење на дигитални платформи за дислексија и дискалкулија

Во Табела 5 според Z= −4.790 со Sig=0.000 ($p<0.01$), констатираме дека овие разлики на средните големини на математичката анксиозност пред и после користењето на дигитални платформи има статистичка значајност, со други зборови, констатираме дека користењето на дигиталните платформи за учениците со потешкотии особено со дислексија и дискалкулија влијае врз намалувањето на математичката анксиозност.

Табела 5. Wilcoxon Signed Ranks Test
Значајноста на разликите за аритметичките средини на математичката анксиозност пред и потоа

Анксизонст ПОТОА < Анксиозност ПРЕД		N	Mean Rank	Sum of Ranks	Z	Sig.
Анксиозност ПРЕД Анксиозност ПОТОА	Negative Ranks	30[a]	15.50	465.00	-4.790[b]	.000
	Positive Ranks	0[b]	.00	.00		
	Ties	62[c]				
	Total	92				

ЗАКЛУЧОК

Оваа студија покажува дека дигиталните системи или адаптивните програми за поддршка на децата со дискалкулија и дислексија, освен што може да им помогне да бидат во чекор со нивните врсници, можат да влијаат и врз успехот во наставата по математика и да ја намалат математичката анксиозност. Резултатите покажаа дека и по релативно краток период на тренирање со овие платформи за поддршка на децата со потешкотии, посебно Calcularis (според нашите резултати користено од 26% од анкетираните наставници), може да се постигнат солидни ефекти од обуката во однос на аритметичката и просторната застапеност на броеви. Резултатите покажуваат дека особено математичката анксиозност и потешкотиите во читањето (јазичната писменост) и правописот кои се појавуваат се значајни показатели за индивидуалното користење на ваквите дигитални платформи.

Резултатите покажаа дека над 21% од 52 ученика резултираа со дислексија, над 19% со индикации со дислексија и дискалкулија (ДД) и исто толку процент со дискалкулија наспроти 14.13% со некои други симптоми на потешкотии кои не се дел од дислексија или дискалкулија. Според генералните пресметки, овие потешкотии се со фреквенција помеѓу 2% и 5% и се речиси исти со фреквенциите во споредба со констатациите на релевантните истражувања [3], [6], [7], [10].

Резултатите покажаа дека 70% од наставниците по математика користат динамични математички алатки, наспроти 30% кои користат хипермедијални системи по математика, каде во склоп на овие проценти за потребите на децата со потешкотии, особено со дислексија и дискалкулија, 30% од нив одговорија дека користат или барем се обидуваат да користат интелигентни системи за туторство по предметот математика. Над 26% одговорија дека се запознаени со Calcularis 2.0 и неретко ја користат слободната верзија со учениците. 23% користат некои други платформи од интернет и 20% воопшто не користат никакви платформи за овие ученици со ДД потешкотии. Наставниците треба системски да се поддржат и да се мотивираат останатите наставници по другите предмети да користат слични платформи.

Успехот и математичката анксиозност како два индикатори кои се потенцираа во нашето истражување резултираа како заклучно сознаниие и тоа, користењето на дигиталните платформи за учениците со потешкотии особено со дислексија и дискалкулија влијае врз подобрување на успехот по математика но врз намалувањето на математичката анксиозност. Според овие заклучни сознанија, слободно може да наведеме дека како ограничување на објективноста на резултатите на истражувањето се јавува малиот број на ученици со потешкотии (особено со ДД), и според методолошкиот тек може да се продолжи со понатамошни истражувања на ова поле, да се анализира посебно секоја дигитална платформа според постигнатите ефекти кај учениците.

ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Kadosh, R., Dowker, A., Heine, A., Kaufmann, L., and Kucian, K. *Interventions for improving numerical abilities: Present and future. Trends Neurosci*. Educ. 2, (2013). 85–93

[2] L. Kaufmann, M. Mazzocco, A. Dowker, M. von Aster, S. M. Göbel, R. H. Grabner, et al. *Dyscalculia from a developmental and differential perspective*. Front. Dev. Psychol. (2013). 4:516.

[3] J. Kohn, L. Rauscher, T. Käser, K. Kucian, U. McCaskey, A. Wyschkon, et al. *Effekte des Calcularis-Trainings* - Teil 1: Domänen-spezifische Veränderungen. Lernen. Lernstörung. 6, (2017). 51–63.

[4] K. Kucian, U. McCaskey, R. O'Gorman Tuura and M. von Aster, *Neurostructural correlate of math anxiety in the brain of children*. Nat. Transl. Psychiatry 8 (2018a) 273.

[5] K. Landerl, *Development of numerical processing in children with typical and dyscalculic arithmetic skills - a longitudinal study*. Front. Psychol. (2013) 4:459.

[6] S. Chodura, J. T. Kuhn and H. Holling, *Interventions for children with mathematical difficulties: A meta-analysis*. Zeitschr. Psychol. 223, (2015)

129–144.

[7] P. Räsänen, D. Laurillard, T. Käser and M. von Aster, *“Perspectives to technology-enhanced-learning and teaching in mathematical learning difficulties*,” in International Handbook Of Mathematical Learning Difficulties, eds A. Fritz, V. G. Haase, and P. Räsänen (Berlin: Springer), (2019) 733–754.

[8] M. von Aster and M. Lipka, *Droht der Schule ein digitaler Tsunami? - Auf die Qualität kommt es an! Lernen und Lernstörungen*. Science 7, (2018) 65–66.

[9] E. Di Giorgio, M. Lunghi, R. Rugani, L. Regolin and B. Dalla Barba, *A mental number line in human newborns*. Dev. Sci. 22:e12801, 2019

[10] C. Hoyles, *"Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology*". Research in Mathematics Education, 20:3, (2018) 209-210

[11] D. Hillmayr, F. Reinhold, L. Ziernwald and K. Reiss, *Digitale Medien im Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe*: Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit. Münster: Waxmann Verlag, 2020

[12] T. Link, S. Huber, H. Nuerk and K. Moeller, *Unbounding the mental number line - new evidence on children’s spatial representation of numbers*. Front. Psychol. 4:1021, 2020

[13] G. Esser, A. Wyschkon and K. Ballaschk, *Basisdiagnostik Umschriebener Entwicklungsstörungen im Grundschulalter* (BUEGA). Göttingen: Hogrefe, 2008

[14] C. Jacobs and F. Petermann, *Rechenfertigkeiten- und Zahlenverarbeitungs-Diagnostikum für die 2. bis 6. Klasse*. Göttingen: Hogrefe, 2005

[15] J. Kohn, V. Richtmann, L. Rauscher, K. Kucian, T. Käser, U. Grond, et al. *Das Mathematikangstinterview (MAI): Erste psychometrische Gütekriterien*. Lernen. Lernstörung. 2, (2013) 1–14.

[16] A. Nattland and M. Kerres, *"Computerbasierte Methoden im Unterricht [Computer-based Methods in Class]*". K.-H. Arnold, U. Sandfuch, J. Wiechmann (Eds.), Handbuch Unterricht (2nd ed.), Julius Klinkhardt, Bad Heilbrunn, Germany, (2009). pp. 317-324

[17] W. Ma, O.O. Adesope, J.C. Nesbit and Q. Liu, *"Intelligent tutoring systems and learning outcomes: A meta-analysis*". Journal of Educational Psychology, 106 (4) (2014), pp. 901-918

1 ООУ „Илинден“,
Крива Паланка, Р. Македонија
e-mail: dobri.jovevski@gmail.com

2 Универзитет „Гоце Делчев“,
Штип, Р. Македонија,
e-mail: tatjana.pacemska@ugd.edu.mk

3 ООУ „Љубен Лапе“,
Скопје, Р. Македонија
e-mail: apesmit@gmail.com

ПРОМЕНА НА МИСЛОВНИОТ КОНЦЕПТ ПРЕКУ КРИТИЧКО МИСЛЕЊЕ, НЕРУТИНСКИ ПРОБЛЕМИ И МОТИВАЦИЈА ЗА ЗГОЛЕМУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКАТА ПИСМЕНОСТ

Викторија Илиеска [1]

Анкица Спасова [2]

Методија Јанчески [3]

Математиката често се доживува како апстрактен и неразбирлив предмет, придружен со чувство на вознемиреност и апатија кај учениците. Кога станува збор за Македонија, причините несомнено можеме да ги бараме во следната тријада: општество, родители и односот наставник-ученик.

Денешното модерно општество бара граѓани со нови вештини и знаења потребни за создавање нови технологии и иновации; граѓани со подготвеност да решаваат предизвици во непознати околности. Клучно е квалитетното образование кое ќе произведе конкурентни поединци на пазарот на трудот, со компетенции за читање и размена на информации, користење на практично знаење и стекнати вештини, наспроти репродукција на фактички меморирани знаења. Развиените земји ги наградуваат поединците не за она што го знаат, туку за она што можат да го направат со своето знаење. Истражувањето на PISA покажува дека квалитетот на образовните системи и политики е тесно поврзан со наставниците. Наставниците го отвораат патот за учениците да одговорат на најважните прашања во образованието: „Што знам?“ и „Што можам да направам со моето знаење?“, притоа без да заборават на мотивациската компонента.

За нашиот труд од особен интерес е една од трите области на PISA: математичка писменост со акцент на новитетот од 2018 година-глобалната компетентност за проценка на знаењата од области на иновациите. Ја разбираме итноста да се истражи колку добро учениците се способни да го применат сопственото знаење, особено во математичката писменост и ја препознаваме улогата што математиката ја носи во градењето конструктивни, ангажирани и рефлектирачки граѓани.

Целта на трудот е да обезбеди концептуални решенија за поддршка на развојот на компетенциите на учениците за решавање проблеми кои вклучуваат способност за пренесување креативно и критичко размислување, преку решавање нерутински проблеми од различни перспективи, аргументација и длабинско разбирање на истите.

Таксономијата на Блум игра витална улога во постигнувањето на нашите цели и се развива околу следните фази: примена, анализа, евалуација и креирање. Наставникот овде е координатор и мотиватор во учењето на учениците и во процесот на создавање нови идеи, производи и нови начини на разбирање на нештата, користејќи претходно знаење. Наместо да наметнува „непознат" јазик, тој треба да се обиде да ја „игра" играта заедно преку интересите на учениците. Преку критичкото мислење како процес во кој субјектот ги анализира фактите, бара врска меѓу нив, ги оценува и синтетизира заклучоците да учествуваме во „создавањето" на новиот модерен поредок.

1. ВОВЕД

Учениците од Македонија, имаат учествувано на меѓународните тестирања: PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study), TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) и PISA (Programe for International Student Assessment) [1]. Во трудот го разгледуваме едно од трите подрачја на PISA, математичка писменост–способност на учениците да формулираат, употребуваат и интерпретираат математика во различни контексти, преку математичко размислување и користење на математички концепти, процедури, факти и алатки со кои се опишани, објаснети и предвидени феномени (читање, интерпретирање и решавање на даден проблем со организирање и толкување на дадени информации и избирање на метод за решавање) [2]. Во PISA 2018 како новина е додадена глобалната компетенција да се проценуваат и знаењата на учениците и во областа на иновациите [2], што потенцира дека учениците треба да се оспособени и да го применуваат сопственото знаење (со препознавање на улогата во истото).

Резултатите од TIMSS 2011, за наставниот предмет математика и природните науки, укажуваат дека најмногу внимание се посветува на разбирање на научени концепти, правила и постапки, малку на спроведување на истражувања, делумно/скоро безначајно на поврзување на содржините со други наставни предмети, со минимално посветување на пишување извештаи и образложенија за тоа што е набљудувано, формулирање на хипотези што треба да се проверат, како и за технологијата и нејзиното влијание во општеството и мултикултурната соработка [3]. Во споредба со интернационално средно ниво (учениците можат да применуваат основни математички знаења во различни ситуации и да решаваат проблеми), Македонија е во интернационално ниско ниво (учениците се со основни знаења од математика) [3].

Еквивалентна потврда на овие резултати се и резултатите од мерењата на постигањата и според когнитивните подрачја: знаење на факти, правила, постапки и концепти, примена на знаења и концептуално разбирање (мерено преку способност да класифицираат, претставуваат на различни начини, разликуваат, интерпретираат, решаваат едноставни проблеми) и размислување (способност за поврзување, анализа, воопштување, докажување и решавање посложени нерутински проблеми).

Во продолжение ќе понудиме неколку идејни решенија, со цел кај учениците да подржиме развој на компетенции за решавање на проблеми кои вклучуваат способност за трансфер на знаење во нови ситуации, креативно и критичко размислување преку решавање на нерутински проблеми земајќи во предвид различни перспективи, аргументурање и разбирање на нивната продлабочена структура.

2. ЗОШТО КРИТИЧКО МИСЛЕЊЕ?

Критичкото размислување заедно со креативното размислување, комуникацијата и соработката (колаборацијата) е едно од четирите „К“ вештини на 21-от век и не случајно во PISA21, во рамката за оценување на математичката писменост, како вештини се проверуваат: компјутерско и критичко размислување, креативност, истражување, самонасочување, иницијативност и упорност, употреба на информации, системско размислување и комуникација и рефлексија [3]. Критичкото мислење е токму процес во кој субјектот анализира факти, бара врска помеѓу нив, ги вреднува и синтетизира заклучок [4]. Тоа му помага на поединецот да дојде до правилни одлуки и заклучоци, да управува со планирање на времето, да е самокритичен и објективен во своите и туѓите ставови, размислувања и изложување на истите.

Треба да се потенцира и синергијата на критичкото со креативното мислење, кое претставува генерирање на нови идеи во дисциплини, потпирајќи се или кршејќи ги правилата и процедурите во истите, активно ангажирајќи ги учениците во здружување на постоечките идеи во нова конфигурација преку развивање нови својства или можности за нешто што веќе постои (откривање или добивање идеи за нештото сосема ново). Стандардите за оценување на креативното размислување вклучуваат оригиналност, соодветност, флексибилност и придонес во одреден домен. При комбинација на овие пристапи на размислување, потребна е критичка евалуација со внимание на концептуализација на „големата слика“ за да се даде контекст и значење на конкретни настани (примена на знаењата со заземање критички став).

На важноста на критичкото размислување укажува студијата објавена во “Developmental Cognitive Neuroscience” според која статистички 65% од децата, ќе работат на работни места кои денес не постојат, а се втемелени на STEM [5]. Затоа колку порано учествуваат во математичките активности и дома и во училиште, подоцна имаат подобар развој на математичките вештини, когнитивниот развој и креативност, социјалните вештини и решавањето на проблеми, вклучувајќи ги и сите вештини на 21 век како флексибилност, иницијатива и продуктивност.

3. КАКО ДА СЕ РАЗВИЕ КРИТИЧКОТО МИСЛЕЊЕ?

Во развојот на критичкото мислење улога имаа повеќе чинители. Родителите во овој процес на своите деца треба да им помогнат при соочување со неуспех, со правилно донесување на одлуки, развивајќи кај нив љубопитност, желба за претприемништво и лидерство. Додека во училиштата, учениците може да го развиваат своето аналитичко и логичко расудување.

Едукаторите треба да бидат отворени за нивните идеи, да обрнат внимание на нивните грижи, да остават прво сами да разберат, истражат и размислат за решение на некој проблем, наместо да им диктираат решенијата (може да им обезбедат потребни информации и да ги вклучат во активности кои бараат од нив да размислуваат критички, со поставување прашања и теми од нивното опкружување, со прилагодување на задачи со практичен пристап, за да учат од искуство). Корисно е да развиваат дискусии/дебати за нивните акции за справување со одредена ситуација, со што ќе развијат и способностите за донесување одлуки, отвореност за нови идеи и концепти, градејќи ги нивните когнитивни способности за размислување и емпатија, преку проширување на нивната перспектива за светот [6].

4. МОТИВИРАЧКИ ФАКТОРИ ВО ПРАВЕЦ НА МЕНУВАЊЕ НА КОНЦЕПТОТ НА РАЗМИСЛУВАЊЕ

За математичката анксиозност, веројатна причина е самото неразбирање на математичките концепти (Irna & Agung, 2022), каде како најтешки, учениците ги издвојуваат тригонометријата и веројатноста (Putra, 2020) [7].

Развојот на ефективните цели е исто така тесно поврзан со развојот на специфична мотивација, која може индиректно да се набљудува преку желбата на ученикот да се вклучи во решавање на математичка задача која може да биде поттикната од неговото верување за нејзината важност (сознание), неговиот гнев поради неуспехот да ја реши (емоција) или неговата упорност да ја реши задачата (однесување) [8].

Истражувањата откриваат дека учениците кои имаат посебен интерес за нејзино изучување, веруваат дека таа е важна за нивните идни академски потфати и работат напорно за да постигнат одлични резултати (Vaara, 2021). Желбата да учат математика им е под влијание на тоа колку важност му дале на процесот на учење (Јунос, 2021). Алзахрани (2022) објави уште еден мотивирачки фактор - иновативните стратегии што ги користат едукаторите додека предаваат математика [9].

Мотивирачките фактори се надворешни (доаѓаат надвор од доменот на ученикот-награди / признанија, добра оценка, задоволство на родителите или примена во идната кариера) или внатрешни (водат до мотивација во рамките на контролата на ученикот, желба да се претстават подобро од нивните врсници, способност за брзо разбирање на поими, заинтересираност да се подобрат со одреден концепт, со крајна цел уживањето во самата математика и процесот на решавање проблеми) [10]. Во продолжение ќе наведеме неколку фактори за мотивација кај учениците од 21-век:

- Посебно е важно давање значење на секоја личност со позитивно стимулирачко визуелно опкружување, па така, на брзото заситување на учениците со готови информации може да се влијае со начинот на презентирање на новите наставни содржини (повремено и комбинирано да се менува со приказни, гатанки, загатки, видео-лекции...). Потенцирањето на важноста на секоја индивидуа, може да се поткрепи со фактите дека пред проблемите сите сме еднакво важни, не сите еднакво размислуваат, а до решението може да се дојде на различни начини.

- Корелациите со сите наставни предмети (кои се корисни за индивидуалниот пристап) се одличен начин да им се покаже на учениците дека се дел од една голема целина во реалниот живот. За нивно развивање се корисни активности прилагодени на способностите и интересите на секој поединец или на група ученици.
- Исто така е добро ученците да чујат за успесите на хоби - математичарите ги разбиваат лошите митови за математиката и ја прават наука во која за секој има проблеми што може да ги реши, ако е доволно посветен (сето тоа влијае на нивната самодоверба, истрајност и упорност) [6].
- Хуморот ги ослободува учениците од стрес (биологот A. Michael Johnson, открил дека исти центри во десната хемисфера на мозокот се одговорни и за смислата за хумор и за способноста за решавање на проблемските задачи) [7].

Нерутински проблемски задачи како мост меѓу критичкото и иновативното знаење, преку креативноста вклучуваат барање на нови значајни врски со можност за генерирање на нови, необични, оригинални и разновидни гледишта, како и детали кои ги прошируваат / збогатуваат досегашните. Ако критичкото мислење ги вклучуваше внимателно, правилното и конструктивно испитување на размислувањата и акцииите преку организирање и анализирање на можностите, рафинирање и развивање на најперспективните можности, рангирање на опциите, тоа само по себе не е доволно ученикот да го реши проблемот на неедноставниот и најбрз начин.

Ефективните решавачи на нерутински проблеми треба да размислуваат и креативно и критички, создавајќи опции со размислувачки фокус од повисок ред. За нивно решавање се користат претходни знаења и вештини (без претходни упатства) и не постои единствен начин / пристап (различни стратегии за решавање). Сето ова води кон развивање на вештините за размислување, со краен резултат - иновативни и креативни ученици.

5. ПРОМЕНИТЕ КАКО ВЛЕЗ ВО ИДНИНАТА

Очекуваните исходи од критичко – креативниот размислувачки концепт се подобрување на изучувањето на поимите и зголемена трајност и применливост на знаењето во реални ситуации. Тоа е невозможно без корелација со останатите предмети и без почитување на личноста на ученикот, неговата упорност, интуиција и знаење што ќе ги употреби при решавањето во областа на иновациите, така што преку основани пресуди и одлуки тие личности да станат конструктивни, рефлексни и ангажирани граѓани (PISA2018) [1]. Од спроведената анкета на примерок од ученици на возраст од 12 до 14 години и наставници-ментори по математика, резултатите покажуваат на потребите и на едните и на другите.

Учениците преферираат да ја решат задачата на свој начин (52% и решавањето преку игра (26%) наспроти применливост во секојдневниот живот и корелација со други наставни предмети (7%).

Пријатната атмосфера и неограниченото време кај учениците, се со високи 92%, наспроти 18% за побрзо решавање на дадена задача. Притоа не им менува дали некој пред нив кој не изучувал математика, успеал да го реши проблемот (69% наспроти 31%) ниту пак слушната шега, за нив не е мотивирачки фактор за опуштање и полесно решавање.

За разлика од нив наставниците веруваат дека овие резултати се последица на внатрешните мотивирачки фактори: желбата да се претстават подобро од нивните врсници и способноста за брзо разбирање на концептите, дури 77% од нив, силно веруваат дека добиената оценка е поприсутен мотивационен фактор од чувството на удобност (16%) и материјалната награда (7%), како надворешни мотивирачки фактор.

Наставниците имаат волја да ги водат учениците да ја постигнат целта (давајќи им задачи со различни тежински нивоа, притоа внимавајќи на индивидуалноста на секој ученик) и се согласуваат дека иновативните стратегии што ги користат едукаторите, позитивно влијаат на развој на математичката писменост. Овие две алатки може да ни бидат појдовни за развој и зголемување на математичката писменост, преку промена на мисловниот концепт преку критичко мислење и решавање на нерутински проблеми.

Наставниците сметаат дека главен проблем за развој на математичката писменост е погрешното разбирање на математичките концепти, математичката вознемиреност, гневот поради неуспехот да го реши проблемот и верувањето во важноста на проблемот.

Меѓу понудените стратегии за развој на математичката писменост, наставниците на највисоко ниво ги ставија: развивање натпреварувачки дух, претставување предизвици (доказ за успех во современите капиталистички општества), развивање љубопитност, применливост на темата, помагање да се надмине стравот од неуспех (доказ на постигнатите афективни цели со фокус на емоционалниот развој, а помалку на ставовите, интересите, вредностите, мотивите и верувањата во процесот на учење). Важен удел има и употреба на технологија, откривање „шеми“, креирање цел (доказ за успех во современите општества) до најниско ниво: давање совети, раскажување релевантни приказни, докажување математички факти, користење на интеракција еден на еден и влијание на академско подобрување.

Несомнено со најголем процент наставниците се водат строго кон наставната програма (што можеби е показател на принципиелност и доследност, но сигурно не е показател на иновативност и желба за предизвици со желба за промена). Тие што користат различен концепт, даваат подеднаков акцент на корелација со други наставни предмети и практичниот пристап , со главна цел-учениците да ги совладаат наставните содржини дадени во наставниот план. Додека оние наставници кои и даваат важност на корелацијата се многу малку (5%), сепак тие, најмногу им даваат задачи со практичен пристап односно применливост.

Фактот дека учениците сеуште не ја насетуваат врската и применливоста на математиката во секојдневниот живот и корелацијата со сознанијата што ги добиваат од останатите предмети, туку ја учат засебно, треба да ни биде аларм (за што говорат и резултатите од анкетата) повеќе тимски да работиме на тековното временско прилагодување на наставните содржини, со главен фокус-учениците да ги надоврзуваат стекнатите знаења од сите наставни предмети со нивна трајност и применливост. Наместо охрабрувачки стории да го пофалиме нивниот напор и да го посочиме нивниот напредокот, да покажеме воодушевување и да ги нагласиме важноста и улогата на математичката писменост во академскиот успех. Ретко, но со добра проценка, понекогаш кај индивидуалци да употребиме и негативни коментари како инспирација за преземање иницијатива и упорност во постигнување на целта. Додека за да ги подобриме ученичките вештините за критичко размислување и ние добро да сме запознаеме и владееме со новите иновативни пристапи и употребата на технологијата, работејќи на нашиот личен професионален развој.

6. ЗАКЛУЧОК

Математиката е како игра ... ќе наидете на неколку пречки на патот, но доаѓањето до целта (добивањето краен одговор/доказ) е навистина исполнувачко, и дава наградувачко чувство. Ако неодамна меѓу поважните мотивациони алатки биле: образложенијата за учење математика преку откривање на обрасци и начини за примена на статистичкото, нумеричкото и просторното расудување во општеството (Вилкерсон, 2015), важноста на постигнатиот успех (Eggleton, 2017), како најнова алатка се јавува потребата од помош на едукаторите за учениците „да се справат со предизвикувачки проблеми и да станат креативни решавачи на проблеми" King (2019) и важноста на корелацијата на математиката (со други предмети, со идната кариера и секојдневен живот), Kinser-Traut (2019) .

Главен двигател во новото иновативно-технолошко развиено општество, каде секој треба да се пронајде во вистинското поле е токму согледувањето на концептот на математиката писменост, која преку зголемување на мозочна моќ (побистар концептуален ум), дава разновиден начин на размислување и тежнее кон можност за "раст" и способност не само во STEM областите, туку не поврзува со сите полиња во општествено-политичкиот живот, воопшто. Едноставно математиката треба да ја сфатиме како ангажираност, која го исполнува апетитот да се предизвикаме себеси.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Државен испитен центар на република Северна Македонија, *Извештај за постигнувањата на учениците во Република Македонија TIMSS 2011,* https://www.iea.nl/sites/default/files/2019-05/TIMSS_2011_report_Macedonia_Macedonian.pdf

[2] *PISA, PISA 2022* Mathematics Framework, https://pisa2022-maths.oecd.org/

[3] Државен испитен центар на Република Северна Македонија, *Извештај за постигнувањата на учениците во Република Македонија TIMSS 2011,* https://www.iea.nl/sites/default/files/2019-05/TIMSS_2011_report_Macedonia_Macedonian.pdf

[4] *The Foundation for Critical Thinking, Defining Critical Thinking,* https://www.criticalthinking.org/pages/defining-critical-thinking/766

[5] *ScienceDirect, Developmental Cognitive Neuroscience,* https://www.sciencedirect.com/journal/developmental-cognitive-neuroscience

[6] *ECOLE GLOBALE INTERNATIONAL GIRL'S SCHOOL, Importance of Teaching Critical Thinking To Students,* https://www.ecoleglobale.com/blog/importance-of-teaching-critical-t Byte Learn , 10 Strategies for Motivating Students in Mathematics, https://www.bytelearn.com/articles/strategies-for-motivating-students-in-mathematics/hinking-to-students/

[7] Springer Link*, Students' Motivation in the Mathematics Classroom. Revealing Causes and Consequences*, https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-013-9502-0

[8] N. M. Yunos, T. B. T. Thangal, N.H. Rahmat, N.H.M. Sharif, S.N. Ahmad, N.A. Latif, *Motivation for Learning Mathematics: A Study Across Disciplines,* International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, 12(9) 2022 1135 – 1154.
Edutopia, 9 Strategies for Motivating Students in Mathematics, https://www.edutopia.org/blog/9-strategies-motivating-students-mathematics-alfred-posamentier

[9] Емитер*, Математичар - аматер реши повеќе децениски математички проблем*, https://emiter.com.mk/vesti/17747

[10] Математика +, да се насмееме ... Хуморот ја развива интелегенцијата и ослободува од стресот*,* https://matematika-plus.weebly.com/da-se-nasmeeme.html#

1 ООУ„Коле Неделковски",
ул. Антоније Грубишиќ, бр.8, 1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: vikiiki@gmail.com

2 ООУ „Тихомир Милошевски",
ул. 1, бр. 62, Ѓорче Петров,1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: a_kaladziska@yahoo.com

3 Факултет за информатички науки и компјутерско инженерство,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј",
Ул. Руѓер Бошковиќ, бр. 16, 1000, Скопје, Р. Македонија
e-mail: metodija.jancheski@finki.ukim.mk

РЕФЛЕКСИВНОТО УЧЕЊЕ НА НАСТАВНИЦИТЕ ПО МАТЕМАТИКА ОД ОСНОВНИТЕ И СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА НА РЕПУБЛИКА СЕВЕРНА МАКЕДОНИЈА

Лидија Кондинска [1]

Даниела Тачевска Николов [2]

Снежана Ристовска [3]

Миќерем Ризаи Мемеди [4]

1. ВОВЕД

Секој наставник посветен на својата работа има за цел да ги подобри своите методи на предавање и да го збогати искуството на учење кај своите ученици. Во овој контекст, наставниците се насочени кон станување подобри во својата работа за да им обезбедат на учениците подобро образование.

Размислувањето и рефлексијата на наставата од страна на наставникот се клучни компоненти на процесот на истражување и подобрување на својата работа. Подобрувањето на наставникот во својата наставна практика повлекува и подобрување на постигнувањата на учениците.

Покрај обуката на наставниците за планирање и реализирање на наставата, потребна е и обука за стекнување на знаења, вештини и ставови од аспект на правење рефлексија на наставата. Стекнувањето на знаења, вештини и ставови за рефлексијата, потребно е да започне уште од најмала возраст во рамките на семејството и надворешната средина, па да продолжи во образованието. Средношколците кои своето образование го продолжуваат на додипломски студии за наставници треба да се подготвуваат за рефлексија на наставата, за користењето на повеќе форми на размислување за наставата кои можат да го зголемат неговиот потенцијален ефект. Стекнатите знаења, вештини и ставови за рефлексија на наставата во текот на додипломските студии и со дополнителни обуки во текот на својата работа како наставник, наставникот може да ги користи за ефективен професионален развој каде се очекува континуирано да ги испитува своите претпоставки и практики.

Брукфилд и Мерифилд (Brookfield, 1995; Merrifield, 1993) во своите истражувања покажаа дека критичкото размислување продолжува да биде ефикасна техника за професионален развој.

2. РЕФЛЕКСИВНОТО УЧЕЊЕ НА НАСТАВНИЦИТЕ ПО МАТЕМАТИКА

2.1. ШТО Е РЕФЛЕКСИЈА НА НАСТАВАТА?

Рефлексијата на наставата е размислување од страна на наставниците за тоа што правеле во училницата, зошто прават одредени работи и дали тоа функционира. Всушност рефлексијата е размислување во рамките на процесот на самонабљудување и самоевалуација во функција на континуирано учење. Оваа пракса вклучува прегледување и анализирање на сопствените начини на работа и ресурси со цел да се идентификуваат силни и слаби страни на наставата и да се пронајдат начини за подобрување. Во текот на рефлексијата, како тековен процес се собираат докази кои може да обезбедат поконкретни насоки во работата на наставниците.

Рефлексијата на наставната работа може да ги вклучува следниве елементи:

<u>Преглед на наставничката активност</u>: Наставниците се ангажираат во размислување за своите часови, како ги спроведуваат и како реагираат на потребите и напредокот на учениците.

<u>Анализа на резултатите</u>: Наставниците ги анализираат постигнувањата на учениците, учеството и други фактори што можат да влијаат на успешноста на наставната работа.

<u>Идентификација на предизвиците и можностите</u>: Преку рефлексијата, наставниците ги откриваат проблемите и предизвиците во својата наставна методологија, како и можностите за подобрување.

<u>Планирање на подобрување</u>: Според анализата, наставниците ги определуваат конкретните чекори што може да ги преземат за подобрување на своите методи на предавање и резултатите на учениците.

Како мисловен процес, размислувањата на наставниците во текот на наставната практика се развиваат, а со тоа и самите наставници. Тоа значи дека рефлексијата е активен процес кој им овозможува на луѓето да размислат и да учат од нивните искуства, конструирајќи ново знаење и применувајќи го тоа знаење во нови искуства.

Според Дјуи образованието е: „онаа реконструкција или реорганизација на искуството што го додава значењето на искуството и што ја зголемува способноста да се насочи текот на последователното искуство“. Ова може да им звучи познато на оние кои го проучувале научниот метод и учењето базирано на испитување. Често велиме дека градењето знаење кај учениците е континуиран процес на откривање заснован на прашања, истражување, обиди и грешки, извлекување заклучоци по размислување и примена на таа активна рефлексија за репликација и понатамошно учење. Истото треба да се случува и во наставната практика кај секој наставник.

Рефлексијата на наставната работа е од суштинско значење за професионалниот развој на наставниците и за подобрување на образовниот процес. Оваа пракса им помага на наставниците да бидат поефикасни, да ги адаптираат своите методи според потребите на учениците и да бидат подготвени за предизвиците на современото образование.

2.2. ВИДОВИ РЕФЛЕКСИЈА НА НАСТАВАТА

Рефлексијата во акција, воведена од Доналд Шон (Donald Schön), се однесува на процесот на размислување и учење што се одвива во текот на акцијата или конкретниот работен процес. Оваа теорија се фокусира на способноста на луѓето да рефлектираат и да го адаптираат своето работење и однесување во реално време, без претходна подготовка или длабока анализа.

Клучната идеја е дека луѓето во својата професионална пракса често се соочуваат со комплексни проблеми и ситуации кои не можат да бидат предвидени однапред и за кои нема време за длабока анализа. Затоа, рефлексијата во акција им дава можност на професионалците да размислуваат и да реагираат веднаш, да го адаптираат своето однесување и да учат од сопствените дејства во реално време. Оваа теорија се однесува на процесите на „брзо размислување" и „ креативно решавање на проблеми" што се случуваат во работните средини каде што професионалците мораат да донесат одлуки и да дејствуваат веднаш.

Рефлексијата на дејство, исто така воведена од Доналд Шон, се однесува на процесот на размислување и учење што се случува по завршување на одредено дејство, иако може да биде било кој вид на акција или работен процес. Оваа теорија ги поддржува професионалците да анализираат и размислуваат за своите дејства по нивното завршување, за да ги разберат и подобрат своите вештини и знаења.

Клучната идеја е дека рефлексијата на дејство им дава на луѓето можност да ги анализираат и разберат своите дејства и да ги прилагодат во иднина. Професионалците можат да го истражуваат своето однесување, да размислуваат за дејствата кои ги направиле и да разберат како да ги подобрат своите професионални вештини и знаења. Рефлексијата на дејство им дава можност на луѓето да извлекуваат знаење од своите искуства и да го подобрат своето работење во иднина.

И двата видови на рефлексија се значајни во професионалното учење и развој, и можат да се користат за подобрување на работните методи и решавање на проблеми во различни сфери на животот.

2.3. ЗОШТО Е ПОТРЕБНО РАЗМИСЛУВАЊЕ НА НАСТАВНИЦИТЕ ЗА НАСТАВАТА?

Размислувањето на наставниците за наставата им помага да преминат од доживување на содржината, до разбирање што се случило и зошто. Ова ниво на самосвест е моќен сојузник на наставникот, особено кога од тоа - што и како реализирал во текот на наставата може да смени во моментот. Ако наставникот не се сомнева во своите искуства и размислува за нив на ист начин, тогаш не може да очекува сопствено подобрување. Размислувањето на наставниците за наставата е од суштинско значење од повеќе причини:

- Подобрување на наставничката пракса: Рефлексијата им дозволува на наставниците да ги проценат своите методи на поучување и да ги идентификуваат силните и слабите страни. Ова овозможува континуиран процес на усовршување и адаптирање на методите за подобрување на учењето кај учениците.

- Персонализација на учењето: Преку размислување, наставниците можат да ги разберат потребите, интересите и стиловите на учење на секој ученик поединечно. Ова им овозможува да го персонализираат учењето и да го адаптираат на начин кој на секој ученик ќе му овозможи да постигне најдобри резултати.

- Подобрување на ученичките резултати: Кога наставниците ги анализираат своите методи и резултатите на учениците, можат да ги променат наставните стратегии за подобрување на постигнувањата на учениците и за намалување на нерамноправностите во учењето.

- Адаптирање на технолошки и образовни иновации: Процесот на рефлексија им овозможува на наставниците да бидат посветени на иновации во образованието и да ги интегрираат новите технологии и методи во својата настава.

- Развој на професионални вештини: Размислувањето ги подобрува професионалните вештини на наставниците и го проширува нивниот круг на знаења.

- Поврќе задоволство и мотивација: Способноста на наставниците да ги видат позитивните резултати од својата настава и учење може да им создаде чувство на задоволство и мотивација во нивната професија.

Размислувањето на наставниците за наставата е есенцијален елемент од континуираното професионално усовршување и подобрување на образованието. Тоа им овозможува на наставниците да бидат посветени и квалитетни во својата наставна работа и да им овозможат на учениците најдобро можно образование.

Тоа значи, ако наставникот сака да ја подобрува својата наставна практика и постигнувањата на своите ученици треба постојано да размислува за она што го предава и како го предава и да ја оценува ефективноста на наставата. Размислувањето од страна на наставникот е суштинска компонента за промена на образовната методологија.

Со стекнување на навика за правење на рефлексија на наставата, наставникот се стекнува и со култура на рефлективна практика, кој создава основа за постојано подобрување на наставата и учењето.

2.4. ПРИДОБИВКИ НА НАСТАВНИКОТ ОД РЕФЛЕКСИЈА НА НАСТАВАТА

Наставникот кој размислува за својата работа, секогаш вели дека неговата наставна практика може да биде уште подобра. Придобивките за наставниците кои размислуваат за своето поучување и учење на учениците се големи, а би биле уште поголеми доколку овие наставници ги охрабруваат своите колеги да го прават истото. Рефлексијата на наставата му овозможува на наставникот:

Подобрување на наставната работа и самодоверба: Подобрување на методите на поучување може да го засили уверението на наставникот во неговите способности.

Промоција на иновации и креативност: Поттикнување на креативност и експериментирање со нови концепции што ги подобруваат постигнувањата на учениците.

Фокусирање на ученикот и гледање во неговите перспективи: Наставникот активно се става во улогата на ученикот и ја разгледува својата работа преку негови очи.

Развивање на рефлексијата кај учениците: Ако наставниците ги насочуваат учениците кон рефлексија, тие можат поефикасно да ги поттикнат да размислуваат, анализираат, оценуваат и да го подобруваат своето учење. Ова се клучни вештини за нивно развивање како независни ученици, при што се истакнува значењето на наставниците како рефлексивни практичари.

Искреност и самооценка: Бидејќи рефлексијата се однесува кон своите избори, успеси, грешки и професионален развој, наставникот на овој начин ја одржува искреноста кон себе.

2.5. КАКО НАСТАВНИКОТ ДА ПОЧНЕ СО РЕФЛЕКСИЈА НА НАСТАВАТА

Наставникот треба да сака да го подобри размислувањето за сопственото учење или да ги поддржува колегите да започнат со рефлексија на наставата.

Почетокот со рефлексија на наставната работа може да биде корисен процес за подобрување на наставната пракса и подигнување на квалитетот на образованието што се нуди на учениците. Чекори кои наставникот може да ги следи за да започне со рефлексијата на наставната работа се:

Идентификување на целите: Првиот чекор во процесот на рефлексија е да се идентификуваат своите цели и целите како наставник. Кои се моите очекувања од наставата? Што сакам да постигнам со мојата наставна пракса?

Собирање на податоци: Собирањето на податоци и информации за наставниот процес е важен чекор. Ова може да вклучува анализа на резултатите на учениците, нивните реакции, наставни средства и материјали, како и планирање на наставата и изведба.

Размислување и анализа: Прегледувањето и анализирањето на собраните податоци и информации е следниот чекор. Се размислува за што се однесуваат податоците и како се одвивал наставниот процес.

Идентификување на силните и слабите страни: Наставникот одговара на прашањата како ги користи своите силни страни како наставник и каде се неговите слаби страни кои може да му помогнат да ги идентификува областите што може да ги подобри.

Планирање на акции за подобрување: На основа на рефлексијата, се планираат конкретни активности за подобрување. Како може да ги подобрам моите слаби страни и да ги искористам своите силни страни за подобра наставна работа?

Имплементација и проследување: Следење на плановите и активностите што се избрани и нивната имплементација во наставната работа. Значи, наставникот продолжува да ги следи резултатите и анализира дали има подобрување.

Рефлексија во текот на целата учебна година: Рефлексијата не треба да биде еднократен процес. Континуираното размислување и анализа во текот на целата учебна година ќе му помогне на наставникот да се адаптира на нови предизвици и да ги подобри своите методи на поучување.

Соработка и споделување на искуства: Соработка со колегите и споделување на искуства и рефлексии може да биде одличен начин за подобрување и да се воведат нови идеи и пристапи во наставниот процес.

Рефлексијата на наставната работа е процес што бара постојаност и посветеност на наставникот кон непрекинат професионален развој и подобрување на образованието на учениците. Наставниците можат да користат различни методи за собирање на податоци кои ќе им помогнат во процесот на рефлексија. Еве неколку примери на методи за собирање на податоци:

Анализа на постигнувањата на учениците: Прегледување и анализа на резултатите на учениците во различни начини на проверување (усни и писмени одговори, проекти, изведби, домашни задачи и сл.). Ова може да ги идентификува областите каде учениците покажуваат успех и оние области во кои можеби се потребни подобрувања.

Набљудување и документирање на часовите: Активно набљудување и документирање на часовите со цел да се следат ученичките реакции, користењето на наставните материјали и начинот на поучување. Ова овозможува наставникот да разбере како се одвива наставата во реално време.

Притоа може да се користи:

- ✓ Дневник на наставникот како ефективен метод за собирање информации по завршување на секој наставен час. Наставникот ги регистрира деталите во тетратка или во делот за белешки на својот телефон или може да користи гласовни белешки за да ги зачува реакциите и чувствата за себе и за учениците. Ваквите записи му помагаат на наставникот да ги запомни важните моменти од наставниот час. Сепак, важно е да се истакне дека овој метод не е толку темелен или доверлив како некои други методи за собирање на податоци. Дневникот може да биде подложен на субјективност и наставникот може да изостави некои детали или да му влијаат своите чувства и реакции. За да се подобри ефикасноста на дневникот, наставникот треба да го користи како средство за постојано размислување за наставата. Тоа вклучува редовно поставување на слични прашања по завршувањето на часот и размислување за можностите за подобрување. Дополнително, одвојувањето на време за размислување за наставната работа го создава циклусот на професионално размислување кое може да доведе до подобрување на наставата.
- ✓ Присуство на колега да набљудува е еден од методите кои наставниците ги користат за да ги подобрат своите наставни методи и да го подигнат квалитетот на наставната работа. Овој процес вклучува покана на колеги да присуствуваат на часот и да ги опсервираат наставните методи и интеракциите со учениците. Тие потоа собираат информации и обезбедуваат повратна информација на наставникот. Информациите можат да се соберат преку набљудување или со пишување на белешки за одреден дел од наставниот час. По завршувањето на набљудувањето, наставникот и колегите кои го набљудувале обично размислуваат за она што се случувало на часот. Овој метод на собирање на податоци за рефлексија има предност во тоа што се вклучуваат различни перспективи и се создава

заедница на наставници кои можат да споделуваат и учат од секој друг. Колегите може да ги споделат своите клучни заклучоци и да дадат различни перспективи за подобрување на наставната работа. Ова вклучување на колегите во процесот на рефлексија може да биде од суштинско значење за подобрување на наставната пракса и за размена на најдобрите практики од наставата по математика.

- ✓ Снимање на видео од наставниот час е моќен метод за собирање на информации за наставната работа и интеракциите во училницата. Оваа техника им овозможува на наставникот и на учениците да го видат часот од различни аспекти и да добијат непроменет и непристрасен поглед за ефективноста на наставата. Видео снимката му дава на наставникот можност да ги прегледа однесувањата и реакциите на учениците, како и своите сопствени методи и начини на поучување. Овој начин може да биде особено корисен, бидејќи наставниците понекогаш не можат да ги забележат сите детали во реално време. Наставникот може да го прегледа видеото во време што му одговара и да прави белешки, фокусирајќи се на аспектите кои би сакал да ги подобри. Ваквото собирање на информации му овозможува на наставникот да ги идентификува областите за подобрување и да преземе конкретни мерки за подобрување на наставната работа.
- ✓ Формирање на рефлексивни дискусии може да биде одличен начин за наставниците да се ангажираат во процесот на рефлексија на наставната работа и да ги подобрат своите методи на предавање. Овој метод налага собирање на мала група наставници, било лично или преку онлајн платформи, каде што може да се сподели видео од часот на друг наставник. Потоа, учесниците во дискусијата го анализираат видеото и разговараат за искуството на наставата и начините на учење што ги набљудуваат. Во овие дискусии, наставниците можат да споделат различни перспективи и искуства и да ги анализираат методите и стратегиите на другиот наставник. Ова може да биде корисно за идентификување на успешни методи, како и на областите кои можеби бараат подобрување. Овој метод овозможува активна соработка и размена на идеи меѓу наставниците и им помага да го разгледуваат својот работен процес од различни аспекти. Резултатот може да биде подобрување на наставната практика и подигнување на квалитетот на наставата.

Анкети и анкетирање на учениците: Креирање и спроведување на анкети и анкетирање кај учениците за да се дознае за нивните перспективи и ставови кон наставата. Ова може да биде важен извор на информации за подобрување на наставната практика.

Комуникација со учениците: Разговори и дискусии со учениците за нивното учење, интереси и предизвици. Ова овозможува да се разбере како се чувствуваат и какви потреби имаат учениците.

Соработка со колегите: Разговори и соработка со други наставници, размена на искуства и рефлексии. Колегите можат да бидат одличен извор на информации и поддршка.

Анализа на литературата и истражувања: Истражување и читање на академска литература, статии и извештаи за образование и методика на наставата по математика, за да научат нови тенденции и да бидат во тек со најдобрите практики во областа на математиката.

Наставниците можат да ги комбинираат овие методи и да ги прилагодат на своите потреби и контекст на наставата. Важно е да внимаваат со собирањето на податоци и да се осигураат дека информациите се анализираат и користат за подобрување на наставната работа.

2.6. ЕФЕКТОТ НА РЕФЛЕКСИЈАТА НА НАСТАВАТА ВРЗ УЧИЛИШТЕТО

Рефлексијата на наставата има значаен ефект врз училиштето. Оваа пракса им дава на наставниците можност да се ангажираат во постојан процес на професионален развој и подобрување на својата наставна методологија.

Тоа значи дека поттикнувањето на рефлексијата на наставата во училиштата е од големо значење не само за секој наставник, туку и за училиштето како целина. Развивањето на култура за рефлексија на наставата ги подобрува училиштата, создавајќи основа за постојано унапредување на наставата и постигнувањата на учениците. Културата на правење рефлексија е важна и за учениците и за наставниците и треба сите да ја поддржат.

Во училиштето се создава средина на соработка меѓу наставниците бидејќи при рефлексија на наставата наставниците разменуваат искуства, ја подобруваат својата настава и наставата на нивните колеги. На овој начин се развиваат добри практики во рамките на училиштето.

3. МЕТОДОЛОГИЈА НА ИСТРАЖУВАЊЕ

3.1. ПОЈАВА НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

Појава на истражување во овој труд е рефлексијата на наставата од страна на наставниците во Република Северна Македонија, бидејќи наставата како професија не е лесна. Неколку години наназад истата ја реализираат со соочување со економски, еколошки и здравствени тешкотии. Одлуките што наставниците треба да ги носат во нивните училници не се помалку значајни, но влогот е поголем отколку што бил досега. Затоа не може да си дозволат да се потпираат на истите методи на поучување и учење, оценување на постигнувањата на учениците и сл.

3.2. ПРЕДМЕТ НА ИСТРАЖУВАЊЕ

За да се променат наставниците во своето гледање на рефлексијата, предмет на истражувањето е правење на рефлексија на наставата од страна на наставниците за себе и еден на друг од некои аспекти (кога, по колку време, за што се користи, кои стратегии се користат, на што се однесуваат прашањата при рефлексија).

3.3. ПРОБЛЕМ НА ИСТРАЖУВАЊЕ

Училиштата со рефлективна наставна култура имаат предност во време на брзи промени. Преминот кон комбинирана и онлајн настава како резултат на Ковид-19 во 2020 година е одличен пример. Дури и најискусните наставници се најдоа во непознати води. Требаше да ги преиспитаат стратегиите на поучување и учење и да се прилагодат на новата средина за учење. Рефлексијата и соработката беа клучни вештини за брзо прилагодување во тешки времиња.

3.4. ПРИМЕРОК

Табела 1. Пол

Пол	Училиште		вкупно
	основно	средно	
машки	53	51	104
женски	60	57	117
вкупно	113	108	221

Табела 2. Настава во основно или средно образование

Училиште	Број на наставници
основно	113
средно	108
вкупно	221

Табела 3. Основното училиште е во град или село

Во	Училиште		вкупно
	основно	средно	
село	52	/	52
град	61	108	169
вкупно	113	108	221

Табела 4. Возрасти

Возраст (години)	Училиште		вкупно
	основно	средно	
до 40	29	30	59
од 40 до 50	30	27	57
од 50 до 60	26	25	51
над 60	28	26	54
вкупно	113	108	221

Табела 5. Работно искуство во настава и училиште

Работно искуство	Училиште		вкупно
	основно	средно	
до 10 год.	27	25	52
од 10 до 20	30	30	60
од 20 до 30	26	26	52
над 30	30	27	57
вкупно	113	108	221

Табела 6. Степен на образование

Степен на образование	Училиште		вкупно
	основно	средно	
ВШС	20	10	30
ВСС	49	52	101
Научен	24	24	48
Друго	20	22	42
вкупно	113	108	221

Табела 7. Наставата ја реализираат на наставен јазик и училишта

Наставен јазик	Училиште	
	основно	средно
македонски	77	81
албански	29	23
турски	7	4
вкупно	113	108

3.5. ХИПОТЕТИЧКА РАМКА

Се поставива следната хипотетичка рамка (можни се два случаи при поставувањето на хипотезите за важноста и врските на рефлексијата (Рефлексија-во-акција и Рефлексија-на-дејство)):

1. Рефлексивната настава по математика во основните и средните училишта на Република С. Македонија не зависи од работното искуство во настава на наставниците по математика.
2. Рефлексивната настава по математика во основните и средните училишта на Република Северна Македонија зависи од училиштето во кое наставниците реализираат настава.

Притоа **прашањата** кои се поставуваат при рефлексија (се однесуваат на методите и инструментите за оценување на учениците, управување во училницата, подобрување на професионалниот развој), **случувањето** на рефлексијата на наставата, **користењето на информациите** од рефлексијата (во однос на активностите кои ги водат учениците во постигнување на критериумите за успех, поединечно и колективно размислување за области кои имаат потреба од подобрување и области каде што часовите го немале посакуваното академско влијание, за области од наставата и учењето каде што училиштето има потреба од подобрување подобрување) и **користењето на стратегиите за рефлексијата** (саморефлексивен дневник, снимање видео, набљудување од учениците, набљудување од колега/и, снимање на рефлексијата) **не зависат од работното искуство на наставниот кадар**.

3.6. МЕТОДИ, ПОСТАПКИ И ИНСТРУМЕНТИ НА ИСТРАЖУВАЊЕТО

За собирање на податоците користен е прашалник. Овој начин за собирање на податоците е оправдан поради економичноста и можноста да се соберат поголем број податоци. Податоците добиени од прашалникот претставени се со табели и столбест дијаграм, а за отфрлување или прифаќање на хипотезите се користеше χ^2 – тест.

Прашалникот за наставниците од основните и средните училишта заедно со воведната страница (која, како што е познато, според сите стандарди има информативна, насочувачка и експлицитна функција) има вкупно три страници.

Се состои од два меѓусебно релативно конзистентно поврзани делови со единаесет прашања.

Првиот дел содржи вкупно седум искази кои се однесуваат на некои општи податоци за наставниците.

Вториот дел се однесува на практикувањето на рефлексија од страна на наставниците за својата настава во училницата од аспект на: време на случување на рефлексијата, користење на информациите од рефлексијата, користење на стратегии за рефлексија и прашања за рефлексија на својата работа.

3. ИНТЕРПРЕТАЦИЈА НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Табела 8. Практикување на рефлексија во акција

Добиена фреквенција Р. искуство	Практикување на рефлексија – во - акција				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
До 10 години	20 (9%)	11 (4,9%)	13 (5,8%)	8 (3,6%)	52 (23,5%)
Од 10 до 20 години	24 (10,8%)	16 (7,2%)	14 (6,3%)	6 (2,7%)	60 (27,1%)
Од 20 до 30 години	15 (6,8%)	14 (6,3%)	17 (7,7%)	6 (2,7%)	52 (23,5%)
Над 30 години	17 (7,7%)	22 (10%)	11 (5%)	7 (3,2%)	57 (25,8%)
Вкупно	76 (34,4%)	63 (28,5%)	55 (24,9%)	27 (12,2%)	221 (100%)

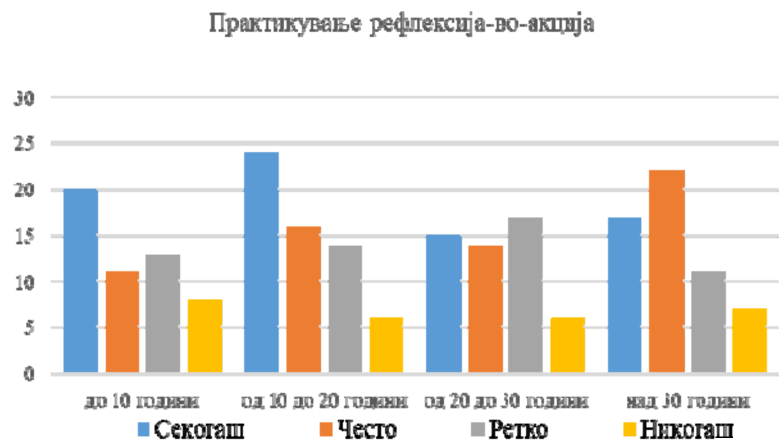
Очекувана фреквенција

Работно искуство	Честота на барање на мислење				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
До 10 години	17,88	14,82	12,94	6,35	52
Од 10 до 20 години	20,63	17,10	14,93	7,33	60
Од 20 до 30 години	17,88	14,82	12,94	6,35	52
Над 30 години	19,60	16,25	14,19	6,96	57
Вкупно	76	63	55	27	221

df= 9 p = 0,58688

χ^2 = ,48 χ^2 (0,05)= 16,92

χ^2 (0,01) = 21,67



Во дијаграмот, согласно табела 8, има четири категории на работно искуство (до 10 години, од 10 до 20 години, од 20 до 30 години и над 30 години) и четири категории за практикување на рефлексија во акција (Секогаш, Често, Ретко, Никогаш).

Во секоја ќелија од табелата, прикажана е фреквенција на наставниците кои припаѓаат во одредена категорија на работно искуство и практикување на рефлексија во акција. Во оваа анализа, може да забележиме дека најголем број на наставници имаат работно искуство од 10 до 20 години и дека најголем број на нив практикуваат рефлексија во акција „Секогаш". Од оваа табела, може да направите првична забелешка дека бројот на наставниците кои практикуваат рефлексија во акција не зависи од работното искуство, барем според ова множество податоци.

Со Хи-квадрат тест е направена проверка дали постои статистички значајна врска меѓу работното искуство и практикувањето на рефлексија во акција.

Ги поставуваме хипотезите.

H_0 (нулта хипотеза): Нема статистички значајна врска помеѓу работното искуство и практикувањето на рефлексија во акција.

H_1 (алтернативна хипотеза): Постои статистички значајна врска помеѓу работното искуство и практикувањето на рефлексија во акција.

За да го извршиме Хи-квадрат тестот, потребно е да го споредиме реалниот број на наставници во секоја ќелија со очекуваниот број (што би се случило ако немаше врска помеѓу работното искуство и практикувањето на рефлексија во акција). Во тест статистика χ^2 изнесува 7,48. За ниво на значајност од $\alpha = 0,05$ и со степени на слобода $df = 9$, вредноста на $\chi^2_{(0.05)}$ е 16,92, а вредноста на $\chi^2_{(0.01)}$ е 21,67. Тест статистиката (χ^2 = 7,48) е помала од критичната вредност на $\chi^2_{(0.05)} = 16,92$ и $\chi^2_{(0.01)} = 21,67$.

Затоа, нема доволни докази да се одбие нултата хипотеза. Ова значи дека нема статистички значајна врска меѓу работното искуство и практикувањето на рефлексија во акција на наставниците по математика во основните и средните училишта на Република Северна Македонија.

Заклучокот е дека наставниците се склони да практикуваат рефлексија во акција независно од нивното работно искуство во настава.

Табела 9. Користење на дневник за саморефлексија

Добиена фреквенција

Работно искуство	Користење на дневник за саморефлексија				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
до 10 години	12 (5,4%)	15 (6,7%)	17 (7,6%)	8 (3,6%)	52 (23,8%)
од 10 до 20 години	16 (7,2%)	13 (5,8%)	20 (9%)	11 (4,9%)	60 (27,1%)
од 20 до 30 години	13 (5,9%)	12 (5,4%)	16 (7,2%)	11 (5%)	52 (23,5%)
над 30 години	8 (3,6%)	11 (5%)	19 (8,6%)	19 (8,6%)	57 (25,8%)
Вкупно	49 (22,2%)	51 (23,1%)	72 (32,6%)	49 (22,2%)	221 (100%)

Очекувана фреквенција

Работно искуство	Честота на барање на мислење				Вкупно
	Секога ш	Често	Ретко	Никогаш	
до 10 години	11,53	12,00	16,94	11,53	52
од 10 до 20 години	13,30	13,85	19,55	13,30	60
од 20 до 30 години	11,53	12,00	16,94	11,53	52
над 30 години	12,64	13,15	18,57	12,64	57
Вкупно	49	51	72	49	221

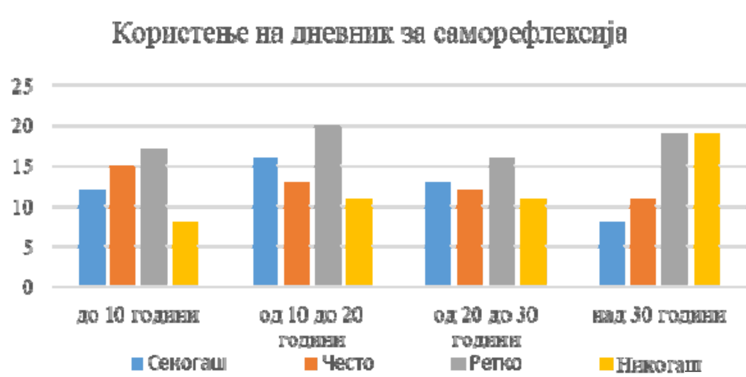
df =9

χ^2 =8,39

p = 0,49547

χ^2 (0,05)= 16,92

χ^2 (0,01)= 21,67



Во секоја ќелија од табелата 9, прикажана е фреквенција на наставниците кои припаѓаат во одредена категорија на работно искуство и користење на дневник на рефлексија. Од табелата може да забележиме дека најголем број на наставници имаат работно искуство од 20 до 30 години и дека најголем број на нив користат ретко дневник на рефлексија. Од оваа табела, може да направите првична забелешка дека бројот на наставници кои користат дневник на рефлексија не зависи значително од работното искуство.

Направен е Хи-квадрат тест за да провериме дали постои статистички значајна врска меѓу работното искуство и користењето на дневник на рефлексија.

H_0 (нулта хипотеза): Нема статистички значајна врска помеѓу работното искуство и користењето на дневник на рефлексија на наставниците по математика во основните и средните училишта на Република Северна Македонија.

H_1 (алтернативна хипотеза): Постои статистички значајна врска помеѓу работното искуство и користењето на дневник на рефлексија на наставниците по математика.

За да го извршиме Хи-квадрат тестот, потребно е да го споредиме реалниот број на наставници во секоја ќелија со очекуваниот број (што би се случило ако немаше врска помеѓу работното искуство и користењето на дневник на рефлексија). Тест статистиката (χ^2) изнесува 8,39. За ниво на значајност од α = 0,05 и со степени на слобода df = 9, вредноста на $\chi^2_{(0.05)}$ е 16,92, а вредноста на $\chi^2_{(0.01)}$ е 21,67. Тест статистиката (χ^2 = 8,39) е помала од критичната вредност на $\chi^2_{(0.05)} = 16,92$ и $\chi^2_{(0.01)} = 21,67$.

Затоа, нема доволни докази да се одбие нултата хипотезата. Ова значи дека нема статистички значајна врска.

Табела 10. Практикување рефлексија-на-дејство

Добиена фреквенција

Училиште	Практикување рефлексија-на-дејство				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
Основно	55 (24,8%)	38 (17,1%)	13 (5,8%)	7 (3,1%)	113 (51,1%)
Средно	21 (9,5%)	25 (11,3%)	42 (19%)	20 (9%)	108 (48,8%)
Вкупно	76 (34,4%)	63 (28,5%)	55 (24,9%)	27 (12,2%)	221 (100%)

Очекувана фреквенција

Училиште	Практикување рефлексија-на-дејство				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
Основно	38,86	32,21	28,12	12,81	113
Средно	37,14	30,79	26,88	13,19	108
Вкупно	76	63	55	27	221

Добиените податоци за статистиките се:

$df = 3,\ c = 0{,}389,\ \ \chi^2 = 39{,}35,\ \ \chi^2_{(0.05)} = 7{,}81,\ \ \chi^2_{(0.01)} = 11{,}34.$

Прашањето се однесува на анализа на Хи-квадрат тест за независност помеѓу две категори: „Училиште" и „Практикување на рефлексија во акција". Хи- квадрат тестот се користи за да се утврди дали постои статистичка врска помеѓу овие две променливи. Резултатите се прикажани во две табели - една за добиените фреквенции и една за очекуваните фреквенции.

Според добиената фреквенција, вкупно имаме 221 учесник во истражувањето. Секој наставник е класифициран според нивното „Училиште" и „Практикување на рефлексија во акција". На пример, имаме 55 наставници кои реализираат настава во основно училиште кои „секогаш" практикуваат рефлексија во акција.

За истражувањето се користи ниво на значајностост (α) од 0,05 и 0,01. За α = 0,05, критичната вредност на хи-квадрат со 3 степени на слобода е 7,81 и за α = 0,01, критичната вредност на хи-квадрат со 3 степени на слобода е 11,34.

Добиената хи-квадрат статистика χ^2 = 39,35 очигледно е поголема од критичните вредности за двете нивоа на значајност (7,81 и 11,34) со 3 степени на слобода.

Ова значи дека можеме да ја одбиеме нултата хипотеза (H_0) - дека нема статистички значајна врска помеѓу училиштето во кое работи наставникот (основно или средно) и практикување рефлексија-на-дејство.

Значи начинот на примена на рефлексијата на дејство од страна наставниците зависи од училиштето во кое реализираат настава по математика.

Табела 4. Практикување рефлексија-на-дејство

Добиена фреквенција

Училиште	Користење на дневник за саморефлексија				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
Основно	37 (16,7%)	42 (19%)	20 (9%)	14 (6,3%)	113 (51,1%)
Средно	12 (22,2%)	9 (4%)	52 (23,5%)	35 (15,8%)	108 (48,8%)
Вкупно	49 (22,2%)	51 (23,1%)	72 (32,6%)	49 (22,2%)	221 (100%)

Очекувана фреквенција

Училиште	Користење на дневник за саморефлексија				Вкупно
	Секогаш	Често	Ретко	Никогаш	
Основно	25,05	26,08	36,81	25,05	113
Средно	23,95	24,92	35,19	23,95	108
Вкупно	49	51	72	49	221

df = 3, c = 0,454, χ^2 = 47,46, $\chi^2_{(0.05)}$ = 7,81, $\chi^2_{(0.01)}$ = 11,34.

Од вкупно 221 наставници во истражувањето, 37 наставници кои реализираат настава во основните училишта секогаш практикуваат рефлексија во акција.

Хи-квадрат статистиката χ^2 е пресметана како сума на квадратите на разликите помеѓу добиените и очекуваните фреквенции, делено со очекуваните фреквенции. Степени на слобода (df) се пресметани како производ на бројот на категории за „Училиште" (2) и „Практикување на рефлексија во акција" (4), двата множители намалени за 1: df = (2 - 1) · (4 - 1) = 3. Критични вредности на хи-квадрат се: За α = 0,05, критичната вредност на хи-квадрат со 3 степени на слобода е 7,81. За α = 0,01, критичната вредност на хи-квадрат со 3 степени на слобода е 11,34. Добиената хи-квадрат статистика χ^2= 47,46 е значително поголема од критичните вредности за двете нивоа на значајност (7,81 и 11,34) со степени на слобода 3.

Ова значи дека можеме да ја отфрлиме нултата хипотеза (H_0) - дека нема статистички значајна врска помеѓу „Училиште" и „Практикување на рефлексија во акција".

Значи, има статистички значајна врска помеѓу овие две променливи. Врската може да биде објаснета со тоа дека начинот на практикување на рефлексија во акција зависи од типот на училиште кој вообичаено завршуваат учесниците.

ПРЕПОРАКИ ЗА НАСТАВНИЦИТЕ

Рефлексијата е важен алат за развивање и подобрување на наставничката практика. Еве неколку препораки за наставниците за успешна саморефлексија на својата работа во училницата:

1. **Планирајте време за рефлексија**. Поставете редовен временски период за саморефлексија, како на пример, на крајот на секој ден, недела, или модул. Ова ќе ви помогне да го вградите процесот на саморефлексија во вашата училишна практика.
2. **Водете дневник или записи.** Запишувајте ги вашите размислувања, идеи и рефлексии во дневник. Ова ви овозможува да го следите вашиот напредок и да ја прегледувате вашата работа со времето.
3. **Прашувајте се сами**. Поставете си прашања за вашата наставничка практика. На пример, „Како можам да ја подобрам интеракцијата со учениците?" или "Кои методи на подучување се ефикасни?" Прашувањето ќе ви помогне да размислите длабоко за вашата работа.
4. **Анализирајте ги ученичките резултати**. Анализирајте ги ученичките постигнувања и реакции. Размислете за тоа како вашиите методи, структура на часот и материјали влијаат на учениците.
5. **Преземете активности за подобрување.** Врз основа на вашите рефлексии, преземете конкретни активности за подобрување. Планирајте и изведете иновативни методи, пристапи или обуки за да го подобрите својот стил на работа.
6. **Соработувајте со колеги**. Разговарајте со други наставници и споделете ваши искуства и идеи за саморефлексија. Може да научите многу од другите и да добиете различни перспективи.
7. **Бидете отворени за фидбек**. Поставете се во позиција да прифатите фидбек од учениците, родителите и колегите. Фидбекот може да ви помогне да ја усовршите вашата наставничка практика.
8. **Направете целосна рефлексија**. Вклучете ги сите аспекти на вашата наставничка практика во саморефлексијата, вклучувајќи ги и организацијата на часот, ресурсите и начините на оценување.

Рефлексијата е непрекинат процес, кој може да ви помогне да се подобри вашата наставничка практика и да добиете подобри резултати со вашите ученици. Со активен и систематски пристап кон саморефлексијата, можете да станете подобар наставник и да подобрите учењето на учениците.

ЗАКЛУЧОК

„Ние не учиме од искуство, учиме од размислување за искуството“.
Џон Дјуи

1. Континуираната практика на рефлексија од страна на наставниците во рамките на училницата е суштински елемент за градење на рефлективна култура во училиштето. Оваа култура на рефлексија ги поттикнува наставниците да го преценуваат својот начин на работа, да го анализираат своето учење и да ги подобруваат своите методи. Како резултат, училиштата стануваат простори каде наставниците се отворени за усовршување и иновации, а ова има позитивен ефект на учениците и целокупната учебна средина.

2. Подготвката на студентите на универзитетите за наставници за важноста на рефлексијата во наставната практика е од клучно значење. Студентите треба да ги разберат предностите на рефлексијата и како да ја вградат во својата наставна практика. Образованието на идните наставници треба да вклучи аспекти на рефлексија, за да ги подготви за успешна кариера во образованието.

3. За успешната имплементација на рефлексијата во наставната практика, есенцијално е да се има цел, да се избере соодветна стратегија за собирање на податоци за рефлексија и да се направи детална анализа на собраните податоци. Самото знаење на целите, систематска анализа и донесување на заклучоци ќе овозможат на наставниците да препознаат области за подобрување и да разработат конкретни активности за подобрување во својата наставна практика. Ова е процес кој им помага на наставниците да станат поефикасни и да го подобрат квалитетот на образованието за учениците.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. L. Costa and B. Kallick “Learning Through Reflection” in *Learning and Leading with Habits of Mind*, ASCD, 2008

[2] mk.eferrit.com | *Важноста на рефлексијата на наставниците*, https://mk.eferrit.com/%D0%B2%D0%B0%D0%B6%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0

%B0-%D0%BD%D0%B0-
%D1%80%D0%B5%D1%84%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B8%D1%98%D0% B0-%D0%BD%D0%B0/

[3] B. Jacoby, "Assessment of Service-Learning" in Service-Learning Essentials, Jossey-Bass (Ideas on how to grade reflection), 2014

[4] M. Holly, Reflection Ideas for The Classroom https://www.hollyclark.org/2020/05/10/reflection-ideas-for-the-classroom/

[5] D. Miller, 8 Components of a Reflective Classroom https://facingtoday.facinghistory.org/8-components-of-a-reflective-classroom 2015

[6] P. H. Nguyen, Class Reflection Activities to Close Out a Tough Year, https://www.edutopia.org/article/class-reflection-activities-close-out-tough-year, 2021

[7] www.cla.purdue.edu | The Purpose of Reflection https://www.cla.purdue.edu/academic/english/icap/assessment/purpose.html

[8] www.formacionyestudios.com | Важноста на рефлексијата на наставникот, https://www.formacionyestudios.com/mk/la-importancia-de-la-reflexion-del-maestro.html

[9] M. Hibajene, Shandomo, *The Role of Critical Reflection* in Teacher Education, School-University Partnerships, https://eric.ed.gov/?id=EJ915885 2001

[10] K. B. Yancey, *Reflection in the Writing Classroom*, Utah State University Press, 1998

1 Биро за развој на образованието
ПО Прилеп- Битола, Р С Македонија
e-mail: lidijakondinska@bro.gov.mk

2 Биро за развој на образованието
ПО Штип, Р С Македонија
e-mail: danielatacevska@bro.gov.mk

3 ОУ „ Даме Груев“
Битола, Р С Македонија
e-mail: sristovska@hotmail.com

4 СОУ Втора гимназија „ 7 Март“
Тетово, Р С Македонија
e-mail: rizai.miqerem@gmail.com

РЕШАВАЊЕ НА РЕАЛИСТИЧНИ ЗАДАЧИ СО ПОМОШ НА МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ КАЈ УЧЕНИЦИТЕ ОД ЧЕТВРТО ОДДЕЛЕНИЕ

Валентина Кузманоска [1]

Билјана Шуминоска [1]

1. ВОВЕД

Математиката е богата и интересна дисциплина за истражување. Таа обезбедува мноштво идеи и алатки, кои се ефикасни во решавање на проблемите кои се јавуваат во други области. Со познавање на одредени знаења и вештини се наоѓа начин за решавање на проблемски ситуации. Идеите, знаењата и вештините треба да се поттикнат од најмала возраст кај учениците.

Математичкото моделирање е активност која се појавува како склоп на низа размислувања при решавање на реалистични задачи кај учениците од пониските одделенија во основното образование. Поимот математичко моделирање не беше толку често спомнуван во наставата по математика до пред неколку години. Што почесто го спомнуваме, тоа почесто се запрашуваме, дали е тоа нов поим? Одговорот е не.

Трудот се состои од четири дела: теоретски пристап кон проблемот, методологија на истражување, анализа и интерпретација на резултатите и заклучок. Поконкретно анализите од истражувањето се состојат во решавање на една задача на Ферми и една класична проблемска задача од страна на сите ученици од четврто одделение од Основно училиште „Св.Климент Охридски" од Охрид.

Математичкото моделирање постои од самото постоење на секоја проблемска задача. Може да кажеме, се појавува во тој момент кога ние наставниците им даваме целосна слобода на учениците при решавање на реалистични задачи, кога повеќе ги вреднуваме креативноста, критичкото размислување, способноста и умеењето да се реши проблемот. Се појавува тогаш кога ученикот ја одбегнува претходно „покажаната" постапка на добивање на решението. Процесот на математичко моделирање, чиј краен производ е математичкиот модел, не е строго одреден, ниту линеарен, туку е цикличен. При овој процес се повторуваат, можеби и по неколку пати, основните чекори:

- препознавање на проблемот,
- формирање на математичкиот модел,
- решавање на моделот,
- интерпретација на моделот,
- проверка на моделот.

Математичкиот модел кој се применува при математичкото моделирање зависи од прашањата кои се поставуваат при разгледување на реалистичната задача, но зависи и од одговорот кој се дава на тие прашања.

Што се однесува до откривањето на способностите на учениците да моделираат, тоа може да се постигне со низа совети, препораки и барања кои се поставени од страна на наставникот за време на часот. Откривањето на математичките способности може да се постигне со правилна оценка на следниве барања:

- самостојно и лесно усвојување на математичките знаења,
- оригиналност при решавањето математички задачи,
- умеења за составување математички модели,
- решавање нестандардни задачи и наоѓање нестандардни решенија на стандардни задачи,

За формирање и развивање способности кај ученикот при усвојување методи и алгоритми за примена на знаења и решавање проблеми, треба да се гледа како на една од најважните дидактички технологии за развивање на севкупните способности на ученикот. Токму затоа, паралелно со знаењата, наставната програма за математика треба да содржи и опис на специфични умеења и методи на мислење и работа, валидни за соодветната наставна целина, за формирање интереси кај учениците и за развој на нивните способности. Притоа, неопходна е и обука на наставниот кадар кој вешто ќе ги внесе учениците во самиот процес на математичко моделирање.

Според изнесеното во овој труд можеме да заклучиме дека само наставата, во која се посветува големо внимание на процесот на математичко моделирање се грижи колку ученикот самостојно размислува и формира модел за решавање на проблемските задачи, со што му овозможува на ученикот вистински развој во својот образовен процес.

Во долгогодишното работење со ученици, согледавме дека уште од најрани години кај секој ученик, самото учење математика, се базира на вежбање на основните математички поими и правила. Но честопати, посебно во традиционалната математика, како единствен наставен пристап се смета меморирањето и вежбањето на постапки, правила, начини и процедури. Во наставата по математика која заговара математичко размислување на повисоко ниво, не се препорачува одвојување големо време за учење напамет, за истото учење, за кратко време да биде заборавено. Учениците може да ги научат фактите многу подобро преку нивна секојдневна употреба во интересни ситуации (измислени или реални, проблеми од секојдневниот живот).

Денес може лесно да пресметате колку парчиња пуканки се потребни за да се наполни една спортска сала, исто така може да се одреди колку луѓе има сега на плоштадот во Охрид итн. Според еден познат физичар и мајстор за претпоставки, секој човек може да процени што било за 60 секунди. Можете да го најдете одговорот на најнеобичното прашање. На пример, колкава е побарувачката за авто клучеви на пазарот во Кина или колку топчиња за голф ќе наполнат еден училишен автобус.

Може да потврдиме дека со методот кој се разгледува, се наоѓа одговор на некои нестандардни задачи.

1. МЕТОДОТ КОЈ ЌЕ ГО КОРИСТИТЕ ПРИ РЕШАВАЊЕ НА РЕАЛИСТИЧНИ ПРОБЛЕМИ

1.1 НАУЧНИКОТ КОЈ ГО ВОВЕЛ ОВОЈ МЕТОД

Задачите на Ферми, името го добиле во чест на Нобеловецот Енрико Ферми (29 септември 1901-28 ноември 1954). Тој бил италијански физичар кој направил многу откритија во нуклеарна физика и квантната механика. Како еден од најголемите научници на XX век, бил познат по тоа што бил необичен во својата работа, одличен експерименталист, извонреден теоретичар и бил многу добар во наоѓање едноставни решенија за тешки проблеми.

Суштината на неговиот метод за решавање на ваквите проблеми е да изврши брзи приближни пресметки за многу кратко време, без да има точни податоци. Неговиот начин на пресметување не е да прави нови мерења, туку да работи со она што е веќе познато за проблемот.

Методот се заснова на верувањето дека целото знаење што го имаме е меѓусебно поврзано и всушност не постои прашање за кое воопшто не би имале никакви информации. Затоа, имајќи само неколку факти и имајќи способност да размислувате логично, можете да го најдете одговорот на секој, дури и на прв поглед, целосно нерешлив проблем.

1.2. КАКО ФУНКЦИОНИРА ВО ПРАКСА ОВОЈ МЕТОД?

Колку штимери за пијано има во Чикаго? - е најпознатото прашање кое Ферми често им го поставувал на своите ученици. На почетокот се чини дека е невозможно да се одговори. Но, методот Ферми не подразбира добивање точен резултат. Најмногу што може и треба да се направи е да се даде разумна проценка заснована на рационални претпоставки. Односно, наведете приближна вредност или опсег на вредности, притоа означувајќи ги можните грешки и отстапувања.

Еве го решението за проблемот погоре:

Прашање 1: Колку луѓе живеат во Чикаго? Ние го проценуваме населението на Чикаго. Тоа е околу 2,7 милиони луѓе, ако знаеме даваме одговор, ако не можеме да пребараме на интернет.

Прашање 2: Колку семејства живеат во градот? За да го направите ова, приближно претпоставете дека секое семејство има 2-3 луѓе. Потоа целото население го делиме во просек со 2,5 и како резултат добиваме околу милион семејства.

Прашање 3: Како знаеш колку од нив имаат пијано? Ова се најтешките бројки, невозможно е точно да се одредат без истражување. Затоа, останува само да се претпостави, водени од здравиот разум и животното искуство. Да земеме пет проценти од сите семејства - тоа ќе биде околу 50.000.

Прашање 4: На колку време се штима едно пијано? Да речеме дека просечно едно пијано се штима еднаш годишно - излегува дека во Чикаго годишно треба да се сервисираат 50.000 инструменти.

Прашање 5: Колку дена годишно работи штимерот? Од 365 дена, одземете 52 саботи, 52 недели и неколку празнични денови. Потребни се околу 250 работни дена.

Прашање 6: Колку семејства може да посети штимерот во текот на работното време во еден ден? Во текот на денот, штимерот може да дојде до четири семејства - ова е исто така приближна бројка. Тоа зависи од времето поминато на патот, и секој конкретен случај. Но, тоа ни кажува дека едно лице може да направи околу 1.000 прилагодувања годишно: помноживме четири семејства дневно со 250 работни дена. Поделувајќи 50.000 прилагодувања годишно со 1.000 прилагодувања направени од едно лице во таа година, добиваме 50 штимери во Чикаго.

Јасно е дека на крајот имаме приближна бројка. Но, ова го стеснува интервалот на вредности во кои треба да се работи. Според Ферми, прво треба да се измерат, истражат вредности што изгледаат најнеизвесни (како на пример колку семејства можат да имаат пијано дома) за да се добијат попрецизни податоци.

Не постои единствен алгоритам за решавање на сите Ферми проблеми, но учениците најпрвин треба да ги следат следниве правила:

- Дури и ако се чини дека апсолутно не ја разбираш темата, верувај дека само треба да најдеш свој пристап. Веројатно имаш информации кои некако ќе те доближат до точниот одговор.
- Користи го своето постоечко знаење од различни области за да најдеш свој алгоритам за решение.
- Направи ги сите потребни проценки и прелиминарни пресметки.
- Наведи конкретен одговор.
- Какви отстапувања од реалниот резултат може да се добијат и зошто?
- Не прибегнувајте кон помош на извори од трети страни.
- Не плашете се да правите грешки.

Најчесто при решавањето на задачата на Ферми се минуваат шест чекори:

1. разбирање,
2. нематематичко погодување,
3. математичко моделирање,
4. променливи и формули,
5. собирање повеќе податоци и
6. заклучоци. [2]

Токму со вакви математички проблеми се занимаваа нашите ученици од четврто одделение во нашето училиште.

2. ИСТРАЖУВАЊЕ 1: ЗАДАЧА НА ФЕРМИ „МОЈАТА УЧИЛНИЦА”

2.1. МОДЕЛ

Моделот во чија рамка се одвиваше ова истражување е организиран на следниот начин:

Предмет: моделирање, процена, мерење, алгебарски израз, формули, решавање на проблемот

Цели: Идентификација, оценка и примена на стратегии за моделирање; Изнаоѓање на многу решенија за одреден проблем; Пристапување на проблемот од различни точки на гледање; Донесување одлука; Размена на математички идеи усно и во писмена форма; Работа со различни алатки за мерење; Формирање и користење формули за решавање на проблемот; Користење на интернет алатките за пребарување, за наоѓање информации (од страна на наставникот олеснувач); Усовршување на вештините за проценка и доверба.

Предуслови: Основни вештини за мерење; Познавање на основните математичките операции: собирање, одземање, множење и делење и нивна примена; Познавања на дропки или децимални броеви.

Методологија:

Истражувањето се реализираше во основното училиште „Св. Климент Охридски" во Охрид, во мај 2023 година, каде беа набљудувани ученици од четврто одделение и нивниот одделенски наставник. Притоа, ниту учениците, ниту наставникот немаа искуство во математичко моделирање. Поголемиот дел од инструкциите кои беа реализирани во текот на истражувањето беа од типот на изложување. На секоја група ученици им беше даден лист со задача и инструкции за начин на решавање.

Задачата гласеше:

„Колку ученици може да застанат во твојата училница?"

Време за подготовка: Одделенскиот наставник претходниот час кратко ги воведува учениците во начинот на работа. Пред да почнат учениците со работа, имаат 5 минути за размислување и разгледување на зададената задача.

Време за работа: Од 1 час до час и 20 минути.

Материјали: Хартија, молив или пенкало и компјутер или мобилен телефон (кај наставникот олеснувач).

На празен лист хартија, учениците го запишаа името на својата група и имињата на членовите. Ги запишуваа одговорите на секое задолжение на листот хартија, дадени во прилог на прашањето.

Јас како одделенски наставник, за моделирањето на проблемот, имав подготвителен час, бев запознаена со олеснувачките аспекти при решавање на задачата на Ферми преку скица на инструкции за извлекување, подржување и проширување на одговорите на учениците кои ќе ги решаваат задачите на Ферми. Скицата на инструкции е конструирана врз основа на скицата Fraivillig, [3], за инструкции за извлекување, подржување и проширување на одговорите на учениците.

Во истражувањето беа формирани две групи од по 8 ученици од четврто одделение од основното училиште „Св. Климент Охридски", Охрид. Двете групи работеа во ист временски континуиран период од еден час и 20 минути. Критериум за учество во групата беше секој ученик да се чувствува слободно, да соработува, да дискутира со другите ученици во својата група и двете групи да бидат хетерогени во однос на математичките способности на учениците. И на двете групи им беа зададена две задачи на Ферми. Решавањето задачи од страна на учениците се одвиваше во два дена. Првиот ден ја решаваа едната задача, двете групи истовремено во различен дел од училницата, независно едната група од другата. Вториот ден на истиот начин ја решаваа втората задача.

Податоците кои се анализирани во ова истражување се: пишаниот материјал на учениците од соодветните групи и забелешките на одделенскиот наставник, односно јас заедно со мојот соработник м-р Билјана Шуминоска, која веќе имаше работено на вакви истражуавања со ученици од средното училиште. Работата на учениците се одвиваше согласно моделот за решавање на задачата, кој се состои од шест чекори зададени на двете групи заедно со задача на Ферми. Овие шест чекори: Разбирање, Нематематичко погодување, Математичко моделирање, Променливи и формули, Собирање повеќе податоци и Заклучоци, се синоним на четирите фази на моделирање на задачата на Ферми: Опис, Проценки, Пресметувања и Валидизација. Врз база на овие фази ја направивме анализата на податоци.

Од големиот број заклучоци на двете групи ученици, при решавањето на задачите на Ферми се презентирани онолку колку ни налагаше просторот за ова истражување, низ основните четири фази на математичко моделирање. Забележуваме дека во текот на истражувањето прислушнувањето меѓу двете групи е елиминирано бидејќи се оддалечени на доволно растојание.

Првата група е означена со Група 1, а втората група со Група 2. Учениците во првата група се А1, А2, А3,А4,А5,А6,А7 и А8 а учениците од втората група се означени со Б1, Б2, Б3,Б4,Б5,Б6,Б7 и Б8.

<u>Фаза 1: **Опис**</u>

Чекори: Разбирање, нематематичко погодување.

Учениците во двете групи го читаа прашањето, разговараа и без никакви пресметки првата група даде претпоставка - погодување дека 60 ученици можат да застанат во училницата, а додека втората група даде претпоставка - погодување дека можат 70 ученици. Притоа започнаа со разбирање на прашањето и поставување на помали проблеми кои им беа неопходни за да го решат зададениот проблем.

Фаза 2: **Проценки**

Чекори: Дел од одговорот со математичко моделирање и дел од чекорот за собирање повеќе податоци.

Група 1

А1: *Дали училницата да биде празна?*

А2: *Да, се сетив. Ќе имаме две решенија. Едно кога училницата е празна и уште едно кога ќе го има овој инвентар што сега го имаме во нашава училница?*

А3: *Чекајте прво треба проценка да дадеме. Но мора да дадеме проценка за двата случаи, кога училницата е празна и кога не е празна.*

Во овој момент сите ученици се развртеа во училницата и без пресметки рекоа дека ако е празна ќе можат да застанат 60 ученици а ако е полна ќе можат 30 ученици.

А4: *За побрзо да го решиме проблемов, ќе се поделиме во две групи. Едните ќе размислуваат и решаваат ако училницава е празна, а другите ако е полна.*

Група 2

Б1: *Ајде да измериме колку е долга училницата, а колку широка?*

Б2: *Не можеме преку димензиите на плочките, бидејќи должината и ширината на училницава не завршува со цела плочка, некаде со половина, некаде завршува со третина од плочката.*

Останатите ученици мерат со метро. Другите наизменично се редеа по должина и ширина.

Фаза 3: **Пресметувања**

Чекори: Променливи и формули.

Група 1

А5 и А6: *Ние цртаме правоаголник, нашата училница има правоаголна форма.*

А7: *Подот е поплочен со плочки. Сега ќе измерам димензии на плочкава.*

Првите А1,А2,А3,А4 ученици решаваа кога училницата е полна, а другите А5,А6,А7,А8 кога училницата е празна.

Кога училницата е празна : А8 и А7 цртаат цртеж.

Учениците ги измерија димензиите на една плочка. Плочката имаше квадратна форма со страна 36 cm. Учениците А1 и А3 застанаа со своите стапала внатре во просторот на плочката. Констатираа дека двајца ученици можат да застанат во една плочка.

А2: *Ајде да изброиме колку вкупно плочки се? Сега е лесно.*

А4: *Но не можиме сите да ги броиме, поклопени се со инвентарот. Значи да изброиме колку има плочки по должина а колку по ширина на училницата.*

А5: *Да го помножиме бројот на плочки по должина со бројот на плочки по ширина.*

Кога училницата не е празна :

A5: *Ние да пресметаме која е плоштината на секое столче и секоја маса. Треба и катедрата. Зафаќаат простор и радијаторите крај прозорецот.*

Група 2

Оваа група почна со размислување да воведат симболи (променливи), бројот на ученици го обележаа со У, должината со a додека ширината со b. Со чекорење ја измерија должината и ширината. Се договорија дека должината a има 7 чекори, додека ширината има 4 чекори. Значи:

$a = 7$ чекори,

$b = 4$ чекори.

У1 е број на ученици во еден чекор, Ч е вкупниот број на чекори па

У=Ч $\cdot$ У1

Група 1

A1: Плочката има квадратна форма со страна $a = 36$ *cm.*

A2: Плоштина ќе ја пресметаме ако видиме колку квадрати од 1cm^2 *има во таа плочка со димензија 36* cm.

На А1 и А2 не им текнува формулата за плоштина на квадрат, па нацртаа квадрат со димензии 36 cm, паралелно хоризонтално и вертикално повлекоа паралелни линии и квадратот го поделија на $36 \cdot 36 = 1296$ квадрати секој со плоштина 1cm^2, добија $1296\,\text{cm}^2$.

Група 2

$a = 7$ чекори,

$b = 4$ чекори.

Б5: *Во еден чекор можат да застанат тројца ученици.*

У1 е број на ученици во еден чекор, значи У1=3.

Б1 и Б2: *Од колку чекори е составена училницата?*

Помножи ја 7 и 4 добија 28 чекори има цела училница.

Ч е вкупниот број на чекори.

Ч=28

У=Ч $\cdot$ У1

У=28 $\cdot$ 3=84

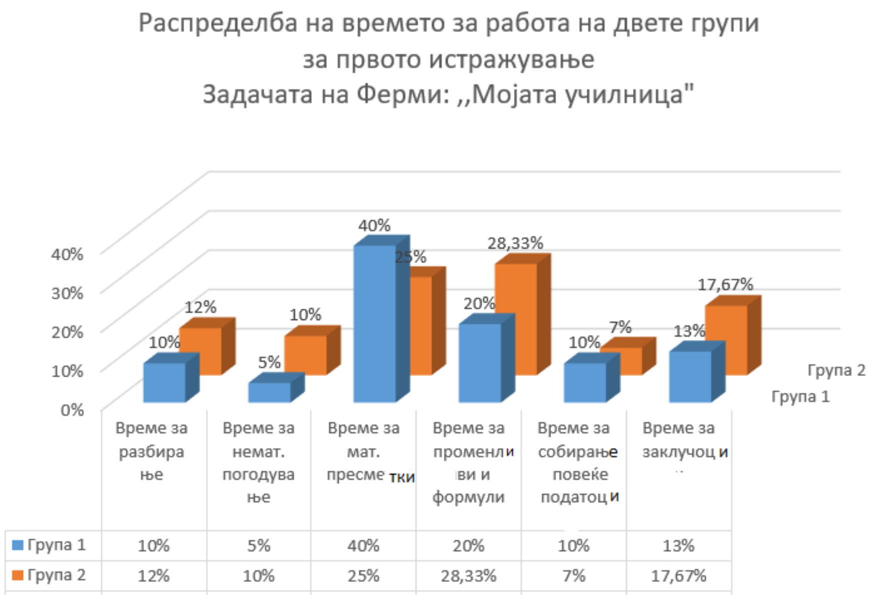
Одговорот на Група 2 е дека во нивната училница можат да застанат 84 ученици.

Оваа група беше поделена на две групи едните да пресметуваат кога училницата е празна а другите кога училницата е полна со инвентар.

<u>Фаза 4: Валидизација</u>

Чекори: Собирање повеќе податоци и заклучоци.

Учениците од двете групи во оваа фаза поразговараа со одделенскиот наставник, се направи еден вид проверка и донесоа конечен заклучок. Во ова истражување пребарувањето на интернет можеше да го направи само одделенскиот наставник.



Слика 1. Распределба на времето за работа на двете групи за првото истражување

2. ИСТРАЖУВАЊЕ 2:

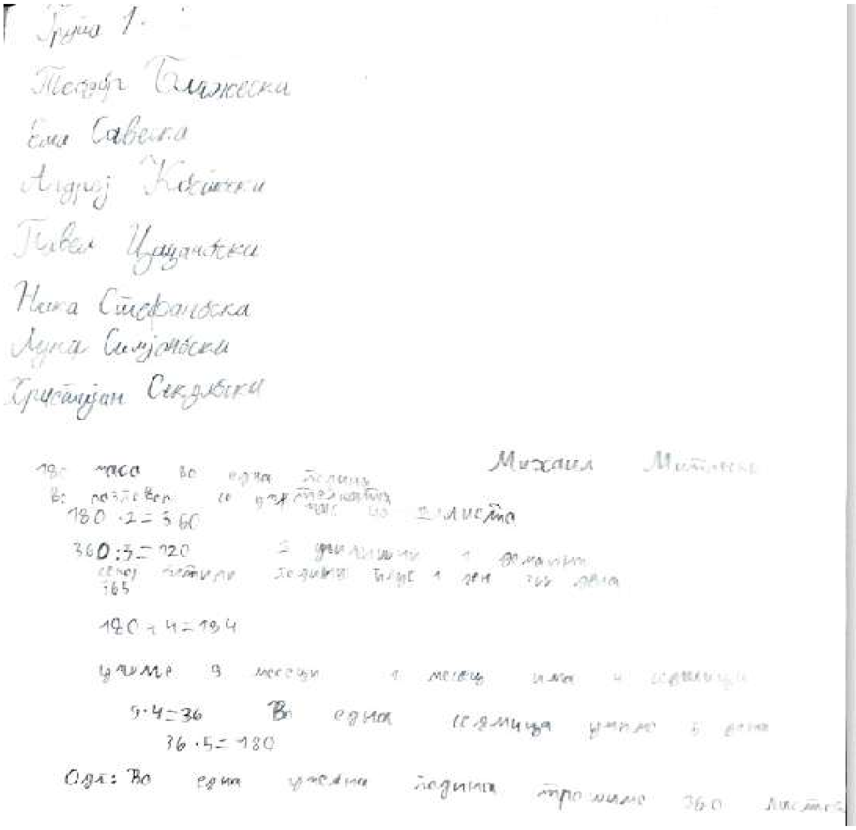
3.1. Задача на Ферми ,, Тетратката по математика"

Задачата гласи: **„Колку листови од тетратката по математика се користат во текот на една учебна година? "**

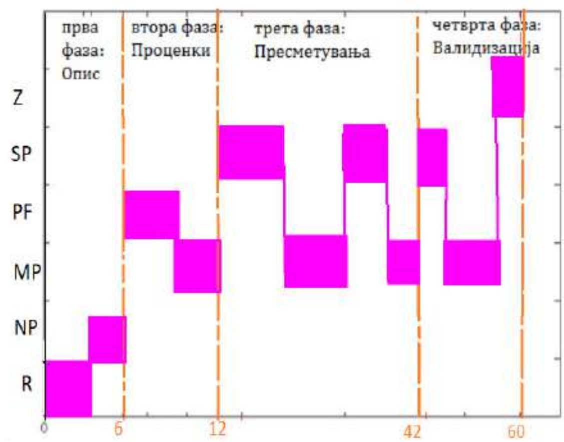
Условите на оваа задача се исти како претходната задача. Ќе се опишат само фазите на решавање преку шесте чекори за решавање на Фермиевите проблеми.

Првата група добила решение дека трошат 360 листови во годината, а втората група 720 листови.

Во прилог се слики од решенијата на двете групи.

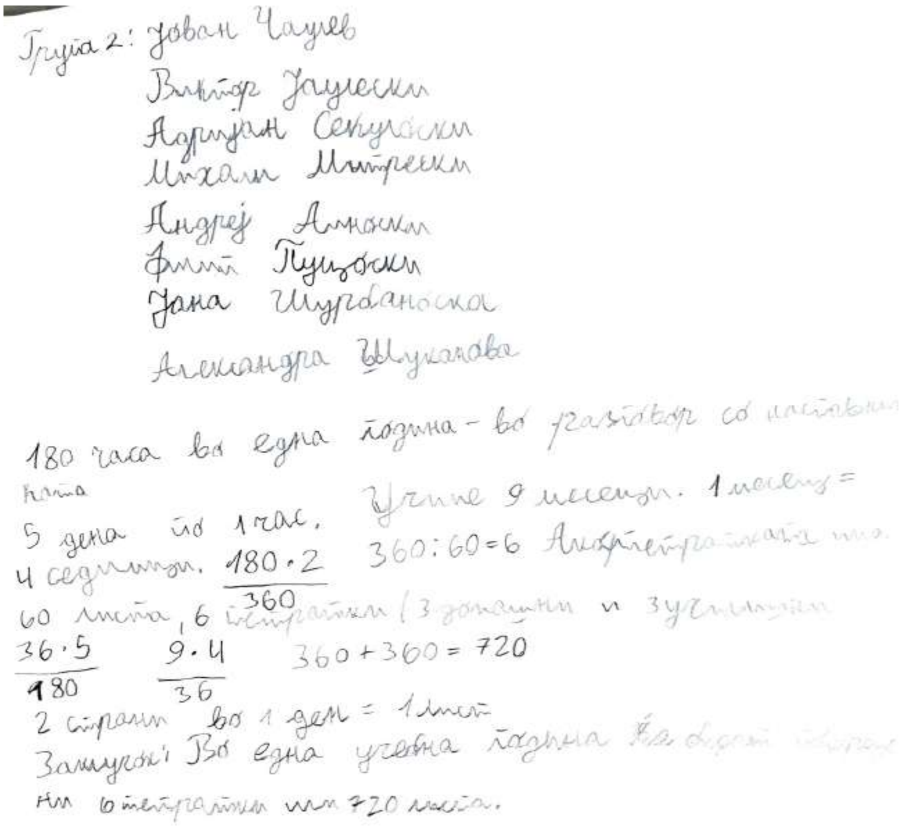

Група 1
Михаил
180 · 2 = 360
360 : 3 = 120
180 + 4 = 184
9 · 4 = 36
36 · 5 = 180

Слика 2. Решението на задачата од првата група



Дијаграм на распределбата на времето за работа на чекорите во моделот: разбирање (R), нематематичко погодување (NP) математички пресметки (MP), променливи и формули (PF), собирање повеќе податоци (SP) и заклучоци (Z) на првата група.

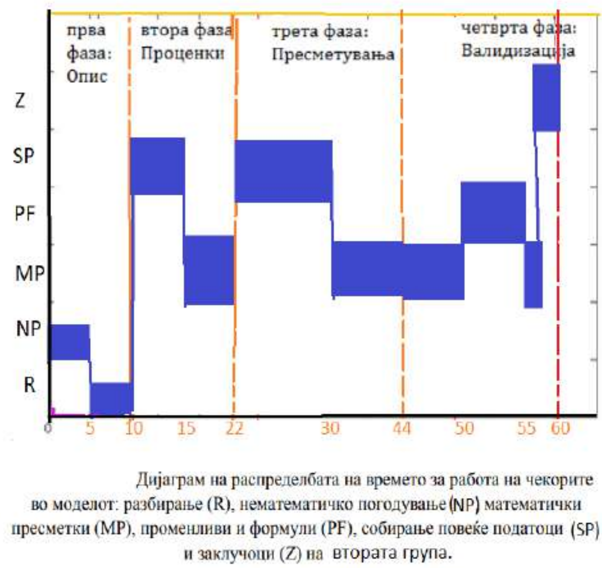
Слика 3. Дијаграм на распределба на времето за работа на чекорите во моделот



Група 2: Јован Чаушев
Виктор Јаулески
Адријан Секулоски
Михаил Митрески
Андреј Алноски
Филип Пуцоски
Јана Шурдановска
Александра Шушканова

180 часа во една година – во разговор со наставни-
ката
5 дена по 1 час. Учиме 9 месеци. 1 месец =
4 седмици. 180 · 2   360 : 60 = 6 Амфитеатралната ...
360
60 листа, 6 тетратки (3 домашни и 3 училишни)
36 · 5   9 · 4   360 + 360 = 720
180   36
2 страни во 1 ден = 1 лист
Заклучок: Во една учебна година ќе бидат потрошени
6 тетратки или 720 листа.

Слика 4. Решението на задачата од втората група



Слика 5. Дијаграм на распределба на времето за работа на чекорите во моделот

4. ЗАКЛУЧОК

4.1. ЗОШТО ВООПШТО Е ПОТРЕБЕН ОВОЈ МЕТОД?

Методот Ферми е применлив во случаи кога треба брзо да дадете приближен одговор и дури потоа да одлучиме дали е препорачливо да се извршат дополнителни пресметки за да се дојде до точни податоци. Со негова помош, можете да ги побиете добиените информации, брзо да донесете одлука, да разберете во која насока да се движите и кои податоци ни се доволни. Најважната работа што ни ја дава методот Ферми е дека подобро е да добиеме приближни резултати отколку да немаме никакво сознание за проблемот кој е пред нас.

На пример, бизнисмен сака да воведе нов производ на пазарот, но се сомнева дали ќе има побарувачка за него. Да се спроведе скапо истражување? Но, што ако парите потрошени за тоа се потрошени, а никому не му треба производот? Како резултат на тоа, едно лице може да се двоуми долго време, да губи време, па дури и да ја напушти својата идеја, плашејќи се од непознатото.

Користејќи го методот Ферми, еден претприемач може самостојно да ги процени, на пример, промените во куповната моќ, популарните трендови, да спроведе брза анализа на потребите на населението и да направи груби пресметки кои правилно ќе го насочат пред да преземе некои покрупни чекори кои ќе бидат безвредни. Врз основа на приближните резултати, тој веќе ќе може да одлучи дали вреди да се инвестира во понатамошни истражувања. И на долг рок, дури и мало намалување на неизвесноста може да направи или да заштеди милиони за една компанија.

Способноста за користење на методот може да биде корисна и за оние луѓе кои не мора да носат тешки одлуки поврзани со високи трошоци и ризици. За сите овие предизвици во животот човекот мора да се едуцира од најрана возраст. При решавање на проблемите на Ферми, учениците се едуцираат како своето знаење, стекнато од другите предмети да го применат во пракса, како брзо да дојдат до начини за решавање на секој животен проблем. Современото образование често нуди знаење кое е општо или апстрактно. Учениците често се способни да решаваат сложени типични проблеми со извршување на многу операции, а кога станува збор за решавање на елементарен, но нестандарден проблем, се ставаат во размислување како да го решат тој проблем.

Бидејќи одговорот на проблемите на Ферми често е од сомнителен практичен интерес, главниот акцент е ставен на методот на решение. Затоа, проблемите на Ферми ја нашле својата примена во различни интервјуа во големи компании, натпревари, интелектуални игри, олимпијади по физика или компјутерски науки. Суштината на користењето на задачите е да се види способноста на еден ученик да најде нестандардни решенија.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Шуминоска, *Математичко моделирање во наставата по математика при решавање на реалистични задачи,* магистерска работа, Институт за математика, Природно-математички факултет, Универзитет „Св. Кирил и Методиј", Скопје, 2016(123).

[2] J. Fraivillig, *Strategies for Advanced Children's Modelling, Applications and Applied Problem Solving - Teaching Mathematics in a Real Context*, Chichester Mathematical Thinking, National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

1 ООУ „Св.Климент Охридски",
Охрид, Р. Македонија
e-mail: kuzmanoskav@yahoo.com, abakus.edukacija@yahoo.com