РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД LXVIII ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2025
07.03.2025

Прва година

1. Во една фабрика, во текот на еден месец, се произведуваат три модели на бироа: A, B и C, за кои се потребни само две суровини: дрво и челик. Притоа, на месечно ниво:

- Фабриката мора да произведе најмалку 300 бироа од модел A, најмалку 200 бироа од модел B и најмалку 400 бироа од модел C, но во однос 3 : 2 : 5, соодветно.
- Времето потребно за производство на едно биро од моделот C е два пати поголемо од времето за производство на биро од моделот B, но и три пати поголемо од времето за производство на биро од модел A. Фабриката има време да произведе најмногу 1400 бироа од моделот C.
- За производство на едно биро од модел A потребни се 12 kg дрво и 2 kg челик, за биро од модел B потребни се 17 kg дрво и 2 kg челик и за биро од модел C потребни се 20 kg дрво и 4 kg челик. Фабриката располага со 17000 kg дрво и 6000 kg челик.
- Приходот од едно биро од моделот A, B и C, е 1400, 2100 и 2000 денари соодветно.

Целта на фабриката е да произведе бироа од трите модели така да оствари најголем приход при зададените услови. По колку бироа треба да произведе од секој модел? Колкав е вкупниот приход?

Решение. Нека бројот на произведени единици од моделот A, B и C на месечно ниво, соодветно е x, y и z.

Почнувајќи од условот $x:y:z=2:3:5$, следува $x=3k, y=2k, z=5k$. Оттука, може да ги изразиме сите три броја на производи преку една променлива. Од $z=5k$ добиваме $k=\frac{1}{5}z$ и $x=\frac{3}{5}z, y=\frac{2}{5}z$.

Заради условот за најмал број произведени бироа од секој тип треба да важат следните неравенства $x\geq 300, y\geq 200, z\geq 400,$ односно изразувајќи ги сите преку z: $\frac{3}{5}z\geq 300, \frac{2}{5}z\geq 200, z\geq 400$. Значи $z\geq 500,\ z\geq 500,\ z\geq 400$, односно за да се сите услови задоволени мора $z\geq 500$.

Нека t е времето потребно за производство на единица од моделот C, тогаш $\frac{t}{2}$ е времето потребно за производство на единица од моделот B и $\frac{t}{3}$ е времето потребно за производство на единица од моделот A. Тогаш, бидејќи целата работна сила може да произведува 1400 единици од моделот C на месечно ниво, за вкупното време потрошено за производство следува дека $\frac{t}{3}x+\frac{t}{2}y+tz\leq 1400t$.

Оттука, $2x+3y+6z\leq 8400$, или $\frac{6}{5}z+\frac{6}{5}z+6z\leq 8400$. Добиваме дека $42z\leq 42000$ или $z\leq 1000$.

Достапни се 17000 килограми дрво, а моделите A, B и C бараат 12, 17 и 20 килограми соодветно, т.е. $12x+17y+20z\leq 17000$, па заменувајќи преку z, добиваме $12\cdot\frac{3}{5}z+17\cdot\frac{2}{5}z+\ +20z\leq 17000$, т.е. $34z\leq 17000$ или $z\leq 500$. Заради погоре добиените ограничувања за бројот на бироа од тип C ($z\geq 500,\ z\leq 1000$ и $z\leq 500$), единствена можна вредност за z е 500, но мора да провериме дали за таа вредност ќе имаме доволно железо на располагање.

Достапни се 6000 килограми железо, а моделите A, B и C бараат 2, 2 и 4 килограми соодветно, т.е. $2x+2y+4z\leq 6000$. Заменувајќи преку z, добиваме $2\cdot\frac{3}{5}z+2\cdot\frac{2}{5}z+4z\leq 6000$ т.е. $6z\leq 6000$ или $z\leq 1000$.

Конечно, вредноста $z = 500$ е единствената можна вредност за да се исполнети сите услови и воедно е и најповолната вредност за бројот на производени единици од моделот C. Оттука го наоѓаме и бројот на бироа од моделите A и B: $x = \frac{3}{5} \cdot 500 = 300$ и $y = \frac{2}{5} \cdot 500 = 200$.

Вкупниот приход изнесува $1400 \cdot 300 + 2100 \cdot 200 + 2000 \cdot 500 = 420000 + 420000 + 1000000 = 1840000$.

2. Најди ги сите природни броеви n и прости броеви p, q такви што $q > p$ и $n^2 - pq^2 = 2025$.

Решение. Да забележиме дека $2025 = 45^2$, па равенката можеме да ја трансформираме до облик

$$pq^2 = n^2 - 45^2 = (n-45)(n+45).$$

Бидејќи $n + 45 > n - 45 > 0$ и од условот дека $q > p$, каде p, q се прости броеви, имаме три можности:

- $n - 45 = 1$ и $n + 45 = pq^2$. Оттука, $n = 46$, па $pq^2 = 91 = 7 \cdot 13$. Јасно, во множеството прости броеви последната равенка нема решенија.
- $n - 45 = q$ и $n + 45 = qp$. Одземајќи ги двете равенки добиваме $90 = q(p-1)$. Прости делители на 90 се 2,3 и 5, па $q \in \{2,3,5\}$. Но, тогаш, $p - 1 \in \{45,30,18\}$ и во секој случај не може $q > p$.
- $n - 45 = p, n + 45 = q^2$. Значи $90 = q^2 - p$. Од $q > p, 90 = q^2 - p > p^2 - p = p(p-1)$. За $p \geq 11, 90 = p(p-1) \geq 11 \cdot 10 = 110$, што е контрадикција. Останува можноста $p \leq 10$, односно $p \in \{2,3,5,7\}$. Со проверка добиваме дека ниту еден случај не дава прост број q.

Конечно, не постојат природен број n и прости броеви $q > p$, такви што $n^2 - pq^2 = 2025$.

3. Нека a, b, c, d се реални броеви за кои важи $abcd = 1$ и $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Докажи дека барем два од броевите ab, ac, bc, cd, bd, ad се еднакви.

Решение 1. Од тоа што $abcd = 1$, броевите се ненулти и равенството од условот преминува во

$$a + b + c + \frac{1}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc.$$

Сведувајќи на ист именител имаме $\frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 + 1}{abc} = \frac{ab + bc + ca + a^2b^2c^2}{abc}$.

Множејќи со $abc \neq 0$, ја трансформираме равенката во облик

$$a^2b^2c^2 + ab + bc + ca = a^2bc + ab^2c + abc^2 + 1,$$

$$a^2b^2c^2 - a^2bc - abc^2 + ac - ab^2c + ab + bc - 1 = 0,$$

$$a^2bc(bc-1) - ac(bc-1) - ab(bc-1) + (bc-1) = 0,$$

$$(bc-1)(a^2bc - ac - ab + 1) = 0,$$

$$(bc-1)\big(ac(ab-1) - (ab-1)\big) = 0,$$

$$(bc-1)(ac-1)(ab-1) = 0.$$

Од последното, мора барем еден од броевите $bc - 1, ac - 1, ab - 1$ да е нула. Дополнително, од $abcd = 1$, ако $bc = 1$, мора $ad = 1 = bc$, ако $ac = 1$, мора $bd = 1 = ac$ и ако $ab = 1$, мора $cd = 1 = ab$. Значи барем два од броевите се еднакви, што требаше да се докаже.

Решение 2. Од $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ и $abcd = 1$, јасно е дека броевите се ненулти, па добиваме дека $a + b + c + d = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd}$, односно $a + b + c + d = bcd + acd + abd + abc$.

Од овде $a + b + c + d = (a+b)cd + ab(c+d) \Leftrightarrow (a+b)(1-cd) + (c+d)(1-ab) = 0$.

Бидејќи $1-cd=1-\frac{1}{ab}=-\frac{1-ab}{ab}$, последното равенство преминува во облик $-\left(a+b\right)\frac{1-ab}{ab}+\left(c+d\right)\left(1-ab\right)=0\Leftrightarrow\left(1-ab\right)\left(c+d-\frac{a+b}{ab}\right)=0$. Ги добиваме следните два случаја:

Случај 1. $1-ab=0$, односно $ab=1$, па со замена во условот $abcd=1$, добиваме дека и $cd=1$.

Случај 2. $c+d-\frac{a+b}{ab}=0\Leftrightarrow a+b=abc+abd\Leftrightarrow a\left(1-bc\right)+b\left(1-ad\right)=0$. Слично како погоре, бидејќи $1-bc=1-\frac{1}{ad}=-\frac{1-ad}{ad}$, добиваме дека

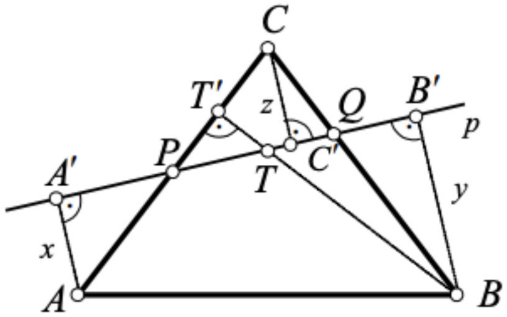
$$-a\frac{1-ad}{ad}+b\left(1-ad\right)=0\Leftrightarrow-\frac{1-ad}{d}+b\left(1-ad\right)=0\Leftrightarrow\left(1-ad\right)\left(b-\frac{1}{d}\right)=0.$$

Следува, $1-ad=0$ или $b-\frac{1}{d}=0$, односно $ad=1$ или $bd=1$. Со замена во условот $abcd=1$ за $ad=1$ добиваме дека и $bc=1$, а за $bd=1$ добиваме дека и $ac=1$.

Во секој случај добиваме дека барем два од броевите ab, ac, bc, cd, bd, ad се еднакви.

4. Низ тежиштето на рамностран триаголник минува произволна права p. Докажи дека збирот на квадратите на растојанијата од темињата на триаголникот до таа права е половина од квадратот на страната на рамностраниот триаголник.

Решение. Нека P и Q се пресечните точки на правата p со страните на триаголникот ABC, како на цртежот. Нека триаголникот има страна со должина a. Растојанијата од темињата A,B и C на триаголникот до правата p се означени со x, y и z, соодветно, а подножјата на спуштените нормали од темињата кон правата p се точките A', B' и C' соодветно. ΔABC е рамностран, па висината BT' е истовремено и тежишна линија и минува низ точката T, па T' е средина на страната AC. Тогаш $\Delta TPT'\sim\Delta APA'$ (имаат по еден прав агол и $\measuredangle TPT'=\measuredangle APA'$ како накрсни агли).



Од сличноста важи следната пропорција $\frac{x}{\overline{TT'}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{TP}}$, односно $x=\frac{\overline{AP}}{\overline{TP}}\cdot\overline{TT'}$. Слично, се воочува и дека $\Delta TPT'\sim\Delta CPC'$ и $\Delta TPT'\sim\Delta TBB'$, од каде важат и следниве пропорции: $\frac{z}{\overline{TT'}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{TP}}$ и $\frac{y}{\overline{PT'}}=\frac{\overline{TB}}{\overline{TP}}$.

Директно добиваме $y=\frac{\overline{TB}}{\overline{TP}}\cdot\overline{PT'}$ и $z=\frac{\overline{CP}}{\overline{TP}}\cdot\overline{TT'}$. Да ја означиме висината спуштена од темето B со $\overline{BT'}=h$. Од својството на тежиштето (T ја дели тежишната линија во однос 2:1), јасно е дека $\overline{BT}=\frac{2}{3}h,\overline{TT'}=\frac{1}{3}h.$ Сега, за растојанијата на темињата до правата p, од погорните релации добиваме:

$x=\frac{\overline{AP}}{\overline{TP}}\cdot\frac{1}{3}h$, $y=\frac{\overline{PT'}}{\overline{TP}}\cdot\frac{2}{3}h$ и $z=\frac{\overline{CP}}{\overline{TP}}\cdot\frac{1}{3}h.$

Останува да го пресметаме збирот на квадратите на овие растојанија:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{TP}}\cdot\frac{1}{3}h\right)^2+\left(\frac{\overline{PT'}}{\overline{TP}}\cdot\frac{2}{3}h\right)^2+\left(\frac{\overline{CP}}{\overline{TP}}\cdot\frac{1}{3}h\right)^2=\frac{1}{9}h^2\,\frac{\overline{AP}^2+4\overline{PT'}^2+\overline{CP}^2}{\overline{PT}^2}.$$

Да го средиме изразот $\overline{AP}^2+4\overline{PT'}^2+\overline{CP}^2$. Забележуваме дека од T' е средина на AC, $\overline{PT'}=\frac{a}{2}-\overline{AP}$.

Исто така, $\overline{CP}=a-\overline{AP}$, а висината $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, како висина во рамностран триаголник. Со замена, добиваме

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{9}h^2\frac{\overline{AP}^2+4\cdot(\frac{a}{2}-\overline{AP})^2+(a-\overline{AP})^2}{\overline{PT}^2}=\frac{1}{9}h^2\frac{6\overline{AP}^2-6a\overline{AP}+2a^2}{\overline{PT}^2}=$$
$$=\frac{1}{9}\frac{a^2\cdot 3}{4}\cdot\frac{2\cdot(3\overline{AP}^2-3a\overline{AP}+a^2)}{\overline{PT}^2}=\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{3\overline{AP}^2-3a\overline{AP}+a^2}{\overline{PT}^2}.$$

Во $\Delta TPT'$, од Питагоровата теорема, за именителот добиваме:

$$\overline{PT}^2=\overline{PT'}^2+\overline{TT'}^2=(\frac{a}{2}-\overline{AP})^2+\left(\frac{1}{3}h\right)^2=\frac{a^2}{4}-a\overline{AP}+\overline{AP}^2+\frac{1}{9}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-a\overline{AP}+\overline{AP}^2+\frac{a^2}{12}=$$
$$=\frac{a^2}{3}-a\overline{AP}+\overline{AP}^2=\frac{1}{3}\cdot(a^2-3a\overline{AP}+3\overline{AP}^2).$$

Конечно, ако го вратиме во погорното равенство добиениот израз за $\overline{PT}^2$, се добива

$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$, што требаше и да се докаже.

Втора година

1. Во зависност од вредноста на реалниот параметар b, реши ја неравенката $\frac{x^2-x-2}{|x+1|}<b$.

Решение 1. Јасно $x\neq -1$. Бидејќи $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ неравенката е еквивалентна со $\frac{(x+1)(x-2)}{|x+1|}<b$. Разгледуваме два случаи: $x>-1$ и $x<-1$.

Сл. 1. Нека $x>-1$. Неравенката во тој случај е еквивалентна со $x-2<b$ и оттука $x<b+2$. Ако $b+2\leq -1$ т.е. $b\leq -3$ тогаш неравенката нема решение. Ако $b>-3$ решение е интервалот $(-1,b+2)$.

Сл. 2. Нека $x<-1$. Неравенката во тој случај е еквивалентна со $x-2>-b$ и оттука $x>2-b$. Ако $2-b\geq -1$ т.е. $b\leq 3$ неравенката нема решение. Ако $b>3$ решение е интервалот $(2-b,-1)$.

Значи, ако $b\leq -3$ неравенката нема решение, ако $-3<b\leq 3$ решение е интервалот $(-1,b+2)$ и ако $b>3$ решение е $(2-b,-1)\cup(-1,b+2)$.

Решение 2. Јасно $x\neq -1$ и $|x+1|>0$ за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Дадената неравенка можеме да ја запишеме во облик $\frac{x^2-x-2}{|x+1|}<b\Leftrightarrow\frac{x^2-x-2-b|x+1|}{|x+1|}<0$, од каде $x^2-x-2-b|x+1|<0$.

Разгледуваме два случаи: $x>-1$ и $x<-1$.

Сл. 1. Нека $x>-1$. Тогаш

$$x^2-x-2-b|x+1|<0\Leftrightarrow x^2-x-2-b\left(x+1\right)<0\Leftrightarrow x^2-\left(b+1\right)x-b-2<0,$$

па $x_{1,2}=\frac{b+1\pm\sqrt{\left(b+1\right)^2+4\left(b+2\right)}}{2}=\frac{b+1\pm|b+3|}{2}$, од каде следува дека $x_1=-1$ и $x_2=b+2$. Ако $b\leq -3$, тогаш нема решение. Ако $b>-3$, тогаш решенијата се $x\in\left(-1,b+2\right)$.

Сл. 2. Нека $x<-1$. Тогаш

$$x^2-x-2-b|x+1|<0 \Leftrightarrow x^2-x-2+b(x+1)<0 \Leftrightarrow x^2+(b-1)x+b-2<0,$$

па $x_{1,2}=\dfrac{-(b-1)\pm\sqrt{(b-1)^2-4(b-2)}}{2}=\dfrac{b-1\pm|b-3|}{2}$, од каде следува дека $x_1=-1$ и $x_2=2-b$. Ако $b\le 3$, тогаш нема решение. Ако $b>3$, тогаш решенијата се $x\in(2-b,-1)$.

Од сето ова добиваме дека, за $b\le -3$ неравенката нема решение, ако $-3<b\le 3$ тогаш решенијата се $x\in(-1,b+2)$ и ако $b>3$ решенијата се $x\in(2-b,-1)\cup(-1,b+2)$.

2. Најди ги сите реални решенија на равенката:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x+12}+\frac{1}{x+14}=0.$$

Решение. Да забележиме дека $x\in\mathbb{R}\setminus\{-14,-12,-10,-8,-6,-4,-2,0\}$. Нека $y=x+7$. Тогаш дадената равенка го добива следниот облик:

$$\frac{1}{y-7}+\frac{1}{y-5}-\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+3}+\frac{1}{y+5}+\frac{1}{y+7}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y}{y^2-49}+\frac{2y}{y^2-25}-\frac{2y}{y^2-9}-\frac{2y}{y^2-1}=0$$

Оттука $y=0$ или $\dfrac{1}{y^2-49}+\dfrac{1}{y^2-25}-\dfrac{1}{y^2-9}-\dfrac{1}{y^2-1}=0$. Втората равенка е еквивалентна со:

$$\frac{1}{y^2-49}-\frac{1}{y^2-1}=\frac{1}{y^2-9}-\frac{1}{y^2-25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-1-y^2+49}{(y^2-49)(y^2-1)}=\frac{y^2-25-y^2+9}{(y^2-9)(y^2-25)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 48(y^2-9)(y^2-25)=-16(y^2-49)(y^2-1) \Leftrightarrow$$

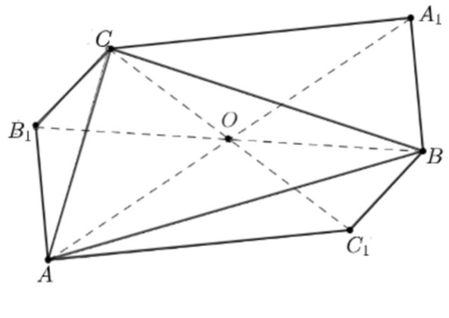
$$\Leftrightarrow 3y^4-102y^2+675=-y^4+50y^2-49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y^4-152y^2+724=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^4-38y^2+181=0$$

Последната равенка со смената $z=y^2$ се сведува на квадратна равенка $z^2-38z+181=0$, чии решенија се $z=19+6\sqrt{5}$ и $z=19-6\sqrt{5}$. Оттука $y=\pm\sqrt{19+6\sqrt{5}}$ и $y=\pm\sqrt{19-6\sqrt{5}}$. Решенијата на почетната равенка се: -7, $-7\pm\sqrt{19+6\sqrt{5}}$, $-7\pm\sqrt{19-6\sqrt{5}}$.

3. Даден е триаголник ABC. Нека O е произволна точка од внатрешноста на триаголникот и нека точките A_1, B_1 и C_1 се симетрични на точките A, B и C во однос на точката O, соодветно. Докажи дека вака конструираните шестаголници $AC_1BA_1CB_1$ имаат константна плоштина која не зависи од изборот на точката O.



Решение. Триаголниците AC_1O и A_1CO се складни (САС) и слично, $\Delta C_1BO\cong\Delta CB_1O$ и $\Delta BA_1O\cong\Delta B_1AO$, па тие по парови имаат еднакви плоштини.

Уште, триаголниците AC_1O и AOC, како и CB_1O и COB и BA_1O и BOA, имаат еднакви страни и еднакви висини кон тие страни, па и тие имаат еднакви плоштини. Тогаш за плоштината P на шестаголникот $AC_1BA_1CB_1$ имаме:

$$P = P_{\Delta AC_1O} + P_{\Delta C_1BO} + P_{\Delta BA_1O} + P_{\Delta A_1CO} + P_{\Delta CB_1O} + P_{\Delta B_1AO} = P_{\Delta AC_1O} + P_{\Delta CB_1O} + P_{\Delta BA_1O} + P_{\Delta AC_1O} + P_{\Delta CB_1O} + P_{\Delta BA_1O} =$$

$$= 2(P_{\Delta AC_1O} + P_{\Delta CB_1O} + P_{\Delta BA_1O}) = 2(P_{\Delta AOC} + P_{\Delta COB} + P_{\Delta BOA}) = 2P_{\Delta ABC}.$$

Значи, плоштината на вака конструираните шестаголници е константна, еднаква на $2P_{ABC}$, и не зависи од изборот на O.

4. Најди ги сите тројки од реални броеви (a,b,c) за кои важат равенствата

$$a(b^2+c) = c(c+ab),$$
$$b(c^2+a) = a(a+bc),$$
$$c(a^2+b) = b(b+ca).$$

Решение. Најпрво да забележиме дека ако $a=0,$ од првата равенка добиваме $c^2=0,$ т.е. $c=0$, и од тоа и $b=0$. Исто добиваме ако тргнеме од $b=0$ или $c=0$. Значи $(a,b,c)=(0,0,0)$ е едно решение, па понатаму ги бараме само ненултите решенија за кои $abc \neq 0$.

Првата равенка може да ја презапишеме како $ab^2 - abc = c^2 - ac,$ односно

$$ab(b-c) = c(c-a)...(1)$$

Слично од втората и третата равенка добиваме $bc(c-a) = a(a-b)...(2)$ и $ca(a-b) = b(b-c)...(3)$, соодветно. Множејќи ги овие три равенства добиваме

$$(abc)^2(a-b)(b-c)(c-a) = abc(a-b)(b-c)(c-a),$$

а од $abc \neq 0$, разложуваме до облик

$$(abc-1)(a-b)(b-c)(c-a) = 0.$$

Сега ќе разгледаме два случаи:

- $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Ако $a=b$, од втората равенка добиваме $ac^2 = a^2c$, и од тоа што $a,c,$ се ненулти мора $a=c$. Значи $a=b=c$, па $(a,b,c)=(x,x,x)$ за секој реален $x \neq 0$. Аналогна дискусија се добива ако се тргне од $b=c$ или $c=a$.
- $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Тогаш $abc=1$. Ги множиме равенствата (1), (2), (3) со c,a,b, соодветно, и добиваме

$$b-c = c^2(c-a),$$
$$c-a = a^2(a-b),...(4)$$
$$a-b = b^2(b-c).$$

Имаме три попарно различни ненулти реални броеви, па мора еден да е најголем. Нека тоа е $a>b, a>c$. Но од равенката (4), $a^2(a-b)>0$, па и левата страна мора да е позитивна, т.е. $c>a,$ што е контрадикција со условот. Слична контрадикција се добива ако се претпостави дека најголемиот број е b или c. Значи, во овој случај нема решенија.

Конечно, сите решенија се тројките $(x,x,x),$ каде x е реален број.

Трета година

1. Нека $f(x) = (x^2+3x+2)^{\cos(\pi x)}$. Најди ги сите природни броеви n за кои $\left|\sum_{k=1}^{n} \lg f(k)\right| = 1$.

Решение: Нѐ интересира функцијата за природни вредности на променливата, па може да забележиме дека ако x е непарен природен број, тогаш $\cos(\pi x) = -1$ и ако x е парен, тогаш $\cos(\pi x)=1$. Исто така, $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Според тоа,

$$\lg f(x)=\lg\left[(x+1)(x+2)\right]^{1}=\lg(x+1)+\lg(x+2)\text{, ако } x \text{ е парен;}$$
$$\lg f(x)=\lg\left[(x+1)(x+2)\right]^{-1}=-\lg(x+1)-\lg(x+2)\text{, ако } x \text{ е непарен.}$$

Ќе разгледаме два случаи.

- Ако n е парен, тогаш

$$\sum_{k=1}^{n}\lg f(k)=-\lg 2-\lg 3+\lg 3+\lg 4-...-\lg(n)-\lg(n+1)+\lg(n+1)+\lg(n+2)=\lg(n+2)-\lg 2=\lg\frac{n+2}{2}.$$

Значи, $\lg\frac{n+2}{2}=\pm1\Leftrightarrow 10^{\pm1}=\frac{n+2}{2}\Rightarrow n=2\cdot10^{\pm1}-2$. Добиваме решение е $n=18$.

- Ако n е непарен, тогаш

$$\sum_{k=1}^{n}\lg f(k)=-\lg 2-\lg 3+\lg 3+\lg 4-...+\lg(n)+\lg(n+1)-\lg(n+1)-\lg(n+2)=-\lg(n+2)-\lg 2=-\lg 2(n+2).$$

Значи, $-\lg 2(n+2)=\pm1\Rightarrow 10^{\pm1}=2n+4\Rightarrow n=\frac{10^{\pm1}-4}{2}$. Тогаш решение е $n=3$.

Бараните природни броеви се $n=3$ и $n=18$.

2. Најди ги сите целобројни решенија на равенката $x^y=xy+2$.

Решение: Нека x,y се цели броеви кои ја задоволуваат равенката. Ќе разгледаме три случаи: $y<0$, $y=0$, $y>0$.

Прв случај: Ако $y<0$, тогаш x^y е цел број само за $x\in\{-1,1\}$. Ако $x=1$, тогаш $1=y+2\Leftrightarrow y=-1$, па $(1,-1)$ е едно решение на дадената равенка. Ако $x=-1$, тогаш $(-1)^y=-y+2$. Последната равенка нема решение затоа што $-y+2>2$, додека $(-1)^y=\pm1<2$.

Втор случај: Ако $y=0$, тогаш $x^y=x^0=1<2=x\cdot0+2=xy+2$, па дадената равенка нема решение во овој случај.

Трет случај: Ако $y>0$, тогаш $x\mid x^y-xy$, односно $x\mid 2$. Оттука $x\in\{\pm1,\pm2\}$.

- Ако $x=-2$, тогаш имаме $(-2)^y=-2y+2\Rightarrow(-2)^{y-1}=-(y-1)$. Оваа равенка нема решение. Јасно, $y=1$ не е решение. За $y>1$, десната страна од последната равенка е негативна, па затоа $y-1$ треба да биде непарен. Од друга страна, левата страна ќе биде делива со 2, па затоа $y-1$ е делив со 2, односно $y-1$ е парен, па добиваме контрадикција.
- Ако $x=-1$, тогаш имаме $(-1)^y=-y+2\Rightarrow -y+2=\pm1$. Оттука $y=1$ или $y=3$, но само $y=3$ ја задоволува равенката. Значи $(-1,3)$ е решение на дадената равенка.
- Ако $x=1$, тогаш $1=y+2\Rightarrow y=-1$, што е противречи на $y>0$.
- Ако $x=2$, тогаш $2^y=2y+2\Rightarrow 2^{y-1}=y+1$. Оваа равенка ја задоволува само $y=3$, односно $(2,3)$ е решение на дадената равенка. Со проверка заклучуваме дека $y=1$ и $y=2$ не се решенија. Навистина, нека $y>3$. Во равенството $2^{y-1}=y+1$ левата страна е делива со 2, па мора y да биде непарен број. Означуваме $y=2a+1$, a е природен број, $a>1$. Тогаш $2^{y-1}=y+1$ го добива обликот $2^{2a}=2a+2\Rightarrow 2^{2a-1}=a+1$. Слично, заклучуваме дека a е непарен број. Означуваме $a=2b+1$, b е природен број. Имаме $2^{4b+1}=2b+2\Rightarrow 2^{4b}=b+1\Rightarrow 16^b=b+1$. Од неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина следува $16^b+\underbrace{1+1+...+1}_{b-1}\geq b\sqrt[b]{16^b}\Leftrightarrow 16^b+b-1\geq16b\Leftrightarrow16^b\geq15b+1$. Притоа, равенство важи ако и само ако $16^b=1\Leftrightarrow b=0$, што не е можно. Имаме $16^b>15b+1>b+1$. Оттука равенката $16^b=b+1$ нема решение. Конечно, решенија на равенката се: $(2,3)$, $(1,-1)$ и $(-1,3)$.

3. Нека a и b се реални броеви од интервалот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Докажи дека $\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^6 b = 1$ ако и само ако $a = b$.

Решение: Задачата треба да се докаже во две насоки.

Нека $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ таква што $\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 b + \cos^6 b = 1$. Ќе ставиме смена: $x = \sin^2 a$, $y = \cos^2 b$, $z = -1$. Даденото равенство го добива следниот облик: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. Последното равенство го трансформираме на следниот начин:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + y + z)\left[\frac{1}{2}\left(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2xz + x^2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x + y + z\right)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right] = 0$$

Заради $x \geq 0, y \geq 0, z = -1$, $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \neq 0$, па затоа мора $x + y + z = 0$. Имаме:

$$\sin^2 a + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 + \cos 2b}{2} = 1 \Rightarrow \cos 2a - \cos 2b = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2\sin\frac{2a + 2b}{2}\sin\frac{2a - 2b}{2} = 0 \Rightarrow \sin(a + b)\sin(a - b) = 0.$$

Заради $a, b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, заклучуваме дека мора $a = b$.

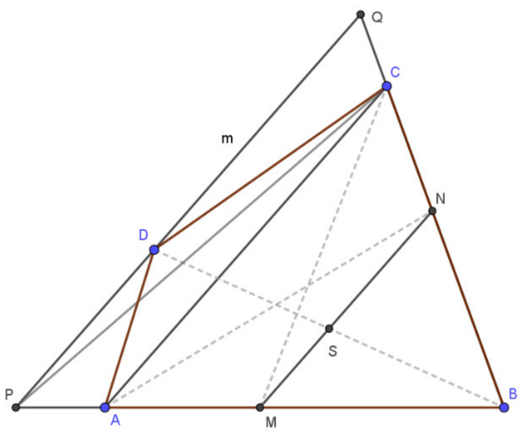
Останува уште да ја покажеме обратната насока. Нека $a = b$. Тогаш

$$\sin^6 a + 3\sin^2 a\cos^2 a + \cos^6 a = (\sin^2 a)^3 + (\cos^2 a)^3 + 3\sin^2 a\cos^2 a =$$
$$= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a + \cos^4 - \sin^2 a\cos^2 a) + 3\sin^2 a\cos^2 a =$$
$$= \sin^4 a + \cos^4 a + 2\sin^2 a\cos^2 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 = 1.$$

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник со најдолга страна AB. Точките M и N лежат на страните AB и BC соодветно, така што секоја од отсечките AN и CM го дели четириаголникот $ABCD$ на два дела со еднакви плоштини. Докажи дека MN ја преполовува дијагоналата BD.

Решение: Бидејќи $P_{MADC} = \frac{1}{2}P_{ABCD} = P_{NADC}$, следува дека $P_{AMC} = P_{ANC}$. Триаголниците AMC и ANC имаат заедничка страна AC, па висините спуштени од M и N кон AC се еднакви. Оттука $MN \parallel AC$. Нека m е права паралелна со AC, која минува низ точката D. Да ја означиме пресечната точка на правата m и полуправата BA со P, а пресечната точка на m и полуправата BC со Q. Да забележиме дека и триаголниците CAP и CAD имаат заедничка страна AC и заради $m \parallel AC$ тие имаат еднакви висини кон AC. Значи нивните плоштини се еднакви. Тогаш:

$$P_{MPC} = P_{MAC} + P_{CAP} = P_{MAC} + P_{CAD} = P_{MADC} = P_{BMC}.$$



Оттука и заради тоа што триаголниците MPC и BMC имаат еднакви висини од темето C кон страните MP и BM соодветно, следува дека $\overline{BM} = \overline{MP}$. Нека со S ја означиме пресечната точка на MN и BD. Тогаш, според теоремата за пропорционални отсечки $\overline{BS} : \overline{BD} = \overline{BM} : \overline{BP} = 1:2$, односно MN ја преполовува дијагоналата BD.

Четврта година

1. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{a+c+d}} + \sqrt{\frac{c}{a+b+d}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq 2.$$

Решение.
Од неравенството помеѓу геометриската и хармониската средина, имаме

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \sqrt{\frac{a}{b+c+d} \cdot 1} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{a}{b+c+d}} + \frac{1}{1}} = \frac{2}{\frac{b+c+d}{a} + 1} = \frac{2}{\frac{a+b+c+d}{a}} = \frac{2a}{a+b+c+d}.$$

Аналогно, $\sqrt{\frac{b}{a+c+d}} \geq \frac{2b}{a+b+c+d}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b+d}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}$; $\sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2c}{a+b+c+d}$.

Со собирање на четирите неравенства, го добиваме бараното неравенство.

2. Нека реалната функција f ја задоволува функционалната равенка

$$f(x^2+3x+7) + 2f(x^2-5x+11) = 3x^2 - 7x + 13, \quad \text{за секој реален број } x.$$

Пресметај $f(2025)$.

Решение. Со замена на x со $1-x$ во функционалната равенка, добиваме

$$f(x^2-5x+11) + 2f(x^2+3x+7) = 3x^2 + x + 9.$$

Двете равенки ќе ги запишеме во облик на систем $\begin{cases} a+2b = 3x^2-7x+13 \\ b+2a = 3x^2+x+9 \end{cases}$, каде $b = f(x^2-5x+11)$ и $a = f(x^2+3x+7)$. Од системот добиваме дека $a = f(x^2+3x+7) = x^2+3x+\frac{5}{3} = x^2+3x+7-\frac{16}{3}$, односно $f(t) = t - \frac{16}{3}$. Конечно, $f(2025) = 2025 - \frac{16}{3} = \frac{6059}{3}$.

3. Нека *A, B, C* и *D* се четири последователни темиња на правилен конвексен многуаголник. Одреди го бројот на страни на многуаголникот, ако важи $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

Решение. Нека R е центарот на опишаната кружница околу многуаголникот и нека 2α е централниот агол на многуаголникот (јасно, толку изнесува аголот при врвот карактеристичниот триаголник во многуаголникот). Тогаш

$$\overline{AB} = 2R\sin\alpha, \overline{AC} = 2R\sin 2\alpha, \overline{AD} = 2R\sin 3\alpha.$$

Тогаш, од $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$ добиваме $\frac{1}{sin\alpha} = \frac{1}{sin2\alpha} + \frac{1}{sin3\alpha}$. Понатаму имаме

$$\frac{1}{sin2\alpha} + \frac{1}{sin3\alpha} - \frac{1}{sin\alpha} = \frac{1}{sin2\alpha} + \frac{sin\alpha - sin3\alpha}{sin\alpha \cdot sin3\alpha} = \frac{1}{sin2\alpha} - \frac{2sin\alpha \cdot cos2\alpha}{sin\alpha \cdot sin3\alpha} = \frac{1}{sin2\alpha} - \frac{2cos2\alpha}{sin3\alpha}$$

$$= \frac{sin3\alpha - 2sin2\alpha \cdot cos2\alpha}{sin2\alpha \cdot sin3\alpha} = \frac{sin3\alpha - sin4\alpha}{sin2\alpha \cdot sin3\alpha}.$$

Затоа, $\frac{1}{sin\alpha} = \frac{1}{sin2\alpha} + \frac{1}{sin3\alpha}$ ако и само ако $\frac{sin3\alpha - sin4\alpha}{sin2\alpha \cdot sin3\alpha} = 0$, т.е., $sin3\alpha - sin4\alpha = 0$.

Од $sin4\alpha = \sin(\pi - 4\alpha)$ и $\alpha < \frac{\pi}{4}$ (многуаголникот има повеќе од четири страни) добиваме дека $3\alpha = \pi - 4\alpha$, т.е., $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Оттука, централниот агол на многуаголникот е $\frac{2\pi}{7}$ и многуаголникот има точно **7 страни**.

4. Низата $(a_n)_{n\in N}$ е низа од реални броеви зададена рекурзивно со:

$$a_1 = 1;\ a_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1,\ n \geq 2.$$

Одреди го најмалиот реален број S за кој важи

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{a_n} < S, \text{ за секој } i \in \mathbb{N}.$$

Решение. Делејќи го равенството $a_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + 1$ со $a_1 a_2 \dots a_n$, добиваме

$$\frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n},$$

односно

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Во последното равенство последователно заменуваме $n = 2,3, \dots, i$ (за произволно $i \geq 2$) и ги собираме така добиените равенства. Притоа доаѓа до кратење на сите членови во тој збир, освен првиот и последниот, односно добиваме

$$\sum_{n=2}^{i} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i}.$$

Оттука следува дека

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} = 2 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i},$$

од каде имаме дека $\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{a_n} < 2$, за секој $i \in \mathbb{N}$.

Останува уште да покажеме дека $S = 2$.

Од начинот на кој е зададена низата може да се заклучи дека $a_n \geq a_{n-1} + 1$, од каде што индуктивно следи дека $a_n \geq n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Тогаш,

$$0 < \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} \leq \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{i} \text{ за секој } i \in \mathbb{N},$$

односно,

$$\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_i} \geq 2 - \frac{1}{i}, \text{ за секој } i \in \mathbb{N}.$$

Нека m е произволен позитивен број помал од 2. Нека $i \in \mathbb{N}$ е избран таков што $i > \frac{1}{2-m}$.

Тогаш $\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{a_n} \geq 2 - \frac{1}{i} > m$. Од последното следува дека $S = 2$.