РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
15.3.2025 година

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

4 ОДДЕЛЕНИЕ

Важна напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.
Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.
Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.
****

1. Запиши ги сите трицифрени броеви чијшто производ на цифри е 56.
Решение: Едноцифрените делители на бројот 56 се броевите: 1, 2, 4, 7 и 8 **(5 поени)**.
Меѓу нив има две различни тројки броеви чиј што производ е бројот 56 и тоа се:

$56 = 1 \cdot 7 \cdot 8$ **(4 поени)** и $56 = 2 \cdot 4 \cdot 7$ **(4 поени)**.

Бараните броеви се: 178, 187, 718, 781, 817, 871 и 247, 274, 427, 472, 724, 742.
(по 1 поен за секој број, вк. 12 поени)
(вк. 25 поени)
****

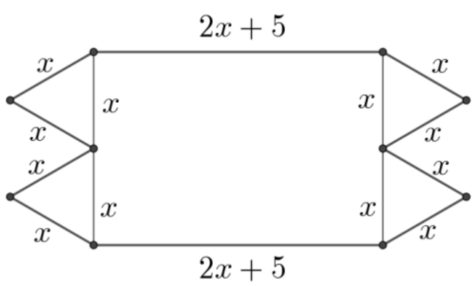
2. На цртежот десно е прикажана табела. Во некои полиња на табелата се нацртани некои од знаците: ▲, ■, ● и ♥. Истиот знак на секое место во табелата претставува иста вредност (ист број), а покрај секоја редица и секоја колона наведен е збирот на вредностите на сите знаци во таа редица, односно колона. Определи ја вредноста на секој знак во табелата.

▲	■		●	14
■	♥	■		16
♥	▲	●	▲	23
●	■	●	▲	15
20	24	7	17	

Решение:
(Конкурсна задача 4139 за 4 одд. со решение во Нумерус L-1, 2024/2025)
Во првата колона ги има сите четири знаци и нивниот збир е 20. **(1 поен)**
Во првата редица ги има сите знаци што ги има во првата колона освен срцето. Оттука, вредноста на срцето е разликата $20 - 14 = 6$. **(6 поени)**
Бидејќи во втората редица има само два квадрати и едно срце, вредноста на квадратот е $(16 - 6) : 2 = 5$. **(6 поени)**
Бидејќи вредноста на квадратот е 5, а во третата колона има само еден квадрат и два круга, вредноста на еден круг е $(7 - 5) : 2 = 1$. **(6 поени)**
Бидејќи вредноста на круг е 1, а во четвртата колона има само еден круг и два триаголници, добиваме дека вредноста на еден триаголник е $(17 - 1) : 2 = 8$. **(6 поени)**
(вк. 25 поени)
****

3. Елена нацртала правоаголник на кој едната страна е подолга од другата за 5 cm. Потоа, над двете пократки страни на правоаголникот таа нацртала по два рамнострани триаголници (такви што страните им се со еднакви должини), како на цртежот десно. Ако периметарот (обиколката) на добиената форма е 94 cm, колкав е периметарот на правоаголникот?

Решение: (Конкурсна задача 4140 за 4 одд. со решение во Нумерус L-1, 2024/2025)



Нека должината на страната на рамностраниот триаголник (изразена во сантиметри) е x **(1 поен)**.
Тогаш должината на пократката страна на правоаголникот е $x + x = 2 \cdot x$ **(2 поени)**, а должината на подолгата страна е $2 \cdot x + 5$ **(2 поени)**.
Обиколката на добиената форма е еднаква на збирот од должините на нејзините страни и тој е еднаков на 94 cm, па имаме дека:

$12 \cdot x + 10 = 94$ **(10 поени)**

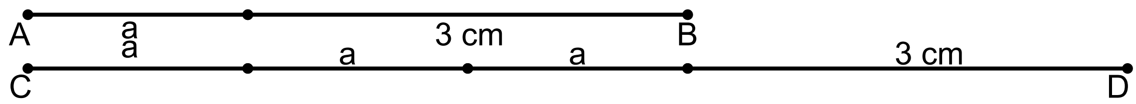
$12 \cdot x = 84$ **(3 поени)**

$x = 7\text{ cm}$ **(3 поени)**

Страните на правоаголникот се $2 \cdot 7 = 14\text{ cm}$ **(1 поен)** и $2 \cdot 7 + 5 = 17\text{ cm}$ **(1 поен)**, па обиколката е $2 \cdot 14 + 2 \cdot 17 = 28 + 34 = 66\text{ cm}$ **(2 поени)**.
(вк. 25 поени)
****

4. Должините на две отсечки се разликуваат за $3\,cm$. Ако секоја од отсечките се скрати за $3\,cm$, тогаш едната отсечка ќе биде 3 пати подолга од другата. Најди ја должината на отсечките.

Решение: Да ги означиме крајните точки на покусата отсечка со A и B, а на подолгата отсечка со C и D. Дадено е дека $\overline{CD} = \overline{AB} + 3cm$. **(2 поени)**



(6 поени за скица)

Со помош на скицата согледуваме дека кога ќе ги скусиме двете отсечки за по $3\,cm$добиваме $2 \cdot a = 3\,cm$ **(10 поени)**, па $a = 1{,}5\,cm$ **(3 поени)**.

Добиваме:

$$\overline{AB} = a + 3cm = 1{,}5cm + 3cm = 4{,}5cm$$ **(2 поени)**,

$$\overline{CD} = \overline{AB} + 3cm = 4{,}5\,cm + 3\,cm = 7{,}5\,cm$$ **(2 поени)**.

(вк. 25 поени)

---

5 ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена:

Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.

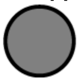
Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.

Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.

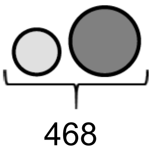
****

1. Во една фабрика се произведуваат велосипеди и тротинети. Во месец март биле произведени вкупно 468 вакви возила. Следниот месец биле произведени 2 пати повеќе велосипеди и 6 пати повеќе тротинети отколку во март. Ако во април биле произведени вкупно 2024 вакви возила, колку велосипеди и колку тротинети биле произведени во месец март?

Решение: (задача 4143 за 4 – 5 одд. со решение во Нумерус L – 1 од 2024/2025 година)

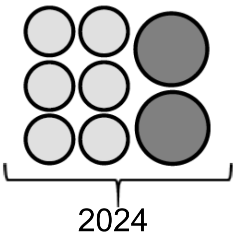
Прв начин: Ако  го претставува бројот на тротинети, а  е бројот на велосипеди произведени во март, тогаш:

март



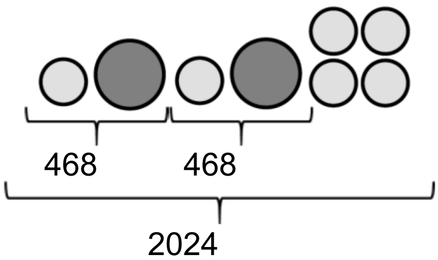
(2 поени)

април



(3 поени)

Ќе ги разместиме истите во групи:



(10 поени)

Бидејќи $2024 - 2 \cdot 468 = 2024 - 936 = 1088$ **(5 поени)**, добиваме дека бројот на тротинети произведени во март е $1088 : 4 = 272$ **(3 поени)**, а бројот на велосипеди произведени во март е $468 - 272 = 196$. **(2 поени)**.

Втор начин: Ако со x го означиме бројот на тротинети произведени во март, тогаш бројот на велосипеди произведени во март е $468 - x$. **(3 поени)**

Тогаш во април биле произведени $6 \cdot x$ тротинети и $2(468 - x)$ велосипеди. **(5 поени)**

$6 \cdot x + 2(468 - x) = 2024$ **(5 поени)** Во март биле произведени 272 тротинети.

$6 \cdot x + 936 - 2 \cdot x = 2024$ **(4 поени)**
$4 \cdot x = 1088$ **(3 поени)**
$x = 272$ **(3 поени)**

Бројот на велосипеди произведени во март бил
$468 - 272 = 196$. **(2 поени)**

(вк. 25 поени)

****

2. Ѓорѓи напишал трицифрен број со три различни непарни цифри. Ги помножил цифрите на бројот и добил нов број. Потоа ги помножил цифрите на новодобиениот број. Продолжил со множење на цифрите на секој нов број се додека не добил едноцифрен број. Колку трицифрени броеви постојат, запишани со три различни непарни цифри, коишто помножени на опишаниот начин даваат нула? Кои се тие броеви?
Решение: Трицифрениот број е образуван со три од цифрите 1, 3, 5, 7 или 9. **(2 поени)**
Треба да ги разгледаме следните десет производи:

$$1 \cdot 3 \cdot 5,\ 1 \cdot 3 \cdot 7,\ 1 \cdot 3 \cdot 9,\ 1 \cdot 5 \cdot 7,\ 1 \cdot 5 \cdot 9,\ 1 \cdot 7 \cdot 9,\ 3 \cdot 5 \cdot 7,\ 3 \cdot 5 \cdot 9,\ 3 \cdot 7 \cdot 9,\ 5 \cdot 7 \cdot 9.$$

(по 0,5 поени за секој наведен производ, вк. 5 поени)

Со испитување на секој од производите **(за точни пресметки по 0,5 поени за секоја тројка броеви, вк. 5 поени)** добиваме дека само следните две тројки непарни броеви го задоволуваат барањето:

1, 5 и 9, бидејќи $1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$, $4 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 0 = 0$, а со употреба на цифрите 1, 5 и 9 може да се образуваат следните трицифрени броеви $159, 195, 519, 591, 915, 951$ **(6 поени)**.

3, 5 и 7, бидејќи $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $1 \cdot 0 \cdot 5 = 0$, а со користење на цифрите 3, 5 и 7 може да се образуваат следните трицифрени броеви $357, 375, 537, 573, 735, 753$ **(6 поени)**.

Постојат 12 такви броеви **(1 поен)**.

(вк. 25 поени)

****

3. На еден спортски камп учествувале 400 деца. Една десеттина од нив биле фудбалери. Вкупниот број на кошаркари и одбојкари е двојно поголем од бројот на фудбалери, при што кошаркари биле за 20 повеќе од одбојкари. Останатите биле ракометари и пливачи, при што ракометари биле 3 пати повеќе од пливачи. Колку фудбалери, кошаркари, одбојкари, пливачи и ракометари имало на кампот?

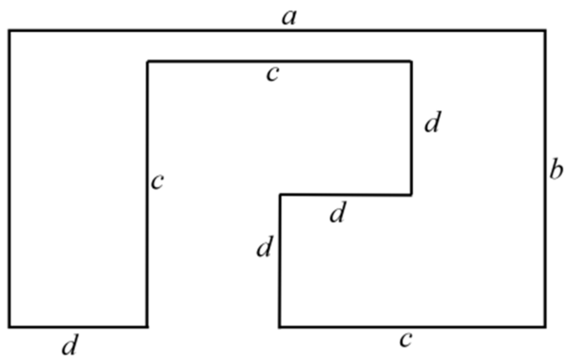
Решение: Фудбалери биле $\frac{1}{10} \cdot 400 = 40$. **(3 поени)**

Кошаркари и одбојкари биле вкупно $2 \cdot 40 = 80$. **(1 поен)**
Да го означиме со n бројот на одбојкари. Тогаш, бројот на кошаркари е $n + 20$. **(1 поен)**
Од $n + (n + 20) = 80$ **(3 поени)**, добиваме дека $2 \cdot n = 60$ **(2 поени)**, па $n = 30$. **(2 поени)**
Бидејќи имало 30 одбојкари, бројот на кошаркари е $30 + 20 = 50$. **(1 поен)**
Останатите учесници биле ракометари и пливачи, а нив ги имало вкупно $400 - (40 + 80) = 280$. **(3 поени)**
Ако го означиме k со бројот на пливачи, тогаш бројот на ракометари е $3k$. **(1 поен)**
Од $k + 3k = 280$ **(3 поени)**, добиваме дека $4 \cdot k = 280$ **(2 поени)**, односно $k = 70$. **(2 поени)**
Бидејќи биле 70 пливачи, бројот на ракометари бил $3 \cdot 70 = 210$. **(1 поен)**

(вк. 25 поени)

****

4. Пресметај го периметарот (обиколката) и плоштината на дадената фигура ако знаеме дека $a = 16$ cm, $b = 10$ cm, $c = 8$ cm.



Решение: (задача 4187-б за 5 одд. од Нумерус L – 1 од 2024/2025 година)
Забележуваме дека $c = 2d$. **(3 поени)**
<u>Прв начин</u>: За периметарот на фигурата добиваме:

$$L = a + 2b + 3c + 4d = 16 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 = 76 \text{ cm}$$ **(7 поени)**

Плоштината на фигурата може да се пресмета како плоштина на правоаголник со страни *a* и *b* намалена за плоштината на три квадрати со страна *d*, односно

$$P = a\cdot b - 3d\cdot d = 16\cdot 10 - 3\cdot 4\cdot 4 = 112\ cm^2.$$ **(15 поени)**

<u>Втор начин</u>: Од $c = 2d$ добиваме $d = c:2 = 8:2 = 4$ cm **(2 поени)**, па

$$L = a + 2b + 4c + 2d = 16 + 2\cdot 10 + 4\cdot 8 + 2\cdot 4 = 76\ cm.$$ **(5 поени)**

Плоштината на фигурата може да се пресмета како збир на плоштините на правоаголник со страни *a* и $b-c$ и плоштината на пет квадрати со страна *d*, односно

$$P = a\cdot(b-c) + 5d\cdot d = 16\cdot 2 + 5\cdot 4\cdot 4 = 112\ cm^2.$$ **(15 поени)**

(вк. 25 поени)

6 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Одреди го збирот на сите дропки од облик $\frac{m}{n}(m,n\in N)$, ако е $m<n$ и производот од броителот и именителот на секоја од дропките е 30.

Решение: **(Нумерус 49/3 ,задача 4124)** Бидејќи $30 = 1\cdot 30 = 2\cdot 15 = 3\cdot 10 = 5\cdot 6$ **(5б)** може да се разложи на овие множители,дропки кои одговараат на условот на задачата $m<n$ се $\frac{1}{30},\frac{2}{15},\frac{3}{10},\frac{5}{6}$ **(10б)** тогаш нивниот збир е

$\frac{1}{30}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}+\frac{5}{6}=\frac{39}{30}=\frac{13}{10}=1,3$ **(10б)**

2. Правилен многуаголник со страна 1 m има вкупно 464 дијагонали. Пресметај го периметарот на многуаголникот.

Решение: (Нумерус 50/1 задача 4191) $a = 1m,\ D_n = 464 = \frac{n(n-3)}{2}$ **(5 б)** $n(n-3) = 928$

$928 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 29 = 32\cdot 29$ **(10 б)** т.е. $n = 32$ **(5 б)** Периметарот на многуаголникот $L = n\cdot a = 32m$ **(5 б)**

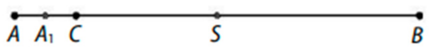
3. Тео купил чевли со $\frac{2}{7}$ од своите пари. Потоа, со 40% од остатокот, купил панталони. Откако ги купил чевлите и панталоните, купил и маица со $\frac{1}{3}$ од парите што му останале. Парите што му останале по сите купувања се 2600 денари. Колку пари имал Тео на почетокот?

Решение: Нека x е почетната сума на денари што ја имал Тео. За чевли потрошил $\frac{2}{7}$ од x и остануваат $\frac{5}{7}$ од x.**(5б)** За панталони потрошил 40% од $\frac{5}{7}$ од x т.е. $\frac{5}{7}x\cdot 40\% = \frac{5}{7}x\cdot\frac{40}{100}=\frac{2}{7}x$ и остануваат $\frac{3}{7}$ од x.**(5б)** За маица потрошил $\frac{1}{3}$ од $\frac{3}{7}$ од x т.е. $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}x=\frac{1}{7}x$.**(5б)**

Значи $\frac{2}{7}x+\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}x+2600=x$ **(5б)** т.е. $\frac{5}{7}x+2600=x$ т.е. $7x-5x=2600\cdot 7$ т.е. $x=7\cdot 1300=9100$ денари.**(5б)**

4. Отсечката $\overline{AB}=192\,\text{cm}$ е поделена на отсечки со еднаква должина, така што првата отсечка има една крајна точка во A, а последната отсечка има една крајна точка во B. Познато е дека растојанието од средината на првата отсечка до средината на отсечката AB изнесува 90 cm. Одреди го бројот на отсечки кои се добиени. Направи скица!

Решение: **(5б)**



Нека со *S* ја обележиме средината на отсечката *AB*, а со A_1 средината на првиот дел од еднаквите делови чија една крајна точка е точката *A*, а другата *C*. Тогаш $\overline{AS}=96cm, \overline{A_1S}=90cm$ **(5б)** и $\overline{AA_1}=6cm$ **(5б)** односно $\overline{AC}=12cm$.**(5б)** Значи бројот на отсечки на кои е поделена отсечкаат AB е $192:12=16$.**(5б)**

7 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Марко има извесна сума на пари, со кои купил две тетратки со различна големина и различна цена. Познато е дека 4,5% од цената на поголемата тетратка е еднаква на 8,5% од цената на помалата тетратка. После купување на тетратките на Марко му останале 72 денари, што е еднакво на разликата на цената на поголемата со цената на помалата тетратка. Колку пари имал Марко на почеток?

Решение: Нека цената на големата тетратка е означиме со x , а цената на малата тетратка со y **(2 поени)**.

Имаме $\frac{4,5}{100}x=\frac{8,5}{100}y$ **(8 поени)**, $45x=85y$, т.е. $x=\frac{85}{45}y=\frac{17}{9}y$ **(2 поени)**.

Од условот на задачата, разликата на цените на тетратките е $x-y=72$ денари **(2 поени)**. Со замена на x во последната равенка добиваме $\frac{17}{9}y-y=72$ **(4 поени)**, т.е. $y=81$ **(2 поени)**.Од тука добиваме за $x=$ 81+72=153 денари. **(2 поени)** Значи, Марко имал вкупно 153+81+72=306 денари. **(3 поени)**

2. Група работници за 4 дена ја провериле сообраќајната сигнализација на еден магистрален пат. Првиот ден провериле вдолж $\frac{1}{17}$ од патот, вториот ден трипати повеќе од првиот ден, третиот ден за $60\,\mathrm{km}$ повеќе од вториот ден, а четвртиот ден провериле онолку километри од патот колку што провериле првиот и вториот ден заедно. Определи ја должината на магистралниот пат.

Решение (Нумерус 48-3, 4016): Нека со x ја означиме должината на магистралниот пат. Од условите на задачата, првиот ден работниците провериле $\frac{1}{17}x,$ **(4 поени)** вториот ден $\frac{3}{17}x$ **(4 поени)**, третиот ден $\frac{3}{17}x+60$ **(4 поени)** и четвртиот ден $\frac{1}{17}x+\frac{3}{17}x=\frac{4}{17}x$ **(4 поени)**. Според тоа добиваме дека

$$\frac{1}{17}x+\frac{3}{17}x+\frac{3}{17}x+60+\frac{4}{17}x=x(5\ \textbf{поени})\Leftrightarrow\frac{11}{17}x+60=x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{11}{17}x=60\Leftrightarrow\frac{6}{17}x=60\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\cdot 60\Leftrightarrow x=170.$$

Значи, должината на магисталниот пат е $170\,\mathrm{km}$ **(4 поени)**.

3. Во месец март 2025 година, Калина ќе наполни онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината од нејзинотот раѓање. Која година е родена Калина, ако таа ќе наполни помалку од 100 години?

Решение1: Нека Калина е родена во $\overline{xyzt}$ година. Од условот на задачата имаме дека

$2025=\overline{xyzt}+x+y+z+t=1000x+100y+10z+t+x+y+z+t$ **(8 поени)**, односно $2025=1001x+101y+11z+2t$.

Бидејќи Калина ќе наполни помалку од 100 години имаме дека $x\in\{1,2\}$ **(3 поени)**.

1. случај: За $x=1$ имаме $2025=1001+101y+11x+2t$, т.е. $1024=101y+11z+2t$. Бидејќи Калина ќе наполни помалку од 100 години тогаш $y=9$, па имаме $1024-909=11z+2t$, односно $115=11z+2t$. Сега $z\in\{8,9\}$.

За $z=8$, имаме $2t=115-88=27$, што значи не е можно.

За $z=9$, имаме $2t=115-99=16$, $t=8$. Значи Калина е родена во 1998 година **(7 поени)**.

2. случај: За $x=2$ имаме $2025=2002+101y+11x+2t$, т.е. $23=101y+11z+2t$. сега јасно е дека $y=0$, па добиваме $23=11z+2t$. Сега за z разгледуваме две можности, т.е. $z\in\{1,2\}$.

За $z=1$, имаме $2t=23-11=12$, т.е. $t=6$.

За $z=2$, имаме $2t=23-22=1$, што значи не е можно.

Добиваме дека Калина е родена во **2016** година **(7 поени)**.

Заклучуваме дека Калина може да биде родена во 1998 или во 2016 година.

Решение2: Бидејќи Калина ќе наполни помалку од 100 години, јасно е дека таа може да биде родена во овој или во минатиот век.

1. случај: Нека таа е родена во $\overline{19xy}$ година **(5 поени)**. Збирот на цифрите на нејзиното раѓање е $1+9+x+y=10+x+y$. Оттука, во 2025 година Калина ќе наполни $2025-\overline{19xy}$ години **(2 поени)**.

Тогаш $2025-\overline{19xy}=10+x+y$, $2025-(1900+10x+y)=10+x+y$, $125-10x-y=10+x+y$, односно $115=11x+2y$ **(2 поени)**, каде што $x,y\in\{0,1,2,...,9\}$. Од последното равенство добиваме дека $x\in\{8,9\}$.

За $x=8$, $2y=115-88=27$, што не е можно **(1 поени)**.

За $x=9$, $2y=115-99=16$, $y=9$ **(1 поени)**.

Добиваме дека Калина е родена во **1998** година.

2. случај: Нека Калина е родена во $\overline{20xy}$ година **(5 поени)**. Сега, збирот на цифрите на нејзиното раѓање е $2+0+x+y=2+x+y$. Оттука, во 2025 година Калина ќе наполни $2025-\overline{20xy}$ години **(2 поени)**.. Имаме

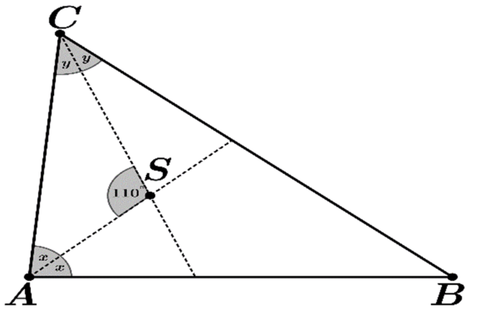
$2025-\overline{20xy}=2+x+y$, $2025-(2000+10x+y)=2+x+y$, односно $23=11x+2y$ **(2 поени),** $x,y\in\{0,1,2,...,9\}$. Од последното равенство јасно е дека $x\in\{1,2\}$.

За $x=1$, $2y=23-11=12$, т.е. $y=6$ **(1 поени)**..

За $x=2$, $2y=23-22=1$, што не е можно **(1 поени)**..

Добиваме дека Калина е родена во **2016** година.
Заклучуваме дека Калина може да биде родена во 1998 или во 2016 година **(3 поени, по 1,5 за секоја година)**.

4. Во $\triangle ABC$ симетралите на $\angle BAC$ и $\angle ACB$ се сечат во точката S. Определи ги внатрешните агли на $\triangle ABC$ ако $\angle ASC = 110^\circ$ и $\angle BAC$ е трипати поголем од $\angle ABC$.



Решение (Нумерус 48-4, 4038). (За точен цртеж се даваат 5 поени)
Нека со $x = \angle SAC$ и $y = \angle SCA$ ги означиме внатрешните агли на $\triangle ASC$ како на цртежот. За $\triangle ASC$, од тоа што $\angle ASC = 110^\circ$ следува дека

$$x + y + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x + y = 180^\circ - 110^\circ \Leftrightarrow x + y = 70^\circ$$ **(5 поени).**

Од условот на задачата имаме дека $\angle BAC = 3\angle ABC$. Исто така, $\angle BAC = 2x$ и $\angle ACB = 2y$, па $\angle ABC = \frac{2x}{3}$. **(5 поени).** Тогаш за внатрешните агли на $\triangle ABC$ важи $2x + 2y + \frac{2x}{3} = 180^\circ$. Со замена на $x + y = 70^\circ$ во последното равенство, добиваме дека

$$2x + 2y + \frac{2x}{3} = 180^\circ \Leftrightarrow 2(x + y) + \frac{2x}{3} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 70^\circ + \frac{2x}{3} = 180^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + \frac{2x}{3} = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 180^\circ - 140^\circ \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 40^\circ \Leftrightarrow 2x = 120^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$$ **(5 поени)**,

односно $\angle SAC = x = 60^\circ$. Според тоа $y = 70^\circ - 60^\circ$, односно $y = 10^\circ$ **(2 поени)**. Значи, за внатрешните агли на $\triangle ABC$ добиваме дека $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle ACB = 20^\circ$ и $\angle ABC = 40^\circ$. **(3 поени, за секој агол по 1 поен)**.

8 ОДДЕЛЕНИЕ

1. Во една фабрика за чоколади, вообичаено е дневното производство да се пакува во идентични кутии. Притоа, во секоја кутија има точно определен ист број на чоколади. Еден ден, заради проблеми со набавката на кутии, останале неспакувани 600 чоколади. Останатите чоколади од тој ден биле спакувани во 180 еднакви, но помали кутии, па во секоја кутија имало по 5 чоколади помалку од вообичаеното. Доколку за пакување се користеле вообичаените кутии, потребни се 10 кутии помалку и ќе останеле неспакувани само 60 чоколади. Определи го бројот на чоколади произведени тој ден, ако немало неспакувани чоколади од претходните денови!
Решение. Нека *x* е бројот на чоколади што вообичаено се пакуваат во една кутија. Бидејќи кутиите биле помали, тој ден биле спакувани $180 \cdot (x - 5)$ чоколади и уште 600 чоколади останале неспакувани, т.е. биле произведени вкупно $180 \cdot (x - 5) + 600$ чоколади. **(8 поени)** Од друга страна, доколку би се спакувале чоколадите во вообичаените кутии, ќе биле потребни 180-10=170 кутии и во секоја од нив има *x* чоколади, а при тоа ќе останеле неспакувани 60 чоколади. Значи, биле произведени вкупно $170x + 60$. **(8 поени)** Па, се добива равенката:

$$180 \cdot (x - 5) + 600 = 170x + 60 \Leftrightarrow 180x - 900 + 600 = 170x + 60 \Leftrightarrow 10x = 360 \Leftrightarrow x = 36$$ **(6 поени)**

Значи, тој ден се произведени $170 \cdot 36 + 60 = 3120 + 60 = 6180$ чоколади. **(3 поени)**
2. (Нумерус 49-1, 8-9 одделение, задача 4046) Најди ги сите прости броеви *p* такви што и броевите *p*+16 и *p*+20 се прости броеви.
Решение. Ако p=2, тогаш p+16=2+16=18 и p+20=2+20=22 се сложени броеви. **(4 поени)**
Ако p=3, тогаш p+16=3+16=19 и p+20=3+20=23 се прости броеви. **(4 поени)**
Секој природен број, поголем од 3 може да се запише во еден од следните облици: 3k или 3k+1 или 3k+2, за некој природен број k. **(3 поени)**
Ако p>3 и p е прост број, тогаш p е од обликот 3k+1 или 3k+2.
Ако p=3k+1, тогаш p+20=3k+1+20=3k+21=3(k+7). Од ова следува дека 3 е делител на p+20, односно p+20 е сложен број. **(6 поени)**
Ако p=3k+2, тогаш p+16=3k+2+16=3k+18=3(k+6). Од ова следува дека 3 е делител на p+16, односно p+16 е сложен број. **(6 поени)**
Значи, единствен прост број за кој и броевите p+16 и p+20 се прости броеви е бројот 3.**(2 поени)**

3. Нека a, b и c се три различни природни броеви така што $2024 - a$, $2024 - b$ и $2024 - c$ се полни квадрати на природни броеви и $(2024 - a)(2024 - b)(2024 - c) = 2025$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот $a + b + c$.
Решение. Нека $a, b, c \in \mathbb{N}$ се различни броеви. Од тоа што $2024 - a$, $2024 - b$ и $2024 - c$ се полни квадрати на природни броеви, постојат природни броеви m, n и p така што

$$2024 - a = m^2,\ 2024 - b = n^2 \text{ и } 2024 - c = p^2.$$ **(3 поени)**

Со собирање на левите и десните страни на последните равенства добиваме дека

$$a+b+c=3\cdot 2024-\left(m^2+n^2+p^2\right).$$ **(2 поени)**

Притоа, $(2024-a)(2024-b)(2024-c)=2025$ преминува во облик $m^2n^2p^2=2025$. Од различноста на броевите a,b,c следува различност и на броевите m,n,p. Значи, ги бараме сите можни начини на претставување на бројот 2025 како производ на три различни полни квадрати на природни броеви. Имаме дека $2025=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$, па сите можни начини на претставување на бројот 2025 како производ на три полни квадрати на природни броеви се

$$2025=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=1^2\cdot5^2\cdot9^2=1^2\cdot3^2\cdot15^2=3^2\cdot3^2\cdot5^2=1^2\cdot1^2\cdot45^2.$$ **(8 поени)**

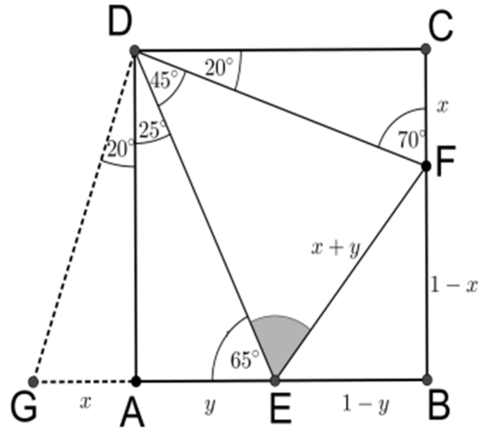
Јасно, условите на задачата ги задоволуваат $2025=1^2\cdot5^2\cdot9^2=1^2\cdot3^2\cdot15^2$, па ги разгледуваме следните два случаја:

Прв случај. $m^2n^2p^2=1^2\cdot5^2\cdot9^2$, па $m^2+n^2+p^2=1^2+5^2+9^2=107$ и $a+b+c=5965$. **(5 поени)**

Втор случај. $m^2n^2p^2=1^2\cdot3^2\cdot15^2$, па $m^2+n^2+p^2=1^2+3^2+15^2=235$ и $a+b+c=5837$. **(5 поени)**

Според тоа, најмалата вредност на изразот $a+b+c$ е 5837, а најголемата вредност е 5965. **(2 поени)**

4. (Нумерус 47-1, 8-9 одделение, задача 3824) Нека E и F се точки на страните AB и BC на квадратот $ABCD$ чии страни се долги по 1 cm. Ако $\angle EDF=45^\circ$, а $\angle DFC=70^\circ$ тогаш одреди го $\angle FED$ и периметарот на $\triangle BFE$.



Решение. Нека $\overline{CF}=x, \overline{AE}=y$. Јасно е дека $\angle FDC=90^\circ-\angle DFC=20^\circ$, $\angle EDA=90^\circ-\angle EDF-\angle FDC=25^\circ$ и $\angle DEA=90^\circ-\angle EDA=65^\circ$. (**5 поени**) Нека G е точка од продолжението на полуправата BA таква што $\overline{GA}=\overline{CF}=x$. Од складноста на триаголниците GAD и FCD (според признакот САС: $\overline{GA}=\overline{FC}$, $\angle GAD=\angle FCD$, $\overline{AD}=\overline{CD}$) (**5 поени**) добиваме дека $\angle GDA=\angle FDC=20^\circ$ и $\overline{DG}=\overline{DF}$. (**3 поени**) Така, $\angle GDE=\angle GDA+\angle ADE=45^\circ$ од каде $\angle GDE=\angle EDF=45^\circ$. Од $\overline{DE}=\overline{DE}$, $\angle GDE=\angle EDF$, $\overline{DG}=\overline{DF}$, имаме $\triangle GDE\cong\triangle FDE$ (признак САС) (**5 поени**), па затоа $\angle FED=\angle GED=65^\circ$ и $\overline{EF}=\overline{EG}=x+y$. (**3 поени**) Јасно е дека $\overline{EB}=1-y$ и $\overline{BF}=1-x$ па затоа имаме дека $L_{\triangle BFE}=1\cancel{-x}\cancel{+x}\cancel{+y}+1\cancel{-y}=2\text{ cm}$. (**4 поени**)

9 ОДДЕЛЕНИЕ

Задача 1. Правоаголник $ABCD$ со целобројни должини на страните и плоштина 99 cm^2 ротира за 180° во рамнината околу едно негово теме. Така добиената фигура има плоштина $m\text{ cm}^2$. Пресметај ја најмалата можна вредност на m.

Решение: (Нумерус 49-3, задача 4106) Нека a и b се целобројни должини на страните на правоаголникот $ABCD$. Го ротираме правоаголникот (на пример во насока на стрелките на часовникот) за 180° околу темето B. Плоштината на добиената фигура е збир од плоштината на полукругот со радиус $\overline{BD}$ и плоштините на ΔABC и ΔD_1C_1B, односно

$$P=\frac{1}{2}\pi\overline{BD}^2+P_{\Delta ABC}+P_{\Delta D_1C_1B},$$ т.е.

$$m=\frac{1}{2}\pi\overline{BD}^2+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}.$$ **......(10 бода)**

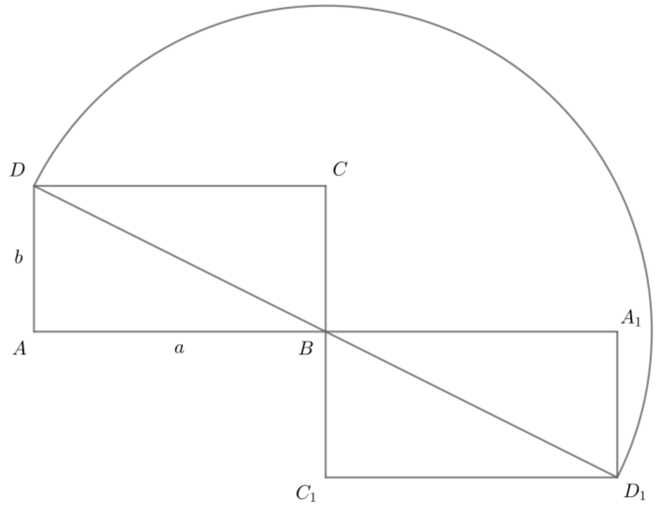
Но, $\overline{BD}^2=a^2+b^2$ и $ab=99$, па добиваме

$$m=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)+\frac{99}{2}+\frac{99}{2},$$ т.е.

$$m=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)+99.$$ **......(8 бода)**

Плоштината ќе биде минимална, т.е. m ќе има најмала вредност, кога изразот a^2+b^2 ќе биде минимален. Бидејќи a и b се позитивни цели броеви и $ab=1\cdot 99=3\cdot 33=9\cdot 11$, изразот a^2+b^2 е минимален за $a=9$ и $b=11$ (или $a=11$ и $b=9$). Тогаш $a^2+b^2=9^2+11^2=202$. Следува дека најмалата можна вредност на m е

$101\pi+99\ cm^2$. **......(7 бода)**



Задача 2: Нека A е множеството од сите двоцифрени природни броеви n, за кои со бришење на последната цифра се добива број кој е делител на n. Колку елементи има множеството A?

Решение: Нека $n=\overline{ab}=10a+b$ е број од множеството A. Ако ја избришеме последната цифра b, ќе остане само цифрата a, а според условот имаме дека a е делител на n. Но, $n=10a+b$, па мора a да биде делител и на b. **......(10 бода)**

Ако $b=0$, тогаш секој двоцифрен број n што завршува на 0 го исполнува дадениот услов, т.е. припаѓа во множеството A. Тоа се броевите 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 90.

......(7 бода)

Ако $b\neq 0$, тогаш имајќи предвид дека a е делител на b, другите броеви кои го исполнуваат дадениот услов се 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88 и 99. **......(7 бода)**

Според тоа, во множеството A има вкупно 32 броеви. **......(1 бод)**

Задача 3. Во едно истражување неколку ученици се прашани дали ја сакаат црвената боја. Точно 2% од момчињата одговориле дека ја сакаат и точно 59% од девојчињата одговориле дека ја сакаат. Се заедно, точно 17% од сите ученици ја сакаат црвената боја. Одреди го најмалиот можен број ученици во истражувањето.

Решние: (Нумерус 49-4, задача 4133) Нека x е број на момчиња, а y е број на девојчиња што учествувале во истражувањето. Од дадените информации имаме дека $\frac{2}{100}\cdot x=0{,}02\cdot x$ е бројот на момчиња што ја сакаат црвената боја, а $\frac{59}{100}\cdot y=0{,}59\cdot y$ е бројот на девојчиња што ја сакаат црвената боја. Бројот на сите ученици заедно што ја сакаат црвената боја е

$$\frac{17}{100}\cdot(x+y)=0{,}17\cdot(x+y).$$ **......(7 бода)**

Секоја од овие три вредности мора да е цел број. Од

$$0{,}02\cdot x+0{,}59\cdot y=0{,}17\cdot(x+y)$$

добиваме

$$2\cdot x+59\cdot y=17\cdot(x+y),$$
$$15\cdot x=42\cdot y,$$
$$y:x=5:14.$$ **......(3 бода)**

Значи, постои цел број t, така што $y=5\cdot t$ и $x=14\cdot t$. Бидејќи го бараме минималниот број на ученици, т.е. минималната вредност на збирот $x+y=19\cdot t$, треба да ја најдеме минималната вредност на бројот t. Но,

$$0{,}17\cdot(x+y)=\frac{17}{100}\cdot 19\cdot t$$

е цел број, па $100|17\cdot 19\cdot t$. Бидејќи НЗД$(17\cdot 19{,}100)=1$, следува дека $100|t$, а најмалиот таков позитивен број е $t=100$. **......(10 бода)** За оваа вредност на t добиваме дека $x=1400$ и $y=500$ кои се прифатливи вредности за x и y, бидејќи 2% од x е 28, а 59% од y е 295 и тие се цели броеви, а исто така и 17% од $(x+y)$ е цел број. Значи минималниот можен број на ученици е $1400+500=1900$. **......(5 бода)**

Задача 4. Две кружници k_1 и k_2, со радиуси 1 cm и 3 cm, соодветно, се допираат однадвор во точката A и имаат заедничка тангента (различна од онаа што минува низ точката A) која ги допира кружниците во точки B и C соодветно. Пресметај го збирот

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 .$$

Решение: Нека O_1 и O_2 се центри на кружниците k_1 и k_2 соодветно. Нека S е пресечна точка на тангентата определена со точките B и C и тангентата што минува низ точката A. Тогаш

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} . \qquad \textbf{......(6 бода)}$$

Поради тоа триаголникот BAC е правоаголен со прав агол во темето A и според Питагоровата теорема

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 . \quad \textbf{......(5 бода)}$$

Низ центарот O_1 повлекуваме права паралелна со тангентата низ точките B и C и нека P е пресечна точка на оваа права со правата CO_2. **......(6 бода)** Тогаш $\overline{CP} = \overline{BO_1} = 1cm$. Заради $\overline{BC}^2 = \overline{O_1P}^2$, од триаголникот O_2PO_1, според Питагоровата теорема имаме: $\overline{O_1P}^2 = \overline{O_1O_2} - \overline{PO_2}$, т.е. добиваме

$$\overline{BC}^2 = \overline{O_1P}^2 = \overline{O_1O_2} - \overline{PO_2} = (\overline{O_1A} + \overline{O_2A})^2 - (\overline{O_2C} - \overline{PC})^2 =$$

$$= (1+3)^2 - (3-1)^2 = 12cm \qquad \textbf{......(6 бода)}$$

Бараниот збир е

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 2 \cdot \overline{BC}^2 = 24\ cm. \qquad \textbf{......(2 бода)}$$