РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ОПШТИНСКИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2025

31.01.2025

Прва година

1А. Марија правела тест по математика, кој содржел задачи по алгебра, геометрија и логика. По проверка на резултатите, се покажало дека Марија точно решила половина од задачите по алгебра, 70% од задачите по геометрија и 80% од задачите по логика. Исто така, точно решила 62% од задачите по алгебра и логика заедно, и 74% од задачите по геометрија и логика заедно. Кој е процентот на задачи кои точно ги решила Марија од целиот тест?

Решение. Нека a, g, l се броевите на задачи кои Марија точно ги решила по алгебра, геометрија и логика, соодветно и нека A, G, L се вкупниот број на задачи од алгебра, геометрија и логика на тестот. Тогаш од условите на задачата имаме

$$a = 0,5A \qquad a + l = 0,62(A + L)$$
$$g = 0,7G \qquad g + l = 0,74(G + L) \quad \dots \textbf{(5)}.$$
$$l = 0,8L$$

Со замена во четвртата равенка добиваме

$$0,5A + 0,8L = 0,62A + 0,62L\,,$$

односно, $0,12A = 0,18L$, т.е. $A = 1,5L$ ... **(7)**.

Слично, со замена во петтата равенка добиваме:

$$0,7G + 0,8L = 0,74G + 0,74L\,,$$

односно $0,04G = 0,06L$, т.е. $G = 1,5L$ ... **(7)**.

Значи

$$\frac{a+g+l}{A+G+L} = \frac{0,5\cdot 1,5L + 0,7\cdot 1,5L + 0,8L}{1,5L + 1,5L + L} = \frac{2,6L}{4L} = 0,65\,.$$

Според ова, Марија точно решила 65% од задачите на тестот ... **(6)**.

1Б. Во понеделник, три банани чинеле колку еден лимон и еден портокал заедно. Во вторник, сите овошја се намалиле за иста сума на пари и два портокали чинеле колку три банани и еден лимон. Исто така, во вторник, цената на половина лимон била 5 денари. Колку била цената на 1 портокал во понеделник?

Решение. Нека x, y, z се цените на бананите, лимоните и портокалите во понеделник, соодветно. Нека намалувањето во вторник било за точно r денари. Тогаш, од условите на задачата, добиваме систем од линеарни равенки:

$$\begin{cases} 3x = y + z \\ 2(z - r) = 3(x - r) + (y - r) \\ 0,5\cdot(y - r) = 5 \end{cases} \qquad (1).\ \dots\textbf{(12)}$$

Решенијата на (1) може да се добијат ако втората равенка од (1) се запише како $2z = 3x - 2r + y$ и со замена од првата равенка за $3x = y + z$, се добива $2z = y + z - 2r + y$, т.е. $z = 2(y - r) = 20$.

Значи, цената на еден портокал во понеделник била 20 денари ...**(13)**.

2АБ. (Сигма 134, Задачи од училницата, Прва година, задача 3)

Докажи дека бројот $A = 4\cdot 3^{n^3 - n + 2}$, каде што n е природен број, може да се претстави како збир од три точни кубови на природни броеви.

Решение. Бројот A го запишуваме во облик

$$A=4\cdot 3^{n^3-n+2}=4\cdot 3^2\cdot 3^{n^3-n}=36\cdot 3^{n^3-n}=(1+8+27)3^{n^3-n} \text{ ... } \mathbf{(12)}.$$

Да забележиме и дека $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=(n-1)n(n+1)$ е производ на три последователни броеви и затоа, е делив со 3. Па, може да се презапише како $n^3-n=3p, p\in\mathbb{N}$ ...**(8)**. Следува дека

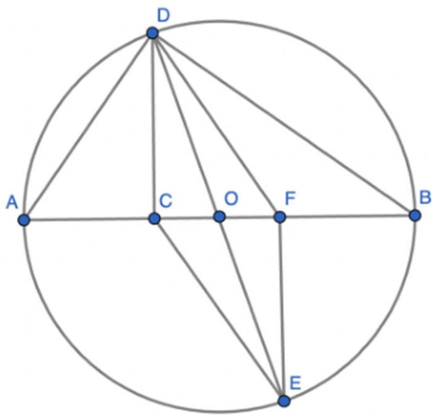
$$A=(1+8+27)3^{3p}=3^{3p}+8\cdot 3^{3p}+27\cdot 3^{3p}=\left(3^p\right)^3+\left(2\cdot 3^p\right)^3+\left(3\cdot 3^p\right)^3,$$

односно, бројот A може да се претстави како збир од три точни кубови ...**(5)**.

3АБ. (Сигма 135, Задачи од училницата, Прва година, задача 2)

Нека AB е дијаметар на кружница. Точката C лежи на отсечката AB при што важи $2\cdot\overline{AC}=\overline{CB}$. Точките D и E лежат на кружницата така што $DC\perp AB$ и DE е дијаметар на кружницата. Пресметај го односот на плоштините $P_{\Delta ABD}:P_{\Delta CDE}$.

Решение 1. Нека O е центарот на кружницата и нека F е подножје на нормалата од E кон AB. Бидејќи $\measuredangle DCO=\measuredangle EFO=90^\circ$, $\measuredangle DOC=\measuredangle EOF$, како накрсни и $\overline{DO}=\overline{EO}$, триаголниците ΔDCO и ΔEFO се складни ...**(5)**, па $\overline{CO}=\overline{FO}$. Тогаш, од $\overline{AO}=\overline{BO}$ следува $\overline{AC}=\overline{BF}$. Од $2\overline{AC}=\overline{BC}$, мора $\overline{CF}=\overline{BF}$, значи $\overline{CF}=\frac{1}{3}\overline{AB}$ …**(8)**.



Четириаголникот $DCEF$ има дијагонали кои се преполовуваат, па тој е паралелограм, од каде следува дека $P_{\Delta COE}=P_{\Delta DOF}$ .. **(4)**. Тогаш, $P_{\Delta CDE}=P_{\Delta DCF}$, па за бараниот однос (имајќи во предвид дека DC е висина во двата триаголници) имаме:

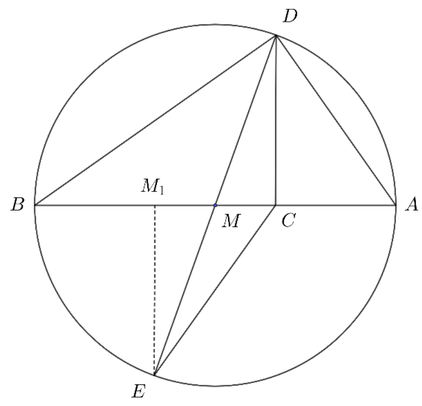
$$\frac{P_{\Delta ABD}}{P_{\Delta CDE}}=\frac{P_{\Delta ABD}}{P_{\Delta DCF}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{DC}\cdot\overline{AB}}{\frac{1}{2}\overline{DC}\cdot\overline{CF}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CF}}=3 \text{ ... } \mathbf{(8)}.$$

Решение 2. Нека M е центар на дадената кружница и M_1 е проекција на точката E врз AB. Триаголниците CDM и CEM имаат еднаква плоштина. Имено,

$P_{\Delta CDM}=\frac{1}{2}\cdot\overline{MC}\cdot\overline{DC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{MC}\cdot\overline{EM_1}=P_{\Delta CEM}$.

Следува дека $P_{\Delta CDE}=2\cdot P_{\Delta CDM}$ …**(7)**

Бидејќи $\overline{AC}=\frac{1}{3}\cdot\overline{AB}$ и $\overline{AM}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}$ имаме дека $\overline{CM}=\overline{AM}-\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}-\frac{1}{3}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{6}\cdot\overline{AB}$ ...**(7)**



Триаголниците ABD и CDM имаат иста висина спуштена од темето D соодветно кон основите AB и CM, па плоштината на триаголникот ABD е

$P_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{DC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\overline{CM}\cdot\overline{DC}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{CM}\cdot\overline{DC}=6\cdot P_{\Delta CDM}$. …**(7)**

Од добиените равенства погоре следува дека

$P_{\Delta ABD}:P_{\Delta CDE}=\frac{6\cdot P_{\Delta CDM}}{2\cdot P_{\Delta CDM}}=\frac{6}{2}=3$. Конечно, $P_{\Delta ABD}:P_{\Delta CDE}=3:1$. ...**(4)**

4А. Ако a, b, c се реални броеви за кои важи $abc=1$, пресметај ја вредноста на изразот:

$$A=\frac{20a+2025}{a+ab+1}+\frac{20b+2025}{b+bc+1}+\frac{20c+2025}{c+ac+1}.$$

Решение. Од $abc=1$, следува дека броевите се ненулти ...**(5)**. Броителот и именителот од првиот собирок ги множиме со $c\neq 0$, а во вториот собирок со $ac\neq 0$. Последователно важат равенствата:

$$A=\frac{c(20a+2025)}{c(a+ab+1)}+\frac{ac(20b+2025)}{ac(b+bc+1)}+\frac{20c+2025}{c+ac+1}==\frac{20ac+2025c}{ac+abc+c}+\frac{20abc+2025ac}{abc+acbc+ac}+\frac{20c+2025}{c+ac+1}=$$

$$=\frac{20ac+2025c}{ac+1+c}+\frac{20abc+2025ac}{1+c+ac}+\frac{20c+2025}{c+ac+1}==\frac{20ac+2025c+20abc+2025ac+20c+2025}{ac+c+1}=$$

$$=\frac{2045ac+2045c+2045}{ac+c+1}=2045,$$

каде повеќекратно искористивме дека $abc=1$ ...**(20)** (поените може да се поделат зависно од бројот на испишани чекори.)

Напомена. Мора да се напомене дека *a*, *ac* не се 0 пред да се помножат дропките. Во случај на точно решение без заклучок дека *a*, *ac* се ненулти, се даваат најмногу 20 поени.

4Б. Нека *a*, *b*, *c* се реални броеви за кои важи $a+b+c=1$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3+3(1-a)(1-b)(1-c)=1.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}1=(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc\right)=\\&=a^3+b^3+c^3+3\left(a^2b+ab^2+b^2c+abc+bc^2+c^2a+ca^2+abc\right)=\\&=a^3+b^3+c^3+3\left(b\left(a^2+ab+bc+ac\right)+c\left(bc+ca+a^2+ab\right)\right)=\\&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\left(a^2+ab+bc+ca\right)=\\&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\left(a(a+b)+c(a+b)\right)=\\&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(a+c)(a+b).\end{aligned}\quad \text{... }\mathbf{(20)}$$

Користејќи дека $b+c=1-a,\ a+c=1-b,\ a+b=1-c$ и заменувајќи во последното равенство, се добива бараното ... **(5)**.

Втора година

1АБ. (Сигма 135, Задачи од училница, задача 4) Нека a,b,c и d се меѓусебно различни реални броеви. Нека a и b се решенија на равенката $x^2-10cx-11d=0$, а c и d се решенија на $x^2-10ax-11b=0$. Одреди го збирот $a+b+c+d$.

Решение: Од Виетовите формули имаме $a+b=10c$ и $c+d=10a$. ...**(5)** Ако ги собереме последните две равенки добиваме $a+b+c+d=10(a+c)$....**(3)** Од тоа што a е решение на равенката $x^2-10cx-11d=0$ и $d=10a-c$ следува

$$0=a^2-10ca-11d=a^2-10ca-11(10a-c)=a^2-110a+11c-10ac\text{....}\mathbf{(5)}$$

Аналогно добиваме: $c^2-110c+11a-10ac=0.$...**(3)**

Ако ги одземеме овие две последни равенки добиваме: $(a-c)(a+c-121)=0$....**(4)**

Последната равенка ја делиме со $a-c\neq 0$ и добиваме $a+c=121$.

Значи $a+b+c+d=10(a+c)=10\cdot 121=1210$. ...**(5)**

2А. (Сигма 134, Задачи од училница, задача 4)

Ако z е комплексен број, а a и b комплексни броеви такви што $|a|=|b|=1, a\neq b$, докажи дека бројот

$\frac{1}{a-b}\left(z+ab\overline{z}-a-b\right)$ е имагинарен.

Решение. Да означиме $w=\frac{1}{a-b}\left(z+ab\overline{z}-a-b\right)$. За да го докажеме тврдењето на задачата, доволно е да докажеме дека $\overline{w}=-w$. ...**(10)** Користејќи го условот на задачата имаме $a\overline{a}=b\overline{b}=1$, од каде добиваме

$$\overline{w}=\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\left(\overline{z}+\frac{1}{ab}z-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{ab}{b-a}\cdot\frac{1}{ab}\left(ab\overline{z}+z-b-a\right)$$

$$=-\frac{1}{a-b}\left(z+ab\overline{z}-a-b\right)=-w. \text{ ...}\mathbf{(15)}$$

2Б. (Сигма 130, Задачи од училница, задача 1) Нека x е реален број за кој важи $x+\frac{1}{x}=3$ и нека $S_m=x^m+\frac{1}{x^m}$. Одреди ја вредноста на S_7.

Решение. Прво со помош на дадената врска $x+\frac{1}{x}=3$ ја наоѓаме вредноста на изразот

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7. \text{ ...}\mathbf{(8)}$$

Сега со помош на овој чекор ја наоѓаме вредноста на

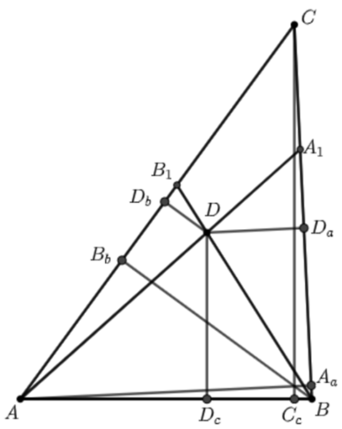
$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\cdot7-3=18. \text{ ...}\mathbf{(8)}$$

Следува $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$. ...**(4)**

Конечно забележуваме дека $S_7=x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$, односно

$S_7=18\cdot47-3=843$. ...**(5)**

3АБ. Нека D е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека AD ја сече BC во A_1, а BD ја сече AC во B_1. Ако плоштината на триаголниците ABD, AB_1D и BA_1D се 14, 4 и 7, соодветно, определи ја плоштината на четириаголникот CB_1DA_1.



Решение. Нека AA_a, BB_b и CC_c се висините на триаголникот ABC, каде што A_a, B_b и C_c се подножјата на висините. Нека DD_a, DD_b и DD_c се нормали кон страните BC, AC и AB, каде што D_a, D_b и D_c лежат на соодветната страна. Нека P е плоштината на триаголникот ABC. ...**(2)**

Тогаш имаме: $\frac{P}{P_{ABD}}=\frac{P}{14}=\frac{\overline{CC_c}}{\overline{DD_c}}$ ...**(3)**, $\frac{P_{ABA_1}}{P_{DBA_1}}=\frac{14+7}{7}=\frac{\overline{AA_a}}{\overline{DD_a}}$ ... **(4)**, $\frac{P_{BB_1A}}{P_{DB_1A}}=\frac{14+4}{4}=\frac{\overline{BB_b}}{\overline{DD_b}}$ ...**(3)** и оттука $\overline{DD_c}=14\frac{\overline{CC_c}}{P}$, $\overline{DD_a}=7\frac{\overline{AA_a}}{21}=\frac{\overline{AA_a}}{3}$ и $\overline{DD_b}=4\frac{\overline{BB_b}}{18}=\frac{2\overline{BB_b}}{9}$ ...**(3)**

За плоштината на триаголникот ABC имаме $P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DD_c}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{DD_a}}{2}+\frac{\overline{CA}\cdot\overline{DD_b}}{2}=$

$\frac{\overline{AB}}{2}\cdot 14\frac{\overline{CC_c}}{P}+\frac{\overline{BC}}{2}\cdot\frac{\overline{AA_a}}{3}+\frac{\overline{CA}}{2}\cdot\frac{2\overline{BB_b}}{9}=14\frac{P}{P}+\frac{P}{3}+\frac{2P}{9}$, односно $P=14+\frac{P}{3}+\frac{2P}{9}$ и оттука $\frac{4P}{9}=14$, т.е. $P=\frac{63}{2}$ ...**(5)**. Тогаш за плоштината на четириаголникот CB_1DA_1 имаме $\frac{63}{2}-4-14-7=\frac{13}{2}$. ...**(5)**

4А. За кои вредности на параметарот $a\geq 0$ равенката $2|x-a|+3|x+a|=1$ има барем едно реално решение?

Решение: Ќе разгледаме неколку случаи. Ако $x<-a$, тогаш дадената равенка го добива следниот облик: $-2(x-a)-3(x+a)=1$. Оттука добиваме $x=-\frac{a+1}{5}$ ....**(5)** Дадената равенка има барем едно решение, па затоа треба да важи $-\frac{a+1}{5}<-a$, односно $a<\frac{1}{4}$ ...**(2)** Ако $-a\leq x\leq a$, тогаш добиваме $-2(x-a)+3(x+a)=1$. Оттука добиваме $x=1-5a$ ...**(5)**, па во овој случај треба да важи $-a\leq 1-5a\leq a$, односно $\frac{1}{6}\leq a\leq\frac{1}{4}$ ...**(2)**. Ако $x>a$, тогаш имаме $2(x-a)+3(x+a)=1$. Оттука добиваме $x=\frac{1-a}{5}$ ...**(5)**. За x да биде решение на дадената равенка, треба да важи $\frac{1-a}{5}>a$, односно $a<\frac{1}{6}$ ...**(2)**. Заклучуваме дека дадената равенка има реално решение за $0\leq a\leq\frac{1}{4}$....**(4)**

4Б. Реши го системот равенки: $\begin{cases}3x+2y=1\\ |x-y|+y=1\end{cases}$.

Решение: Ќе разгледаме два случаи: $x\geq y$ и $x<y$...**(4)**. За $x\geq y$ важи $|x-y|=x-y$. Втората равенка од системот станува $x-y+y=1\Leftrightarrow x=1$. Заменуваме во првата равенка и добиваме $3+2y=1\Leftrightarrow y=-1$. Навистина, $x=1>-1=y$, па ова е едно решение...**(9)**. За $x<y$ важи $|x-y|=y-x$. Втората равенка од системот станува $-x+2y=1$.Ја одземаме втората равенка од првата и добиваме $4x=0\Leftrightarrow x=0$. Заменуваме во првата равенка и добиваме $2y=1\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$. Навистина, $x=0<\frac{1}{2}=y,$ па со тоа добивме уште едно решение...**(9)**. Заклучуваме дека решенија на дадениот систем равенки се $(x,y)=(1,-1)$ и $(x,y)=(0,\frac{1}{2})$ ....**(3)**

Трета година

1АБ. (Сигма 134, Задачи од училницата, задача 1)
Реши ја равенката $2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$.

Решение. Ја трансформираме равенката во облик $4^x\cdot 9^x-\frac{6^{3x}}{3}+\frac{4^{2x}\cdot 9^{2x}}{36}=0$ ...**(5)** односно $36^x-\frac{36^x\cdot 6^x}{3}+\frac{36^{2x}}{36}=0.$ Множиме со 36 и ја добиваме еквивалентната равенка

$$36\cdot 36^x-12\cdot 36^x\cdot 6^x+36^{2x}=0 \text{ ...}\mathbf{(10)}$$

Ако равенката ја поделиме со $36^x \neq 0$ ја добиваме равенката $36^x - 12 \cdot 6^x + 36 = 0$ која со воведување на смената $6^x = y$ се сведува на квадратна равенка од облик $y^2 - 12 \cdot y + 36 = 0$ ...**(5)**
Решенијата на равенката се $y_1 = y_2 = 6$, а со замена $6^x = 6$ добиваме дека $x = 1$. ...**(5)**

2АБ. (Сигма 130, Задачи од училницата, задача 4)

Докажи дека ако $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$, тогаш $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1$.

Решение. Од $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$, со квадрирање добиваме $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 3$, ...**(5)** односно од $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x \cos x = 1$. ...**(5)** Сега може да запишеме $\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 1$ ... **(10)** односно $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1$. ...**(5)**

3А. Нека функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 1$ е зададена на множеството $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^4 + 36 \leq 13x^2 \right\}$. Одреди ги најмалата и најголемата вредност на функцијата f.

Решение. Решение на неравенката $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$ е унијата на интервали $[-3,-2] \cup [2,3]$. Навистина, со смена $y = x^2$, неравенката добива облик $y^2 - 13y + 36 \leq 0$. Квадратната равенка $y^2 - 13y + 36 = 0$, има решенија $y_1 = 4, y_2 = 9$, а затоа што квадратната парабола е отворена нагоре, функцијата прима негативни вредности или е еднаква на нула за $x^2 = y \in [4,9]$...**(8)**. Значи, $4 \leq x^2 \leq 9 \;\Leftrightarrow\; 2 \leq |x| \leq 3 \;\Leftrightarrow\; x \in [-3,-2] \cup [2,3]$. ...**(2)** Функцијата $f(x) = x^2 - 2x - 1$ има теме во точката $x = 1$, во која го постигнува и својот минимум. Затоа јасно е дека $f(x)$, во однос на добиените интервали на кои е дефинирана, опаѓа на интервалот $[-3,-2]$, а расте на $[2,3]$. ...**(5)** Сега, може да запишеме:

1) За $x \in [-3,-2]$, $14 = f(-3) \geq f(x) \geq f(-2) = 7$. ...**(4)**
2) За $x \in [2,3]$, $-1 = f(2) \leq f(x) \leq f(3) = 2$. ...**(4)**

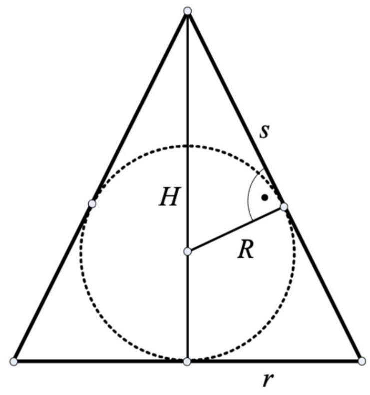
Конечно, најмалата вредност на функцијата f е $m = -1$, за $x = 2$, а најголемата е $M = 14$, а се постигнува во $x = -3$. ...**(2)**

3Б. Нека за a и b реални броеви, каде $a \neq 0$, равенките $ax^2 + bx + b = 0$ и $ax^2 + ax + b = 0$ имаат реални корени. Производот на еден корен на првата равенка со еден корен на втората равенка е 1. Одреди колку е збирот $a + b$.

Решение. Да ги означиме со y - коренот на $ax^2 + bx + b = 0$ и z - коренот на $ax^2 + ax + b = 0$, за кои $yz = 1$. ...**(5)** Јасно, $y, z \neq 0$, па од $z = \frac{1}{y}$, со замена во соодветните равенки добиваме $ay^2 + by + b = 0$ и $a\frac{1}{y^2} + a\frac{1}{y} + b = 0 \;\Leftrightarrow\; by^2 + ay + a = 0$ ....**(8)** Ги собираме двете равенства, од каде имаме ново равенство $(a+b)y^2 + (a+b)y + (a+b) = 0 \;\Leftrightarrow\; (a+b)(y^2 + y + 1) = 0$ ...**(5)**. Јасно, $y^2 + y + 1 \neq 0$ ...**(5)** секогаш, па заклучуваме дека $a + b = 0$. ...**(2)**

4А. Даден е конус чија обвивка има плоштина M и чија основа има плоштина B. Ако волуменот на конусот е два пати поголем од волуменот на топката впишана во конусот, одреди ја вредноста на количникот $\frac{M}{B}$.

Решение. Нека H е висината на конусот, r - радиусот на основата на конусот, R - радиусот на впишаната топка и s – генератрисата на конусот. Од сличноста на правоаголните триаголници на цртежот важи $\frac{r}{s}=\frac{R}{H-R}$ ....**(5)** Исто така, $H=\sqrt{s^2-r^2}$. Го средуваме првиот израз, па добиваме $Rs=r(H-R) \Leftrightarrow R(s+r)=rH$, од каде $R=\frac{rH}{s+r}$. ...**(5)** Понатаму заменуваме за висината H и имаме $R=\frac{r\sqrt{s^2-r^2}}{s+r}=r\sqrt{\frac{s-r}{s+r}}$ . ...**(5)**



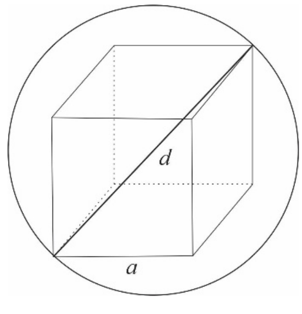
Ќе ги означиме волумените на двете тела со V_1 - волуменот на конусот и V_2 - волуменот на топката. Односот на волумените е 2, па важи

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{r^2\pi H}{3}}{\frac{4R^3\pi}{3}}=\frac{r^2H}{4R^3}=\frac{r^2\sqrt{(s-r)(s+r)}}{4r^3\sqrt{\frac{(s-r)^3}{(s+r)^3}}}=\frac{1}{4r}\frac{(s+r)^2}{s-r}=2 \text{ ....(5)}$$

Од последната релација се добива $8r(s-r)=(s+r)^2 \Leftrightarrow 8rs-8r^2=s^2+2sr+r^2 \Leftrightarrow (3r-s)^2=0$, а од тука јасно, $s=3r$. ...**(5)** Сега, $\frac{M}{B}=\frac{r\pi s}{r^2\pi}=\frac{s}{r}=3.$ Бараниот количник е 3. ...**(5)**

4Б. Дадена е коцка во која е впишана сфера, а во сферата повторно е впишана коцка. Во оваа (втората) коцка е впишана сфера и на крај, во втората сфера е повторно впишана коцка (три коцки и две сфери). Одреди го односот на волумените на најголемата (надворешната) коцка и најмалата (внатрешната) коцка.

Решение. Ќе ја означиме страната на внатрешната коцка (најмалата) со a. Дијаметарот на сферата која е опишана околу неа изнесува колку просторната дијагонала на коцката, што изнесува точно $d=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}.$ ...**(10)** Страната на следната опишана коцка одговара на должината на дијаметарот на претходната сфера, па е точно $a\sqrt{3}.$ ...**(5)** Сега е веќе јасно дека односот на страната на коцката и опишаната сфера, изнесува точно $\sqrt{3}$, па втората сфера има дијаметар $a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3a,$ а најголемата коцка има страна $3a.$ ...**(5)**



Односот на волумените на најголемата и најмалата коцка е тогаш $\frac{(3a)^3}{a^3}=27.$ ...**(5)**

Забелешка. Лесно може од самиот почеток, заради поедноставување да се искористи должина 1 за внатрешната коцка. Може да се напомене и дека страните на коцките, како што се поставени, формираат геометриска низа со количник $\sqrt{3}$.

Четврта година

1А. (Сигма 126, Задача 4 од училницата, 4 година)

Одреди ги сите позитивни реални броеви a,b,c за кои што важи $2\sqrt{a}+3\sqrt{b}+6\sqrt{c}=a+b+c=49$.

Решение. Од тоа што $a+b+c-2\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}+6\sqrt{c}\right)=49-2\cdot 49=-49$ имаме

$$a+b+c-2\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}+6\sqrt{c}\right)+49=0 \text{ , ... (12)}$$

Односно $a-4\sqrt{a}+4+b-6\sqrt{b}+9+c-12\sqrt{c}+36=\left(\sqrt{a}-2\right)^2+\left(\sqrt{b}-3\right)^2+\left(\sqrt{c}-6\right)^2=0$. ... **(8)**

Јасно, за исполнување на горното равенство секој квадрат мора да е еднаков на нула, па важи $a=4, b=9, c=36$. ... **(5)**

2А. (Сигма 135, Задача 4 од училницата, 4 година)

Низата a_n е зададена со $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$. Одреди ја формулата за општиот член на низата a_n, како функција од n.

Решение 1. Јасно е дека $0\le a_n\le 1$. Значи може да ја искористиме смената $a_n=\sin\alpha$, каде за аголот важи $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ... **(10)** Тогаш $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}$. **(5)**

Според тоа $a_1=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3\cdot 2}$, $a_2=\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^2}$, ... итн., односно $a_n=\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$. **(10)**

Решение 2. Со принципот на математичка индукција лесно се покажува дека за секој n важи $0<a_n<\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots$ **(5)**. Нека $a_n=sint,$ за $t\in(0,45^\circ)\ldots$ **(5).**

Тогаш $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-sin^2t}}{2}}=\sqrt{\frac{1-cost}{2}}=sin\left(\frac{t}{2}\right)\ldots$ **(5)**

Значи, добивме дека ако $a_n=sint$, за некое t, тогаш $a_{n+1}=sin\left(\frac{t}{2}\right)$.

Со п.м.и. ќе докажеме дека општиот член на низата е $a_n=sin\left(\frac{30^\circ}{2^{n-1}}\right)\ldots$**(5)** Имаме, $a_1=\frac{1}{2}=sin30^\circ=sin\left(\frac{30^\circ}{2^{1-1}}\right)$. Нека сега важи $a_k=sin\left(\frac{30^\circ}{2^{k-1}}\right)$, за некое k. Тогаш, од претходниот заклучок добиваме $a_{k+1}=sin\left(\frac{\frac{30^\circ}{2^{k-1}}}{2}\right)=sin\left(\frac{30^\circ}{2^k}\right)=sin\left(\frac{30^\circ}{2^{(k+1)-1}}\right)$. Од п.м.и. следува дека $a_n=sin\left(\frac{30^\circ}{2^{n-1}}\right)$, за секој природен број n. **(5)**

3А. На еден натпревар учествувале 100 ученици и биле дадени пет задачи. Познато е дека секоја задача ја решиле барем 60 ученици. Докажи дека постојат двајца ученици кои **заедно** ги решиле сите задачи.

Решение. Првата задача не ја решиле најмногу 40 ученици (бидејќи ја решиле најмалку 60), па бројот на парови ученици, такви што ниту еден ученик во парот не ја решил првата задача е најмногу $\binom{40}{2}$.... **(5)**. Бидејќи аналогно размислување важи и за преостанатите задачи, следува дека бројот на парови ученици, такви што ниту еден ученик во тој пар не решил одредена задача, не е поголем од $5\cdot\binom{40}{2}=3900$ ... **(10)**. Но, бидејќи вкупниот број парови ученици е $\binom{100}{2}=4950>3900$, следува дека постои пар ученици кои заедно ги решиле сите пет задачи... **(10)**

4А. Нека $a<b<c$, $a+c=2b$ и $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, каде $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$ се должините на страните, а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница на ΔABC. Одреди ја големината на аголот во темето B.

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{b}{\sin\beta}=2R$ т.е. $b=2R\sin\beta$. Плоштината на ΔABC е $P=sr=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=\frac{abc}{4R}$, од каде со замена на $a+c=2b$ се добива: $\frac{3b}{2}\cdot r=\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow 6rR=ac$. ...**(8)**

Од косинусната теорема имаме

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta=\left(a+c\right)^2-2ac-2ac\cos\beta=\left(a+c\right)^2-2ac\left(1+\cos\beta\right)=$$

$$=\left(2b\right)^2-2\cdot 6rR\left(1+\cos\beta\right)$$

$$12rR\left(1+\cos\beta\right)=3b^2\Leftrightarrow 4rR\left(1+\cos\beta\right)=4R^2\sin^2\beta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r\left(1+\cos\beta\right)=R\left(1+\cos\beta\right)\left(1-\cos\beta\right)$$ ...**(12)**

Ако последното равенство го скратиме со $1+\cos\beta$, бидејќи $\beta\neq 180^0$ ќе добиеме дека $r=R\left(1-\cos\beta\right)$. Од условот на задачата имаме дека $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1-\cos\beta$ од каде следува

дека $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ т.е. $\beta=30^0$. ...**(5)**

1Б. (Сигма 128, Задача 3 од училницата, 3 година)

Нека a,b,c,d се четири последователни членови на геометриска прогресија. Докажи дека $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+d^2\right)=\left(ab+bc+cd\right)^2$.

Решение. Од тоа што a,b,c,d се четири последователни членови на геометриска прогресија, може да ставиме дека $b=aq,\ c=aq^2,\ \ d=aq^3$, ... **(8)**

па $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2+d^2\right)=\left(a^2+a^2q^2+a^2q^4\right)\left(a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6\right)=a^4q^2\left(1+q^2+q^4\right)^2$ ....**(12)**

Слично, $\left(ab+bc+cd\right)^2=\left(a^2q+a^2q^3+a^2q^5\right)^2=a^4q^2\left(1+q^2+q^4\right)^2$ со што е докажано бараното равенство....**(5)**

2Б. **(Сигма 128, Задача 3 од училницата, 3 година)**

На колку различни начини можат да се постават 3 шаховски фигури топ на шаховска табла (8x8), така што топовите меѓусебно не се напаѓаат?

Забелешка: Топот напаѓа исклучиво по хоризонтала и по вертикала.

Решение. Првиот топ може да се постави било каде на таблата, односно постојат $8\cdot 8=64$ можни позиции. ... **(5)** Бидејќи првиот топ не треба да го напаѓа вториот топ, за вториот топ остануваат $7\cdot 7=49$ слободни полиња каде може да се постави (без една редица и една колона на кои напаѓа првиот топ). ...**(6)** На сличен начин, за третиот топ остануваат $6\cdot 6=36$ слободни полиња. ...**(6)** Бидејќи редоследот на поставување на топовите не е битен (сите се еднакви меѓу себе), вкупно можни начини на поставување на топовите, без било кои два меѓусебно да се напаѓаат меѓу себе, има $\frac{64\cdot 49\cdot 36}{3!}=18816$....**(8)**

3Б. Одреди ги сите парови на ненегативни цели броеви (a,b) кои ја задоволуваат равенката:

$$2^a\cdot 3^b-3^{b+1}+2^a=13.$$

Решение. Равенката може да ја запишеме во облик $(2^a-3)\cdot 3^b=13-2^a$.

Бидејќи $3^b>0$, броевите 2^a-3 и $13-2^a$ треба да имаат ист знак. ... **(5)**

Притоа, единствено можно е $2^a-3>0$ и $13-2^a>0$ па оттука добиваме дека $3<2^a<13$....**(10)**

Ненегативни цели броеви за кои важи ова двојно неравенство се $a=2$ и $a=3$. ...**(5)**

За $a=2$ имаме $1\cdot 3^b=9$ па $b=2$.

За $a=3$ имаме $5\cdot 3^b=5$ па $b=0$.

Значи, единствени решенија се паровите (2,2) и (3,0)....**(5)**
(**Напомена.** Постојат и други начини на решавање.)

4Б. Докажи дека за сите реални броеви x и y важи неравенството

$$(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 \geq 0.$$

Кога важи знакот за равенство?
Решение. Забележуваме,
$(x+y)(x+4y)=x^2+5xy+4y^2$ и $(x+2y)(x+3y)=x^2+5xy+6y^2$. ...**(7)**
Нека $t=x^2+5xy+4y^2$. Тогаш,

$$\begin{aligned}(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 &= t(t+2y^2)+y^4\\ &= t^2+2ty^2+y^4=(t+y^2)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ...**(10)**
Знакот за равенство важи ако и само ако $t=-y^2$, односно $x^2+5xy+4y^2=-y^2$, т.е. $x^2+5xy+5y^2=0$... **(3)** Со решавање на оваа равенка (квадратна) по една од променливите, добиваме $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}y$ .... **(5)**