32. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Четвврток, 27. Март 2025

Задача 1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со $AB < AC$. Нека M е средишна точка на страната BC, а X и Y се точки на отсечките BM и CM, соодветно, така што $BX = CY$. Нека ω_1 е опишаната кружница на $\triangle ABX$ и ω_2 е опишаната кружница на $\triangle ACY$. Заедничката тангента t на ω_1 и ω_2 која е поблиску до A ги допира ω_1 и ω_2 во точки P и Q, соодветно. Нека правата MP ја сече ω_1 во U, а правата MQ ја сече ω_2 во V. Докажете дека опишаната кружница на $\triangle MUV$ ги допира ω_1 и ω_2.

Задача 2. Нека $n > 2$ е цел број, $k > 1$ е реален број и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се позитивни реални броеви, такви што $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = 1$. Докажете дека:

$$\frac{1+x_1^k}{1+x_2} + \frac{1+x_2^k}{1+x_3} + \cdots + \frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n} + \frac{1+x_n^k}{1+x_1} \geq n\,.$$

Кога важи равенство?

Задача 3. На хоризонтално поставена бројна права, врз секој број $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ е поставено купче од $t_i > 0$ жетони. Сé додека барем едно купче содржи барем два жетона, ја повторуваме следнава постапка: избираме такво купче, нека се состои од $k \geq 2$ жетони, и најгорниот жетон од избраното купче го поместуваме долж бројната права за $k - 1$ единечни позиции надесно. Кој е најголемиот природен број N врз кој може да биде поставен жетон? (Изразете го N како функција од $(t_i : i = 1, \ldots, s)$.)

Задача 4. Даден е полином $P(x) = ax^{75} + b$, каде a и b се заемно прости броеви кои припаѓаат во $\{1, 2, \ldots, 151\}$, кој го задоволува следниот услов: Постои најмногу еден прост број p така што за секој природен број k, $p \nmid P(k)$. Докажете дека за секој прост број $q \neq p$ постои природен број k, за кој $q^2 \mid P(k)$.

Задача 5. Нека $n > 1$ е природен број, а K е квадрат со страна n кој е разделен на n^2 единечни квадратчиња. За кои вредности на n квадратот K може да се разбие на n фигури со еднакви плоштини само со користење на дијагоналите на единечните квадратчиња, при што од секое единечно квадратче е искористена најмногу една дијагонала (може да има единечно квадратче од кое не е искористена ниту една дијагонала).

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 8 поени.