РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД РЕГИОНАЛНИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2025
15.02.2025

Прва година

1АБ. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xyz(x+y+z)=2024$.

а) Докажи дека $\left(x^2+\frac{2024}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{2024}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{2024}{x^2}\right)=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$.

б) Дали постои барем една тројка од природни броеви (x,y,z) кои го задоволуваат равенството под а)? Образложи го одговорот.

Решение. Да забележиме дека од условот $xyz(x+y+z)=2024$ важи

$$x^2+\frac{2024}{y^2}=x^2+\frac{xyz(x+y+z)}{y^2}=x^2+\frac{xz(x+y+z)}{y}$$
$$=\frac{x^2y+xz(x+y+z)}{y}=\frac{x(xy+zx+zy+z^2)}{y}$$
$$=\frac{x(x(y+z)+z(y+z))}{y}=\frac{x}{y}(x+z)(y+z)\text{. ... }\mathbf{(10)}$$

Слично, $y^2+\frac{2024}{z^2}=\frac{y}{z}(y+x)(z+x)$... **(3)** и $z^2+\frac{2024}{x^2}=\frac{z}{x}(x+y)(z+y)$. ...**(3)**

Множејќи ги трите равенства и воочувајќи дека $\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}=1$, се добива бараното равенство.... **(3)**.

б) Да. Лесно се проверува дека $x=y=1, z=44$ го задоволува равенството $xyz(x+y+z)=2024$, а ова повлекува дека е задоволено и почетното равенство во а).... **(6)**

2А. (Рубрика задачи Сигма 135, задача 1831)
Нека a и b се цели броеви такви што a^2+2b е квадрат на цел број. Докажи дека a^2+b може да се запише како збир од квадрати на два цели броја.

Решение. Според условот може да запишеме $a^2+2b=k^2$, за некој цел број k. Тогаш, $b=\frac{k^2-a^2}{2}$ е исто така цел број, па мора a и k да се со иста парност... **(6)**. Сега, $a^2+b=a^2+\frac{k^2-a^2}{2}=\frac{a^2+k^2}{2}$, и важи

$$\frac{a^2+k^2}{2}=\frac{a^2+2ak+k^2+a^2-2ak+k^2}{4}=\frac{(a+k)^2+(a-k)^2}{4}=\left(\frac{a+k}{2}\right)^2+\left(\frac{a-k}{2}\right)^2\text{ ... }\mathbf{(15)}.$$

Останува да забележиме дека броевите $\frac{a+k}{2},\frac{a-k}{2}$ се цели заради тоа што a, k се со иста парност ....**(4)**.

2Б. (Сигма 135, Задачи од училницата, прва година)
Докажи дека бројот $19^{19}+69^{69}$ е содржател на бројот 44.

Решение. Ќе докажеме дека бројот 44 е делител на $19^{19}+69^{69}$.
Да означиме $A=19^{19}+69^{69}$. Тогаш со алгебарски трансформации добиваме

$$A=19^{19}+69^{69}=(19^{19}+1)+(69^{69}-1)=$$
$$=(19+1)(19^{18}-19^{17}+\dots\dots+1)+(69-1)(69^{68}+69^{67}+\dots\dots+1)=$$
$$=20a+68b=4(5a+17b),$$

каде што $a=19^{18}-19^{17}+\dots\dots+1$ и $b=69^{68}+69^{67}+\dots\dots+1$. Значи $4|A$ ....**(8)**.
Од друга страна, $A=19^{19}+69^{69}=(19^{19}+3^{19})+(69^{69}-3^{69})+(3^{69}-3^{19})=$

$$=(19+3)(19^{18}-19^{17}\cdot 3+\dots\dots+3^{18})+(69-3)(69^{68}+69^{67}\cdot 3+\dots\dots+3^{68})+3^{19}(3^{50}-1)=$$
$$=22k+66m+3^{19}(243^{10}-1)=$$
$$=22k+66m+3^{19}(243-1)(243^9+243^8+\dots\dots+1)=$$
$$=22k+66m+3^{19}\cdot 242n=11(2k+6m+3^{19}\cdot 22n).$$

каде што $k=19^{18}-19^{17}\cdot 3+\dots\dots+3^{18}$, $m=69^{68}+69^{67}\cdot 3+\dots\dots+3^{68}$
и $n=243^9+243^8+\dots\dots+1$. Значи $11|A$.... **(14)**.
Бидејќи НЗД$(4,11)=1$, следува дека $44|A$, односно A е содржател на бројот 44 ....**(3)**.
Забелешка. Задачата може да се реши и со разгледување на остатоци (конгруенции).

3АБ. (Сигма 134, Задачи од училницата, прва задача)
На табла се запишани неколку различни природни броеви. Ако најмалиот се зголеми 32 пати, збирот на броевите запишани на таблата ќе биде еднаков на 477. Ако најголемиот се зголеми 14 пати, тогаш збирот на броевите запишани на таблата е исто така еднаков на 477. Кои броеви може да бидат запишани на таблата?
Решение. Нека $x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n$ се природните броевите запишани на таблата и нека $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, за $n \geq 2$. По услов на задачата имаме дека

$$32x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n = 477 \text{ и}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + 14x_n = 477\ .$$

Со изедначување на двете равенства добиваме

$$32x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + 14x_n\ ,$$
$$31x_1 = 13x_n \text{ ...}\mathbf{(5)}.$$

Броевите 31 и 13 се заемно прости, па мора да важи $x_1 = 13k$ и $x_n = 31k$, $k \in \mathbb{N}$. Ако $k \geq 2$, тогаш

$$32x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_n > 32x_1 = 32 \cdot 13k \geq 32 \cdot 13 \cdot 2 > 477,$$

што е невозможно. Значи $k = 1$, па $x_1 = 13$ и $x_n = 31$. ...**(8)** Тогаш

$$32 \cdot 13 + x_2 + x_3 + \dots\dots + x_{n-1} + 31 = 477,$$

т.е. збирот на останатите броеви е

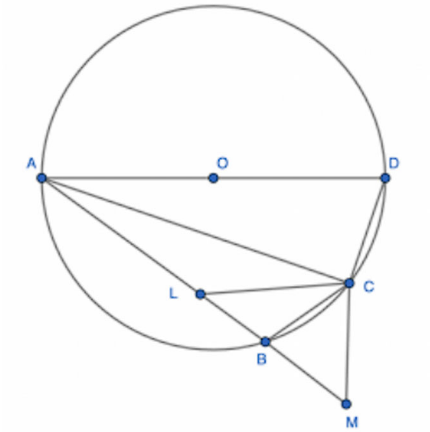
$$x_2 + x_3 + \dots\dots + x_{n-1} = 30.$$

Притоа, тие се поголеми од 13, а помали од 31... **(3)**.
- Ако е останат само еден број, тогаш тој мора да е еднаков на 30, па во овој случај на таблата се запишани броевите 13, 30 и 31. ....**(2)**
- Ако се останати два броја, тогаш тоа се само броевите 14 и 16. Нивниот збир е еднаков на 30, па во овој случај на таблата се запишани броевите 13, 14, 16 и 31. ...**(4)**
- Ако се останати повеќе од три двоцифрени броеви, тогаш нивниот збир е е поголем од $13 \cdot 3 = 39$.... **(3)**

Значи, на таблата може да бидат запишани броевите 13, 30 и 31 или 13, 14, 16 и 31.

4А. Даден е триаголник ABC. Нека точките L и M се пресеци на симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C со правата AB, соодветно. Ако важи $\overline{CL} = \overline{CM}$, докажи дека $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4R^2$, каде R е радиусот на опишаната кружница на ΔABC.

Решение. Нека $\measuredangle ABC = \beta, \measuredangle ACB = \gamma, \measuredangle BAC = \alpha$. Да забележиме дека од тоа што CL и CM се симетрали, важи $\measuredangle LCM = \measuredangle LCB + \measuredangle BCM = \frac{\gamma}{2} + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ$ .... **(5)** Од условот, следи дека ΔCML е рамнокрак правоаголен, од каде $\measuredangle CLM = 45^\circ$ и $\measuredangle ALC = 135^\circ$. Имајќи во предвид дека збир на аглите во триаголник е 180°, (за $\Delta ALC, \Delta BLC$) добиваме $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 45^\circ$ и $\beta + \frac{\gamma}{2} = 135^\circ$, па важи $\beta - \alpha = 90^\circ$ ... **(7)**

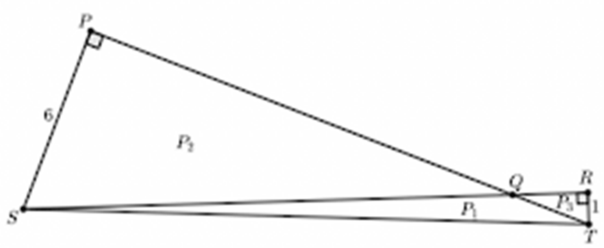


Нека D е точка од опишаната кружница на ΔABC, таква што $\overline{BC} = \overline{CD}$. Тогаш, како агли над тетиви со еднаква должина $\measuredangle CAD = \alpha$ ....**(4)**
Јасно, $ABCD$ е тетивен, од каде $\measuredangle ADC = 180^\circ - \beta$ ....**(4)**
Значи, $\measuredangle ACD = 180^\circ - \left(\alpha + 180^\circ - \beta\right) = \beta - \alpha = 90^\circ$.

Тогаш, од Талесова теорема, мора AD да е дијаметар и конечно од Питагорова теорема $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 = 4R^2$ .... **(5)**

4Б. Дадени се два правоаголни триаголници, ΔPST и ΔRST со заедничка хипотенуза ST. Катетите PT и RS се сечат во точката Q. Ако $\overline{PS} = 6, \overline{PT} = 17, \overline{RT} = 1$, пресметај ја плоштината на ΔSQT.

Решение. Од Питагорова теорема за ΔPST, може да се пресмета $\overline{ST}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{PT}^2 = 6^2 + 17^2 = 325$. Сега, Питагоровата теорема за ΔRST, дава $\overline{RS} = \sqrt{\overline{ST}^2 - \overline{RT}^2} = \sqrt{324} = 18$ ...**(5)**. Да ги означиме плоштините на $\Delta SQT, \Delta PSQ, \Delta RQT$ со P_1, P_2, P_3, соодветно. Сега, имаме $P_1 + P_2 = P_{\Delta PST} = \frac{6 \cdot 17}{2} = 51$



и $$P_1+P_3=P_{\Delta RST}=\frac{1\cdot 18}{2}=9 \quad \text{....}\mathbf{(5)}.$$

Исто, бидејќи $\measuredangle SPQ=\measuredangle QRT=90^\circ$ и $\measuredangle SQP=\measuredangle RQT$ како накрсни агли, следува $\Delta PSQ\sim\Delta RTQ$ ... **(5)**. Уште повеќе, коефициентот на сличност е $k=\frac{\overline{PS}}{\overline{RT}}=6$, па за нивните плоштини имаме $\frac{P_2}{P_3}=k^2=36$ ...**(5)**. Останува да се реши системот: $\begin{cases}P_1+P_2=51\\ P_1+P_3=9\\ P_2=36P_3\end{cases}$. Решавање на системот ни дава $P_1=\frac{39}{5}$ ....**(5)**.

Втора година

1А. (Сигма 130, Рубрика задачи, задача 1764)
Пресметај ја вредноста на изразот
$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}\,.$$

Решение. Ќе го докажеме равенството $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ (1).

Ќе забележиме дека изразот $1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ за секој природен број n е позитивен број... **(5)**. Така имаме дека
$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n(n+1)},$$
$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2n+2-2n}{n(n+1)}-\frac{2}{n(n+1)},$$
$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{n(n+1)}-\frac{2}{n(n+1)},$$
$$\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2=1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\,.\ \text{...}\mathbf{(10)}$$

Од последниот резултат следува равенството (1). На тој начин, користејќи го тоа равенство, имаме
$$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{99^2}+\frac{1}{100^2}}=$$
$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+1+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+1+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=$$
$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{98-\text{пати}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=98+\frac{49}{100}=\frac{9849}{100}.\ \text{...}\ \mathbf{(10)}$$

1Б. (Сигма 132, Задачи од училница, задача 1)
Даден е двоцифрен број запишан со истите цифри, кој ја има следната особина:
- Ако го квадрираме, добиваме четирицифрен број кај кој првите две цифри се исти и се еднакви на цифрите на двоцифрениот број намалени за еден, а последните две цифри се повторно исти и се еднакви на половината од цифрите на двоцифрениот број. Најди го тој број. Образложи го одговорот!

Решение. Нека дадениот двоцифрен број го означиме со $x=\overline{aa}$. Тогаш $x=\overline{aa}=10a+a=11a$ .... **(5)** Од условот на задачата, ако го квадрираме дадениот број, т.е. $(11a)^2=121a^2$, добиваме равенство
$$121a^2=\overline{(a-1)(a-1)\frac{a}{2}\frac{a}{2}}=1000(a-1)+100(a-1)+10\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=\frac{2211a-2200}{2}\ \text{....}\mathbf{(10)}$$

Го средување последниот израз и добиваме:
$$242a^2-2211a+2200=0 \Leftrightarrow 22a^2-201a+200=0\ .$$

Последната квадратна равенка по a има решенија $a_1=\frac{50}{44},\ a_2=\frac{352}{44}=8$. Бараниот број е $x=88$. ...**(10)**.

Забелешка. Секое друго решение, кои ги разгледува сите можни решенија по цифрите на бројот, исто така се зема во предвид. За 25 поени, неопходно е да има образложение, а не само одговор.

2А. Даден е системот равенки во множеството на природни броеви:

$$\begin{cases}(x+y)(y+z)(z+x)=1680\\ xy+yz+zx=96\end{cases}$$

Најди ја минималната вредност на изразот $100x+10y+z$.

Решение. Да забележиме дека равенките во системот се симетрични, па без губење на општоста може да претпоставиме дека $x\le y\le z$ ... **(1)**.

Од првата равенка добиваме $(xy+xz+yz+x^2)(y+z)=1680 \Leftrightarrow (96+x^2)(y+z)=1680$ ... **(4)**.

Од претпоставката имаме дека $96=xy+yz+zx\ge 3x^2 \Rightarrow x^2\le 32$, па затоа што x е природен број, мора $x\in\{1,2,3,4,5\}$ ... **(4)**. Ги проверуваме сите случаи:

- Ако $x=1$, тогаш $y+z=\dfrac{1680}{97}$ не е природен број ...**(1)**.
- Ако $x=2$, тогаш $y+z=\dfrac{1680}{100}$ не е природен број ...**(1)**.
- Ако $x=3$, тогаш $y+z=\dfrac{1680}{105}=16$ е природен број, па ја разгледуваме втората равенка. Важи $96=xy+yz+zx=3(y+z)+yz=3\cdot 16+yz \Leftrightarrow yz=48=2^4\cdot 3$. Со проверка се добива дека $y=4$, $z=12$ е решение ... **(5)**.
- Ако $x=4$, тогаш $y+z=\dfrac{1680}{112}=15$. Слично како и во претходниот случај, добиваме дека $yz=36=2^2\cdot 3^2$.
  Во овој случај нема решение што ги исполнува сите претходни услови ... **(5)**.
- Ако $x=5$, тогаш $y+z=\dfrac{1680}{121}$ не е природен број ...**(1)**.

Заклучуваме дека решение на системот е $x=3$, $y=4$, $z=12$ (и сите пермутации). Најмалата вредност на изразот се добива за $x<y<z$, односно најмала вредност за $100x+10y+z$ е $100\cdot 3+10\cdot 4+12=352$ ... **(3)**.

2Б. Определи ги сите тројки од реални броеви (x,y,z) за кои важи следниот систем од равенки:

$$\begin{cases}(x-1)(y-2)=0\\ (x-3)(z+2)=0\\ x+yz=9\end{cases}.$$

Решение. Од првата равенка, имаме дека $(x-1)(y-2)=0$ што значи $x=1$ или $y=2$. ...**(5)**

-Ако $x=1$, тогаш се добива

$$\begin{cases}(1-3)(z+2)=0\\ 1+yz=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z+2=0\\ yz=8\end{cases}.$$

Од последново следува дека $z=-2$ и $y=-4$, односно ја добиваме тројката $(x,y,z)=(1,-4,-2)$ .... **(5)**

-Ако $y=2$, тогаш се добива

$$\begin{cases}(x-3)(z+2)=0\\ x+2z=9\end{cases}.$$

Од првата равенка на последниот систем имаме дека $x=3$ или $z=-2$. ...**(5)**

- Ако $x=3$, тогаш $3+2z=9$, односно $z=3$, па решение на системот во овој случај е $(x,y,z)=(3,2,3)$ ... **(4)**
- Ако $z=-2$, тогаш $x+2(-2)=9$, односно $x=13$, па решение на системот во овој случај е $(x,y,z)=(13,2,-2)$. ...**(4)**

Конечно, сите решенија на дадениот систем се $(x,y,z)\in\{(1,-4,-2),(3,2,3),(13,2,-2)\}$ .... **(2)**

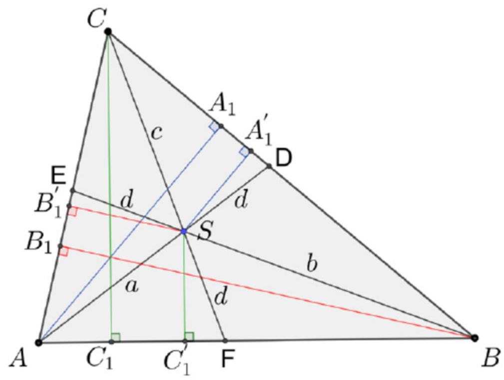
3АБ. (Сигма 134, Рубрика задачи, задача 1823)

Нека S е внатрешна точка во триаголникот ABC и нека правите AS, BS и CS ги сечат страните BC, CA и AB во точките D, E и F, соодветно. Нека $\overline{AS}=a, \overline{BS}=b, \overline{CS}=c$ и $\overline{SD}=\overline{SF}=\overline{SE}=d$. Ако $a+b+c=43$ и $d=3$ тогаш одреди ја вредноста на изразот abc.

Решение. Нека A_1 и A_1' се подножните точки на висините спуштени од темињата A и S кон страната BC, B_1 и B_1' се подножните точки на висините спуштени од темињата B и S кон страната AC, а C_1 и C_1' се подножните точки на висините спуштени од темињата C и S кон страната AB. ...**(3)**

Од сличноста на триаголниците AA_1D и $SA_1'D$ имаме

$$\frac{d}{a+d}=\frac{\overline{SA_1'}}{\overline{AA_1}}=\frac{\frac{\overline{SA_1'}\cdot\overline{BC}}{2}}{\frac{\overline{AA_1}\cdot\overline{BC}}{2}}=\frac{P_{\Delta BCS}}{P_{\Delta ABC}}\quad(1)\text{......}\ \mathbf{(5)}$$



На сличен начин добиваме дека $\frac{d}{b+d}=\frac{P_{\Delta CAS}}{P_{\Delta ABC}}$ (2) и

$\frac{d}{c+d}=\frac{P_{\Delta ABS}}{P_{\Delta ABC}}$ (3). ......**(5)**

Со собирање на равенствата (1), (2) и (3) имаме дека

$$\frac{d}{a+d}+\frac{d}{b+d}+\frac{d}{c+d}=\frac{P_{\Delta BCS}}{P_{\Delta ABC}}+\frac{P_{\Delta CAS}}{P_{\Delta ABC}}+\frac{P_{\Delta ABS}}{P_{\Delta ABC}}=\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}}=1.\ \text{...}\mathbf{(5)}$$

Сега, со замена на $d=3$ во последното равенство добиваме дека

$$\frac{3}{a+3}+\frac{3}{b+3}+\frac{3}{c+3}=1$$
$$\Leftrightarrow 3[(a+3)(b+3)+(b+3)(c+3)+(c+3)(a+3)]=(a+3)(b+3)(c+3)$$
$$\Leftrightarrow 3ab+3bc+3ca+18a+18b+18c+81=abc+3ab+3bc+3ca+9a+9b+9c+27$$
$$\Leftrightarrow 9a+9b+9c+54=abc$$
$$\Leftrightarrow abc=9(a+b+c)+54$$
$$\Leftrightarrow abc=9\cdot 43+54$$
$$\Leftrightarrow abc=441.\ \text{...}\mathbf{(7)}$$

4АБ. Определи ги целобројните параметри a,b и c такви што равенката $(x-a)(x-6)+3=(x+b)(x+c)$ има бесконечно многу реални решенија.

Решение. Бидејќи $(x-a)(x-6)+3=(x+b)(x+c)$ важи за сите реални броеви x, ќе важи и за $x=6$, па добиваме $(6+b)(6+c)=3$. ...**(10)** Броевите $6+b$ и $6+c$ се цели броеви (бидејќи b и c се цели броеви), и од последното равенство следува дека се делители на 3. ...**(5)** Имаме 4 случаи:

1. $6+b=1, 6+c=3$ т.е. $b=-5, c=-3$. Тогаш, $(x-a)(x-6)+3=(x-5)(x-3)$, $x^2-(a+6)x+6a=x^2-8x+12$ и оттука следува дека $a=2$. Значи, $(a,b,c)=(2,-5,-3)$ .... **(3)**
2. $6+b=3, 6+c=1$ т.е. $b=-3, c=-5$. Тогаш од $(x-a)(x-6)+3=(x-5)(x-3)$ и од случајот 1 следува дека $a=2$, па $(a,b,c)=(2,-3,-5)$ .... **(2)**
3. $6+b=-1, 6+c=-3$ т.е. $b=-7, c=-9$. Тогаш, $(x-a)(x-6)+3=(x-7)(x-9)$, односно $x^2-(a+6)x+6a=x^2-16x+60$ и оттука следува дека $a=10$. Значи, $(a,b,c)=(10,-7,-9)$. ....**(3)**
4. $6+b=-3, 6+c=-1$ т.е. $b=-9, c=-7$. Тогаш од $(x-a)(x-6)+3=(x-7)(x-9)$ и од случајот 3 следува дека $a=10$, па $(a,b,c)=(10,-9,-7)$. ...**(2)**

Забелешка. За првиот дел се даваат 10 поени и во овој случај: Доколку не се замени веднаш $x=6$, равенството $(6+b)(6+c)=3$ се добива на следниот начин: од $(x-a)(x-6)+3=(x+b)(x+c)$, $x^2-(a+6)x+6a+3=x^2+(b+c)x+bc$ и оттука следува $(a+b+c+6)x=6a+3-bc$. За да почетната равенка има бесконечно многу решенија, треба $a+b+c+6=0$ и $6a+3-bc=0$. Со замена на $a=-b-c-6$, добиваме $0=6a+3-bc=-6b-6c-36+3-bc=-(6+b)(6+c)+3$ и оттука, $(6+b)(6+c)=3$. Потоа се решава како во понуденото решение, со истиот број поени.

Трета година

1АБ. (Сигма 131, Задачи од училницата, втора година, задача 1)

Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ за која што $|f(x)|\le 1$, за сите $x\in[-1,1]$. Докажи дека $|a|\le 2$.

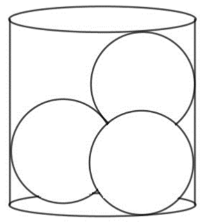
Решение. Од тоа што $|f(x)|\le 1$ за $x\in[-1,1]$ следува дека и $|f(0)|\le 1$ односно $|c|\le 1$ ....**(5)** Истото неравенство важи и за $x=-1$, па имаме $|a-b+c|\le 1$ ....**(5)** Слично, за $x=1$ се добива и $|a+b+c|\le 1$. ...**(5)**

Значи, $|2a|=|a+b+c+(a-b+c)-2c|\le|a+b+c|+|a-b+c|+2|c|\le 1+1+2=4$, па по кратење со 2, се добива бараното неравенство. ....**(10)**

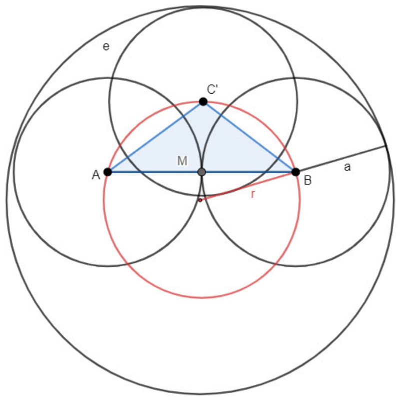
2АБ. (Сигма 129, Задачи од училница, втора година, задача 1)
Три идентични сфери, секоја со радиус a, се вметнуваат во цилиндар на таков начин што:

- Секоја сфера ја допира кривата површина на цилиндарот,
- Секоја сфера ги допира другите две сфери,
- Две сфери ја допираат долната основа на цилиндарот, додека третата ја допира горната основа,
- Висината на цилиндарот е $3a$.

Одреди го радиусот на основата на цилиндарот.



Решение. Нека центрите на трите сфери ги означиме со A, B, и C , и тоа A и B се центрите на сферите кои ја допираат долната основа, а C е центарот на сферата која ја допира горната основа.
Забележуваме дека тие формираат еден рамностран триаголник ABC, со должина на страна $2a$ и висина $a\sqrt{3}$ . ...**(5)**
Темињата A и B се наоѓаат на растојание a од основата, додека темето C на растојание $2a$ од основата. ...**(2)**
Нека со C' ја означуваме проекцијата на темето C врз рамнината која е на растојание a од основата на цилиндарот (т.е. A, B и C' лежат на иста рамнина) и нека средината на отсечката AB ја означиме со M .



Тогаш јасно, $\overline{MB} = a$. Од тоа што $\measuredangle CC'M = 90°$ може да пресметаме дека $\overline{C'M} = a\sqrt{2}$ ....**(5)**
Сферата со центар во C , во пресек може да ја разгледаме и како сфера со центар во C' и на тој начин, за да се најде радиусот на основата на цилиндарот, доволно е да се најде радиусот R на најмалата кружница која ги допира сите три кружници со центри A, B, и C' и со радиуси a (како на цртежот).
Нека r е радиус на опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник ABC' , тогаш од цртежот може да забележиме дека $R = r + a.$ ...**(5)** Радиусот r го наоѓаме од тоа што ги знаеме сите страни на $\Delta ABC'$ ($\overline{AB} = 2a, \overline{AC'} = \overline{BC'} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$), користејќи ја плоштината на триаголникот. Изедначуваме $P = \frac{abc}{4r} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{C'M}$ (r овде е радиус на опишаната кружница) и добиваме дека $r = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ ....**(5)** Конечно за радиусот на основата на цилиндарот R добиваме $R = r + a = \frac{3\sqrt{2}a}{4} + a = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1\right)a$ ....**(3)**

3А. Збирот на квадратите на страните на даден триаголник е M , а збирот на котангенсите на неговите внатрешни агли е N. Изрази ја плоштината на триаголникот преку M и N.
Решение. Нека a, b, c се должините на страните на ΔABC, а α, β, γ неговите внатрешни агли. Тогаш, $a^2 + b^2 + c^2 = M$ и $\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta + \text{ctg}\gamma = N$. Од косинусната теорема имаме $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,....**(5)** па добиваме

$$2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha + 2ac\cos\beta = -c^2 + a^2 + b^2 - a^2 + b^2 + c^2 - b^2 + a^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 = M \text{....}\textbf{(5)}$$

За плоштината на триаголникот P имаме, $P = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\gamma}{2}$, а оттука,

$ab = \frac{2P}{\sin\gamma}, bc = \frac{2P}{\sin\alpha}, ac = \frac{2P}{\sin\beta}$. ...**(5)** Ако замениме во изразот за збирот *M,* добиваме:

$$M = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4P\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{4P\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{4P\cos\beta}{\sin\cos\beta} = 4P(\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta + \text{ctg}\gamma) = 4PN. \text{ ...}\textbf{(8)}$$

Конечно, плоштината на триаголникот е $P = \frac{M}{4N}$. ...**(2)**

3Б. Нека за аглите $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ важи $\cos\alpha = \text{tg}\beta, \cos\beta = \text{tg}\gamma, \cos\gamma = \text{tg}\alpha$. Пресметај $\sin\alpha$.

Решение. Од условот $\cos\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}, \cos\beta = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$ и $\cos\gamma = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, со последователни замени добиваме

$$\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\beta}-1=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}-1=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1}-1=\frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-1}-1=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}-1. \textbf{...(12)}$$

Да означиме $t=\cos^2\alpha$. Тогаш $t=\frac{1-t}{2t-1}-1 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{2-3t}{2t-1} \quad \Leftrightarrow \quad t^2+t-1=0$. Решавајќи ја равенката по t добиваме $t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. ...**(5)** Бидејќи $t=\cos^2\alpha\geq 0$, останува дека решение е само $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ...**(3)**

Сега, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-t=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$. Но, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, односно $\sin\alpha\in(0,1)$ па добиваме $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ...**(5)**

4А. Најди ги сите цели броеви x такви што и $\log_2(x^2-4x-1)$ е исто така цел број.

Решение. Нека n е цел број за кој $\log_2(x^2-4x-1)=n$. Тогаш $x^2-4x-(1+2^n)=0$ е равенка чии решенија се: $x=2-\sqrt{5+2^n}$ и $x=2+\sqrt{5+2^n}$ ....**(5)** Ги бараме само целобројните вредности на x, па постои $k\in\mathbb{Z}$ таков што $5+2^n=k^2$. Забележуваме дека мора n да е природен број. Сега бројот $5+2^n$ е непарен, па непарен е и бројот k. Нека $k=2m-1$ за некое $m\in\mathbb{Z}$. **...(5)**

Тогаш $m(m-1)=\frac{k+1}{2}(\frac{k+1}{2}-1)=\frac{k+1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}=\frac{k^2-1}{4}=\frac{2^n+4}{4}=2^{n-2}+1$. ...**(5)** За $n=1$, $2^{n-2}+1$ не е цел број. За $n>2$, $2^{n-2}+1$ е непарен број, но $m(m-1)$ е секогаш парен број, значи добиваме контрадикција. Останува само можноста $n=2$, односно $5+2^2=9$. Решенијата по x се $x=-1$ и $x=5$. Со проверка лесно потврдуваме дека $\log_2(x^2-4x-1)$ за двете вредности е цел број. ...**(10)**

4Б. Најди ги сите природни броеви n такви што 3, $\log_2 n$ и $\log_4 n$ се должини на страни на триаголник.

Решение. Јасно, мора $n\geq 2$. Да забележиме дека $3=\log_2 8$ и $\log_4 n=\frac{1}{\log_n 2^2}=\frac{1}{2}\log_2 n$. Бидејќи се должини на страни на триаголник, 3, $\log_2 n$ и $\log_4 n$ го задоволуваат неравенството на триаголник, односно важат неравенствата $\log_2 n+\frac{1}{2}\log_2 n>3$, $3+\log_2 n>\frac{1}{2}\log_2 n$ и $3+\frac{1}{2}\log_2 n>\log_2 n$. **...(6)**

Од првото неравенство, $\log_2 n+\frac{1}{2}\log_2 n>3 \Leftrightarrow \log_2 n>2$, односно $n>4$. ...**(4)**

Од второто неравенство добиваме

$$3+\log_2 n>\frac{1}{2}\log_2 n \Leftrightarrow \log_2 8+\log_2 n>\log_2\sqrt{n} \Leftrightarrow 8n>\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n}>\frac{1}{8} \Leftrightarrow n>\frac{1}{64}. \textbf{...(8)}$$

Од третото неравенство, $3+\frac{1}{2}\log_2 n>\log_2 n \Leftrightarrow 3>\frac{1}{2}\log_2 n \Leftrightarrow \log_2 n<6 \Leftrightarrow n<64$. ...**(6)**

Јасно, сите три неравенства се исполнети за природните броеви n за кои $4<n<64$. ..**(1)**

Четврта година

1АБ. (Сигма 130, Задачи од училницата, Четврта година, задача 4)

За која вредност на параметарот a, корените на равенката $x^3+ax^2+48x-27=0$ образуваат геометриска прогресија?

Решение. Нека корените на равенката x_1,x_2,x_3 образуваат геометриска прогресија. Од Виетовите формули следува дека $x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=48$ и $x_1x_2x_3=27$. ...**(8)** Од условот на задачата за геометриска прогресија, следува дека ${x_2}^2=x_1x_3$, па со замена во $x_1x_2x_3=27$ се добива дека $x_2=3$. ...**(7)** Со замена во $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=48$ се добива дека $3(x_1+x_3)+9=48$ т.е. $x_1+x_3=13=-a-x_2$. ...**(5)** Сега конечно $a=-16$ ....**(5)**

2А. Нека AB и AC се тетиви на кружница со радиус R. Точката M припаѓа на правата AB, а нејзиното растојание од правата AC е еднакво на должината $\overline{AC}$. Точката N припаѓа на правата AC, а нејзиното растојание од правата AB е еднакво на должината $\overline{AB}$. Докажи дека $\overline{MN}=2R$.

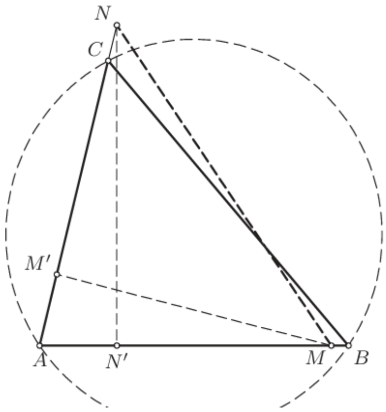
Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$ и нека M' и N' се проекциите на точките M и N на правите AC и AB, соодветно. Тогаш,

$$\overline{AM} = \frac{\overline{MM'}}{sin\alpha} = \frac{\overline{AC}}{sin\alpha} \text{ и } \overline{AN} = \frac{\overline{NN'}}{sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{sin\alpha}. \text{...}\mathbf{(5)}$$

Оттука сега,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AB}}, \text{ односно } \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

од каде следува дека триаголниците ABC и AMN се слични, со коефициент на сличност $\frac{1}{sin\alpha}$. ...**(10)**



Цртеж. ... (5 п.)

Јасно, $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{1}{sin\alpha}$, од каде конечно добиваме $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{sin\alpha} = 2R.$ ....**(5)**

2Б. (Сигма 134, Задачи од училницата, задача 3)

Докажи дека секој број од видот $\left(10^n+10^{n-1}+...+10+1\right)\left(10^{n+1}+35\right)+36$ е полн квадрат, за $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Бидејќи $1+10+...+10^{n-1}+10^n$ е сумата на првите $n+1$ членови на геометриска прогресија со прв член $a_1=1$ и количник $q=10$, за сумата имаме дека $S_{n+1}=\frac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}=\frac{1-10^{n+1}}{-9}=\frac{10^{n+1}-1}{9}$. …**(7)**

Тогаш дадениот број има облик

$$\frac{10^{n+1}-1}{9}\left(10^{n+1}+35\right)+36=\frac{1}{9}\left(10^{2(n+1)}+34\cdot10^{n+1}-35+324\right)=$$
$$=\frac{1}{9}\left(10^{2(n+1)}+34\cdot10^{n+1}+17^2\right)=\left(\frac{10^{n+1}+17}{3}\right)^2. \quad \text{...}\mathbf{(11)}$$

Притоа $10^{n+1}+17\equiv1+2\equiv0\ (\mathrm{mod}\,3)$ т.е. бројот $10^{n+1}+17$ е содржател на бројот 3, од каде следува заклучокот дека бројот е полн квадрат.…**(7)**

3А. (Сигма 129, Рубрика задачи, 1741).

Докажи дека збирот на сите (позитивни) делители на природниот број $n>2$ е помал од $n\sqrt{n}$.

Решение. Да го означиме збирот од сите позитивни делители на природниот број n со $D(n)$.

1) Нека $n>2$ е природен број што нема непарен позитивен делител различен од 1, т.е. $n=2^\alpha$ за некој $\alpha\geq2$ $(\alpha\in\mathbb{N})$. Тогаш

$$D(n)=D(2^\alpha)=1+2+2^2+\cdots+2^{\alpha-1}+2^\alpha=2^{\alpha+1}-1<2^{\alpha+1}\leq2^{\alpha+\frac{\alpha}{2}}$$
$$=2^\alpha\sqrt{2^\alpha}=n\sqrt{n}\text{ . }\mathbf{...(5)}$$

2) Нека $n>2$ е природен број што има непарен делител поголем од 1. Очигледно

$$D(3)=1+3=4<3\sqrt{3}\text{ . }\mathbf{...(2)}$$

Да претпоставиме дека за секој природен број k, таков што $3\leq k<n$, важи $D(k)<k\sqrt{k}$. Ќе докажеме дека важи $D(n)<n\sqrt{n}$. Од претпоставката дека n има непарен делител поголем од 1, следува дека постои непарен прост број p што е делител на n, односно $n=mp$ за некој природен број m. Можни се следните случаи:

- Ако $m=1$, т.е. $n=p$, тогаш $D(p)=1+p=p\left(\frac{1}{p}+1\right)<p\cdot2<p\sqrt{p}$, за $p>3$;
- Ако $m=2$, т.е. $n=2p$, тогаш $D(2p)=1+2+p+2p=3+3p<2p\sqrt{2p}$;
- Ако $m\geq3$, тогаш според индуктивната претпоставка важи $D(m)<m\sqrt{m}$. ....**(13)**

Бидејќи произволен делител на n има облик d или dp, каде што d е делител на m, добиваме

$$D(n)=D(m)+D(m)p=D(m)D(p)<m\sqrt{m}\cdot p\sqrt{p}=mp\sqrt{mp}=n\sqrt{n}.\ \mathbf{...(5)}$$

3Б. Димитар се обидува да се сети на лозинката на својот инстаграм профил. Запомнил дека се работи за петцифрен број со различни цифри, во кој првата и последната цифра се разликуваат за 4, а низата од преостанатите три цифри во средината формира двоцифрен или трицифрен број делив со 5. Ако Димитар почне да ги испишува сите такви броеви, колку најмногу броеви може да испише за да дојде до точната лозинка? Првата цифра на лозинката не е нула.

Решение. Нека $\overline{xabcy}$ е точната лозинка, каде што $x, y, a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $x \neq 0$. Од условите на задачата имаме дека цифрите $x, y, c,$ односно првата, последната и четвртата цифра можат да бидат една од следните 17 можности: $(x, y, c) \in \{(4, 0, 5), (1,5,0), (5,1,0), (2, 6, 0), (6,2,0), (2, 6, 5), (6,2,5), (3, 7, 0), (7,3,0),$ $(3,7,5), (7,3,5), (4, 8, 0), (8,4,0), (4,8,5), (8, 4, 5), (5,9,0), (9,5,0)\}$. ...**(12)** За секој од овие избори на x, y и c, цифрата a можеме да ја избереме на 7 начини, а цифрата b на 6 начини. ...**(8)** Оттука следува дека постојат вкупно $17 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{714}$ петцифрени броеви со бараното својство.... **(5)**

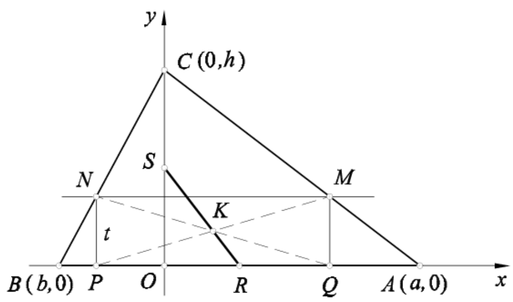
4А. Со $[x]$ го означуваме најголемиот цел број помал или еднаков на x. Определи ја вредноста на изразот
$$\left[\frac{1}{1^{2/3}} + \frac{1}{2^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{1000^{2/3}}\right].$$

Решение. Користејќи ги неравенствата:
$$\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^3 = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{(3n)^3} > 1 + \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^3 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{(3n)^3} > 1 - \frac{1}{n}$$
односно еквивалентно, $1 + \frac{1}{3n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3}$ и $1 - \frac{1}{3n} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/3}$, добиваме дека
$$3 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3} - 1\right] < \frac{1}{n} < 3 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/3}\right] \text{....}\mathbf{(10)}$$
Множејќи со $n^{1/3}$, последното двојно неравенство го добиваме во форма
$$3 \cdot \left[(n + 1)^{1/3} - n^{1/3}\right] < \frac{1}{n^{2/3}} < 3 \cdot \left[n^{1/3} - (n - 1)^{1/3}\right]. \text{...}\mathbf{(5)}$$
Сега, ако го сумираме левото неравенство за $n = 1,2, \dots, 1000$, добиваме дека
$$\frac{1}{1^{2/3}} + \frac{1}{2^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{1000^{2/3}} > 3\left(1001^{1/3} - 1\right) > 3(10 - 1) = 27\text{....}\mathbf{(3)}$$
Ако пак го сумираме десното неравенство за $n = 2, \dots, 1000$ и додадеме 1, добиваме
$$\frac{1}{1^{2/3}} + \frac{1}{2^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{1000^{2/3}} < 3\left(1000^{1/3} - 1\right) + 1 = 28. \text{...}\mathbf{(4)}$$
Согласно последните две оценки, заклучуваме дека целиот дел на $\frac{1}{1^{2/3}} + \frac{1}{2^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{1000^{2/3}}$ е 27. ...**(3)**

4Б. Во правоаголен координатен систем дадени се точките $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и $C(0, h)$, при што $a, h > 0$ и $b < 0$. Одреди го геометриското место на точките што претставуваат средини (пресек на дијагоналите) на правоаголниците впишани во триаголникот ABC, такви што, две од темињата на правоаголникот лежат на страната AB, а по едно теме лежи на останатите две страни на триаголникот.

Решение. Нека правоаголникот $PQMN$ е впишан во триаголникот ABC како што се бара во задачата. Равенката на правата AC има облик $\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$ ....**(2)**, а равенката на правата BC гласи $\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1$.... **(2)** Да ја означиме „променливата” должина на страната PN со t.

Според тоа, равенката на правата MN гласи $y = t$. ...**(2)** Точката M е пресек на правите AC и MN. Од системот $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1 \\ y = t \end{cases}$ заклучуваме дека M има координати $\left(\frac{a}{h}(h - t), t\right)$.... **(2)** Точката N е пресек на правите BC и MN.



Цртеж (3 п.)

Од системот $\begin{cases} \frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1 \\ y = t \end{cases}$ заклучуваме дека N има координати $\left(\frac{b}{h}(h - t), t\right)$. ...**(2)**

Апсцисата на точката K (средината на правоаголникот) е аритметичка средина од апсцисите на точките M и N, додека ординатата на K е половина од ординатата на M. Оттука следува дека средината на правоаголникот K има координати $x = \frac{a+b}{2h}(h - t), y = \frac{t}{2}$. ....**(4)** За да го одредиме геометриското место, треба да одредиме кое множество точки е зададено со овие равенки. Да го елиминираме t. Со замена на $t = 2y$ во равенката за x, добиваме $2hx + 2(a + b)y = h(a + b)$, односно, $\frac{x}{\frac{a+b}{2}} + \frac{y}{\frac{h}{2}} = 1$. Последната равенка претставува равенка на права. ...**(4)** Бараното геометриското место на точки е дел од таа права. Како што должината на страната PN на правоаголниците расте од 0 до h, така средината на правоаголниците ќе се движи од точката $R\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ до точката $S\left(0, \frac{h}{2}\right)$. Според тоа, бараното геометриско место на точки е отворената отсечка (без крајните точки) RS. ...**(4)**