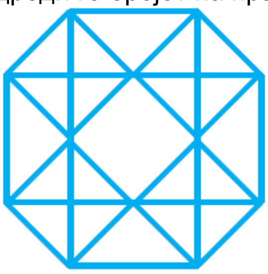
ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
за учениците од основното образование
31.1.2025 година
Решенија на задачите и распределба на поени

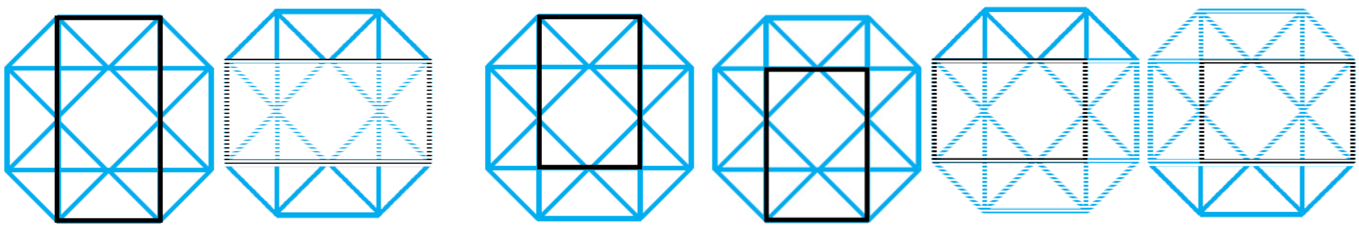
IV одделение

Важна напомена: Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.
Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.
Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.
****

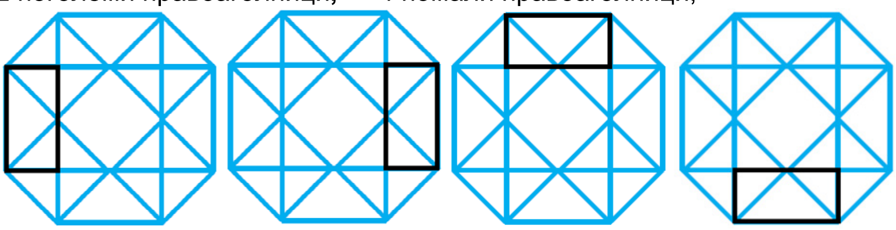
1. На цртежот подолу има различни фигури. Одреди го бројот на правоаголници што не се квадрати.



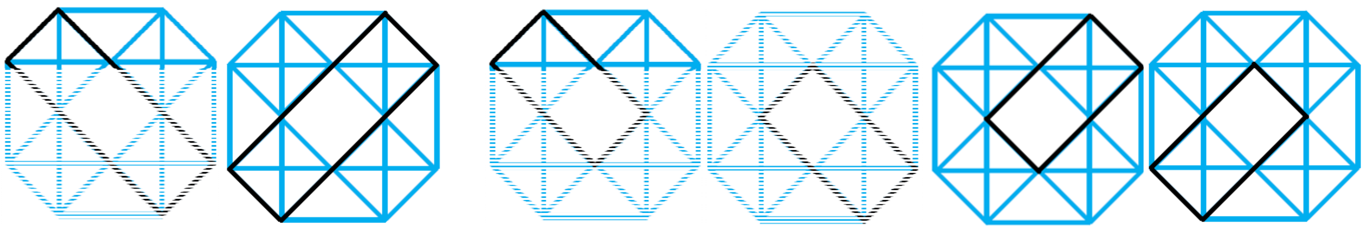
Решение: На цртежот има:



2 поголеми правоаголници, 4 помали правоаголници,



4 најмали правоаголници,



2 поголеми правоаголници поставени косо и 4 помали правоаголници поставени косо.
На цртежот има вкупно 16 правоаголници што не се квадрати.
По 1,5 поен за секој избројан правоаголник + 1 поен за целосно точен одговор.

(вк. 25 поени)
****

2. Даден е изразот 36 + 144 : 9 – 3 · 2. Стави загради во него така што новодобиениот израз ќе има вредност еднаква на 60.
Решение: Бидејќи (36 + 144) : (9 – 3 · 2) = 180 : (9 – 6) = 180 : 3 = 60, еден можен одовор е:
(36 + 144) : (9 – 3 · 2)
Бидејќи (36 + 144) : (9 – 3) · 2 = 180 : 6· 2 = 30 · 2 = 60, друг можен одовор е:
(36 + 144) : (9 – 3) · 2
Сите 25 поени се доделуваат ако е запишан барем еден од точните одговори.
****

3. Операта „Норма“ од Винченцо Белини има два чина. Прикажувањето на операта започнало во 19 часот, а завршило во 21:45. Колку минути траел секој од двата чина, ако 15-минутната пауза меѓу чиновите завршила во 20:32?
Решение: **(задача 4182 за 4 – 5 одд. од Нумерус L – 1 од 2024/2025 година)**
Со одземање на 20:32 од 21:45 добиваме дека вториот чин траел 1 час и 13 минути, или 73 минути. **(9 поени)**
Од 20:32 одземаме 15 минути и добиваме дека првиот чин завршил во 20:17. **(8 поени)**
Ако од 20:17 го одземеме времето на почнување 19:00, добиваме дека првиот чин траел 1 час и 17 минути, односно 77 минути. **(8 поени)**

(вк. 25 поени)

****

4. Васко и Раде треба да ги монтираат светилките во една зграда. Секој од нив треба да монтира по 600 светилки. Првиот ден Васко монтирал 243 светилки, а Раде 180 светилки. Станувајќи сè поизморен, секој нареден ден Васко монтирал 2/3 од бројот на светилки што ги монтирал претходниот ден, а Раде монтирал 19 светилки помалку од бројот на светилки што ги монтирал претходниот ден. Кој од двајцата ќе ги монтира сите светилки за пократко време? По колку светилки треба да монтира секој од нив последниот ден?
Решение: (задача 4183 за 4 – 5 одд. од Нумерус L – 1 од 2024/2025 година)
Васко
1 ден: 243 светилки
2 ден: $\frac{2}{3}\cdot 243=162$ светилки Инсталирани вкупно: $243+162=405$ светилки
3 ден: $\frac{2}{3}\cdot 162=108$ светилки Инсталирани вкупно: $405+108=513$ светилки
4 ден: $\frac{2}{3}\cdot 108=72$ светилки Инсталирани вкупно: $513+72=585$ светилки
5 ден: $\frac{2}{3}\cdot 72=48$ светилки Инсталира уште само $600-585=15$ светилки
По 3 поени за точна пресметка на инсталирани светилки за секој од 2 до 5 ден и уште по 1 поен за пресметка на вкупно инсталирани/преостанати за секој ден (= 16 поени)
Раде
1 ден: 180 светилки
2 ден: $180-19=161$ светилки Инсталирани вкупно: $180+161=341$ светилки
3 ден: $161-19=142$ светилки Инсталирани вкупно: $341+142=483$ светилки
4 ден: $142-19=123$ светилки Инсталирани уште само: $600-483=117$ светилки
По 2 поени за точна пресметка на инсталирани светилки за секој од 2 до 5 ден и уште по 1 поен за пресметка на вкупно инсталирани/преостанати за секој ден (= 9 поени)
Раде ќе ги монтира светилките за покусо време. Раде ќе монтира 117 светилки последниот (четврти) ден, а Васко ќе монтира 15 светилки последниот (петти) ден. **(вк. 25 поени)**

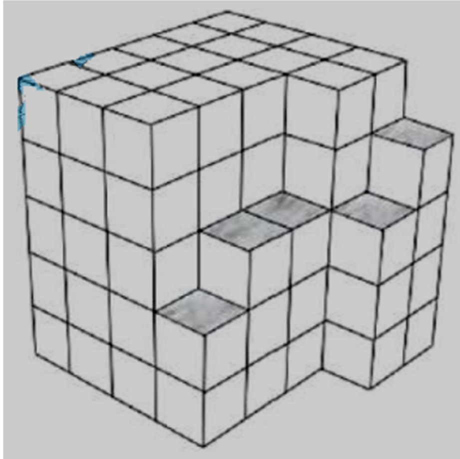
V ОДДЕЛЕНИЕ

Напомена:
Доколку некој од натпреварувачите прикажал друг валиден начин на решавање на задача, оценувачите подготвуваат бодовна скала според која ги вреднуваат чекорите од решавањето на задачата.
Секоја целосно точно решена задача се вреднува со 25 поени.
Грешка во пресметување при правилно поставено решение не се казнува со одземање на сите поени за соодветниот чекор туку се предвидува намалување на поените и тоа истоветно се применува при вреднување на решенијата на сите натпреварувачи.
****

1. Даден е бројот 581909786. Со прецртување на кои било пет цифри останува четирицифрен број, во кој првата цифра може да биде и 0. Прецртај пет цифри така што новодобиениот број да биде: а) најмал можен број б) најголем можен број.
Решение: а) Се прецртуваат цифрите 5, 8, 1, 9, 9 и се добива најмалиот можен број 0786.
б) Се прецртуваат цифрите 5, 8, 1, 0, 7, и добиен е најголемиот можен број 9986.

(По 12 поени за секој точен одговор + 1 поен ако и двата броја се точни = вк. 25 поени)
****

2. Коцка со страна долга 5 cm е составена од помали коцки со страна долга 1 cm. Од неа се отстранети извесен број мали коцки само од предната (видлива) страна, при што е добиена формата прикажана на сликата. Колку мали коцки се отстранети од големата коцка? Колкав процент од големата коцка е отстранет?



Решение: (задача 4188 за 5 одд. од Нумерус L – 1 од 2024/2025 година)
Големата коцка била составена од $5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$ мали коцки. **(5 поени)**
Сега се останати само 100 мали коцки. **(10 поени)**
Од големата коцка биле отстранети $125 - 100 = 25$ мали коцки. **(1 поен)**
(Да се доделат сите 11 поени и ако ученикот точно ги изброил коцките што се отстранети без да пресметува колку се останати сега.)
Отстранетите 25 од вкупно 125 коцки се $\frac{25}{125} = \frac{1}{5} = 20\%$ од големата коцка.

(9 поени)

(вк. 25 поени)

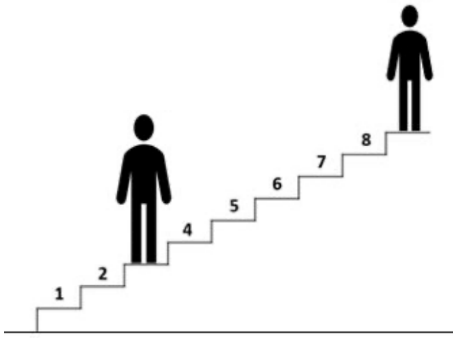
****

3. Ема има три вида миленици: мачиња, кучиња и папагали. Таа вели: „Сите мои миленици, освен 3, се мачиња. Сите мои миленици, освен 4, се кучиња. Сите мои миленици, освен 5, се папагали.“ Колку мачиња, кучиња и папагали има Ема?
Решение:
Сите миленици на Ема, освен 3, се мачиња, па кучиња и папагали има вкупно 3. **(2 поени)**
Сите миленици на Ема, освен 4, се кучиња, па мачиња и папагали има вкупно 4. **(2 поени)**
Сите миленици на Ема, освен 5, се папагали, па мачиња и кучиња има вкупно 5. **(2 поени)**
Ако ги собереме овие три броја, 3 + 4 + 5 = 12, го добиваме удвоен бројот на миленици **(12 поени)**. Тоа значи дека Ема има вкупно 6 миленици. **(1 поен)**
Бројот на мачиња е 6 – 3 = 3 **(2 поени)**, бројот на кучиња е 6 – 4 = 4 **(2 поени)**, а бројот на папагали е 6 – 5 = 1 **(2 поени)**.

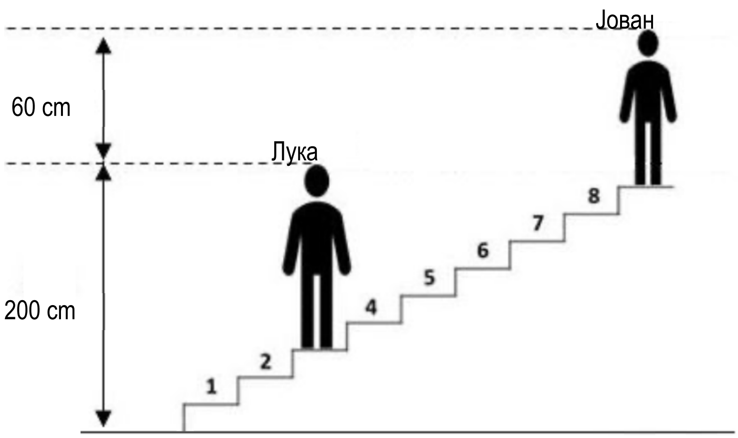
(вк. 25 поени)

****

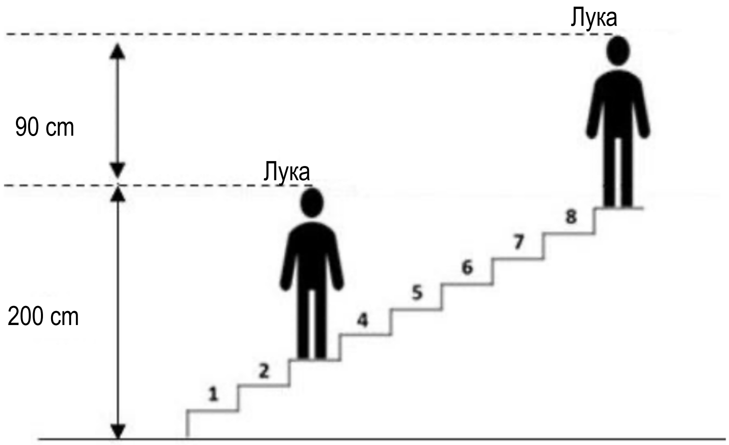
4. Лука стои на третото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата висина заедно со скалите е еднаква на 2 m. Јован, кој е 30 cm понизок од Лука, стои на деветтото скалило (броејќи од дното на скалите) и тогаш неговата висина заедно со скалите е еднаква на 2 m и 60 cm. Колку е висок Лука и колку е висок Јован ако сите скалила се со иста висина?



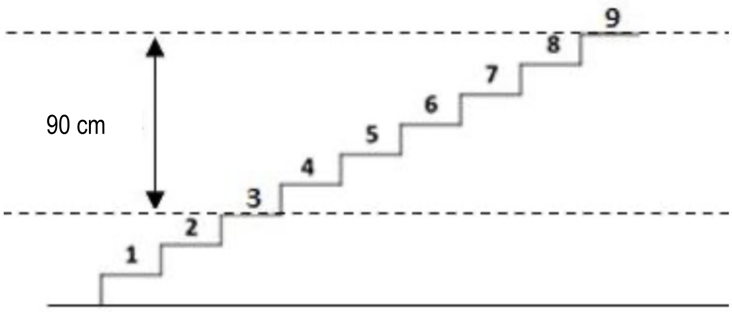
Решение:
(задача 4141 за 4-5 одд. од Нумерус XLIX – 4 од 2023/2024 година)
Разликата меѓу висините на Лука и Јован сега е 2 m 60 cm – 2 m = 60 cm. **(3 поени)**



Кога Лука би стоел на местото на Јован (на деветтото скалило) разликата би била за 30 cm поголема бидејќи Лука е за 30 cm повисок од Јован. **(5 поени)**



Тоа значи дека вкупната висина на шесте скалила меѓу третото и деветтто скалило е 90 cm **(5 поени)**, па секое скалило е високо 90 : 6 = 15 cm. **(3 поени)**



Лука стои на третото скалило, па неговата висина е за $3\cdot 15=45$ cm **(3 поени)** помала од 2 m$=200$ cm **(2 поени)**, што значи висината на Лука е $200-45=155$ cm. **(2 поени)**
Јован е за 30 cm понизок од Лука, па висината на Јован е $155-30=125$ cm. **(2 поени)**

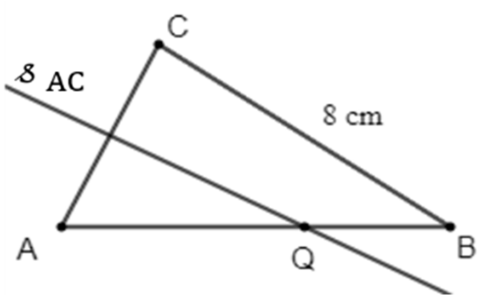
(вк. 25 поени)

VI ОДДЕЛЕНИЕ

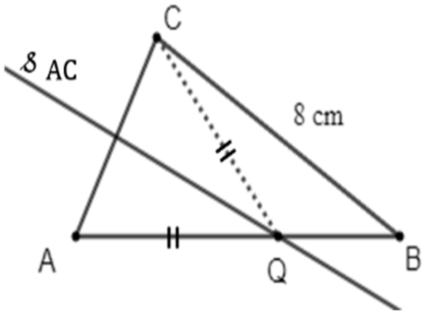
1. (Нумерус 48/1 зад 3924) Средната возраст на единаесетте фудбалери од некој тим била 26 години. За време на натпреварот еден фудбалер се повредил и ја напуштил играта. Средната возраст на десетте фудбалери кои останале на теренот пред влегувањето на замената била 25 години. Колку години има фудбалерот што ја напуштил играта?
Решение: Нека аритметичката средина на годините на единаесетте фудбалери е 26. Значи збирот на годините на единаесетте фудбалери е $S_{11}=11\cdot 26=286$. **(10б)** Значи збирот на годините на останатите десет фудбалери ќе биде $S_{10}=10\cdot 25=250$. **(10б)** Фудбалерот што ја напуштил играта има $S_{11}-S_{10}=286-250=36$ години. **(5б)**

2. Дадена е дропката $\frac{2024}{2025}$. Кој број треба да се одземе од броителот и именителот за да се добие дропката $\frac{12}{15}$?
Решение: Нека бараниот број е x. Значи:
$$\frac{2024-x}{2025-x}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}\ \ (\mathbf{10}б)\Rightarrow 10120-5x=8100-4x(\mathbf{10}б)\Rightarrow x=2020(\mathbf{5}б)$$

3. (Нумерус 48/4 зад 4036) Во ΔABC симетралата на страната AC ја сече страната AB во точката Q. Пресметај го периметарот на ΔQBC ако должините на AB и BC изнесуваат $13\ cm; 8\ cm$ соодветно.

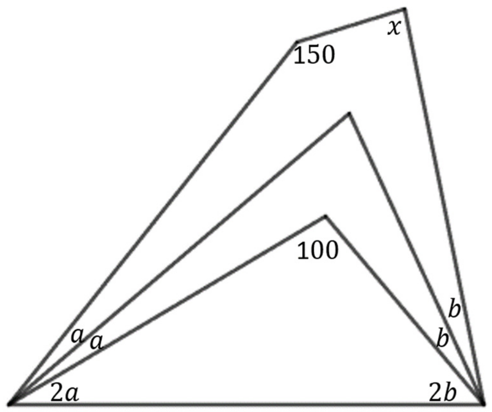


Решение:



Бидејќи симетралата на страната AC ја сече страната AB во точката Q важи $\overline{QC}=\overline{QA}.$ $(\mathbf{10}б)$.
Значи $L_{\Delta QBC}=\overline{QB}+\overline{BC}+\overline{QC}=\overline{QB}+\overline{BC}+\overline{QA}=\overline{AB}+\overline{BC}$ $(\mathbf{10}б)$
$=13+8=21\ cm$ $(\mathbf{5}б)$

4. Даден е четириаголник означен како на цртежот.Одреди ја вредноста на аголот x.



Решение: Според цртежот имаме:$2a+2b+100^{\circ}=\ 180^{\circ}$ $(\mathbf{5}б)$
$\Rightarrow 2a+2b=80^{\circ}\Rightarrow a+b=\ 40^{\circ}$ $(\mathbf{5}б)$
$\Rightarrow 4a+4b+150^{\circ}+x=\ 360^{\circ}$ $(\mathbf{10}б)$
$\Rightarrow x=\ 50^{\circ}$ $(\mathbf{5}б)$

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Пресметај ја вредноста на бројниот израз: $\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}:\frac{5\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5}-4\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)$.

Решение: Бодување: Секој чекор се бодува со 3,5 поени, а краен резултат 4 поени.

$$\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}:\frac{5\frac{3}{5}+1\frac{1}{3}}{6\frac{3}{5}-4\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{10}{3}}{\frac{7}{2}-\frac{7}{3}}:\frac{\frac{28}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{33}{5}-\frac{13}{3}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{15}{6}+\frac{20}{6}}{\frac{21}{6}-\frac{14}{6}}:\frac{\frac{84}{15}+\frac{20}{15}}{\frac{99}{15}-\frac{65}{15}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{5}{20}-\frac{4}{20}}{\frac{8}{56}-\frac{7}{56}}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{\frac{35}{6}}{\frac{7}{6}}:\frac{\frac{104}{15}}{\frac{34}{15}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{56}}-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{35\cdot 6}{6\cdot 7}:\frac{104\cdot 15}{15\cdot 34}\right)\cdot\left(\frac{56}{20}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\left(\frac{35\cdot 6}{6\cdot 7}\cdot\frac{15\cdot 34}{104\cdot 15}\right)\cdot\left(\frac{14}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{17}\cdot\frac{35\cdot 6}{6\cdot 7}\cdot\frac{15\cdot 34}{104\cdot 15}\cdot\frac{13}{5}=\frac{1}{4}.$$

2. Нумерус 47-1 3845. Дарко сакал да си купи велосипед кој чинел 4200 денари. Тој во својата каса имал заштедено $\frac{3}{7}$ од сумата која му е потребна. Од дедо му добил 1000 денари како подарок за неговиот роденден, а татко му му рекол дека ќе учествува во купувањето на велосипедот со 27% од сумата. Уште колку денари му недостигаат на Дарко за да го купи велосипедот?

Решение. Дарко во каса имал $\frac{3}{7}\cdot 4200=1800$ ден. **(8 поени)**. Од татко му имал $27\%\cdot 4200=\frac{27}{100}\cdot 4200=1134$ ден. **(8 поени)** и 1000 денари од дедо му. Во касата имал вкупно 1800 + 1134 + 1000 = 3934 денари **(4 поени)**. На Дарко му недостигаат уште 4200 – 3934 = 266 денари **(5 поени)** за да го купи велосипедот.

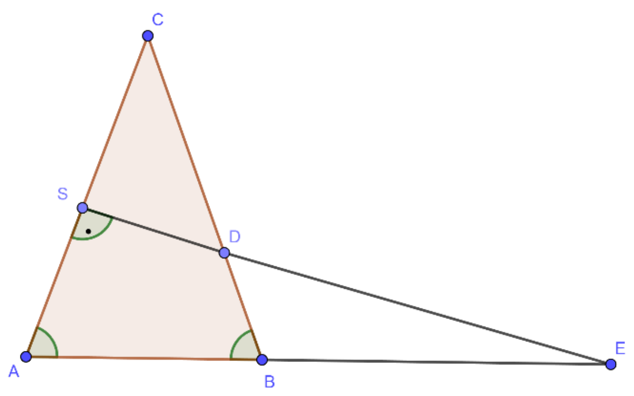
3. Нумерус 47-3 3899. Колку броеви во обликот $\overline{1a67b}$ се деливи со 18?

Решение. Бројот $\overline{1a67b}$ е делив со 18, ако е делив со 2 и со 9 затоа што 2 и 9 се заемно прости броеви **(5 поени)**. Бројот треба да биде парен, односно да завршува на 0, 2, 4, 6 или 8 **(4 поени)**. За да биде бројот делив со 9 треба збирот на цифрите од бројот да биде делив со 9 **(4 поени)**. За секоја од дадените можности (да завршува на 0, 2, 4, 6 или 8) , постои по една можност за избор на друга цифра, освен за 4 каде има 2 можности. Вкупно има 6 броеви (14670, 12672, 10674, 19674, 17676 и 15678) **(по 2 поени за секој точен број, т.е. вкупно 12 поени).**

4. Во рамнокракиот триаголник ABC аголот при врвот C е двапати помал од аголот при основата. Ако симетралата на кракот AC го сече другиот крак во точката D а правата AB ја сече во точката E, определи ги внатрешните агли на $\triangle BED$.

Решение: **(5 поени за цртеж)** Нека аголот при врвот го означиме со α, а аголот при основата со β, т.е. $\beta = 2\alpha$. Збирот на аглите во триаголникот е $180°$, па имаме $\alpha + 4\alpha = 180°,\ 5\alpha = 180°,\ \alpha = 36°$, **(2,5 поени)** односно $\beta = 72°$ **(2,5 поени).**

$\triangle AES$ е правоаголен тогаш $\measuredangle E = 90° - 2\alpha = 90° - 72° = 18°$ **(5 поени).**
За внатрешните агли во $\triangle BED$ важи: $\measuredangle E = 18°, \measuredangle B = \alpha + 2\alpha = 108°$ **(5 поени)** и $\measuredangle D = 180° - (108° + 18°) = 54°$. **(5 поени)**



VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Баба Роса и нејзината внука Елена заедно имаат 91 година. Пред 3 години баба Роса била 4 пати постара од внуката Елена. Колку години има баба Роса, а колку внуката Елена?

Решение:

Со *B* ќе го означиме бројот на години на баба Роса, а со V бројот на години на внуката Елена.
Тогаш, во согласност со првиот услов на задачата можеме да ја запишеме равенката $B + V = 91$. **(5)**
Слично, во согласност со вториот услов ќе ја запишеме равенката $B - 3 = 4(V - 3)$. **(5)** Оттука имаме

$$\begin{aligned} &B - 3 = 4V - 12 \\ &\Rightarrow B = 4V - 9 \end{aligned} \quad \textbf{(5)}$$

Заменувајќи во првата равенка за B, добиваме:

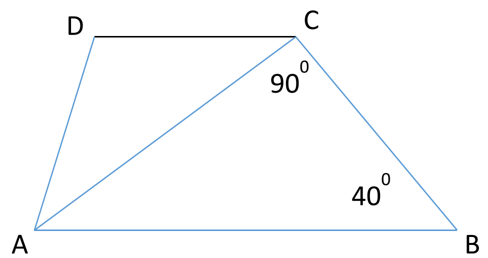
$$\begin{aligned} &4V - 9 + V = 91 \\ &\Rightarrow 5V = 100 \\ &\Rightarrow V = 20 \\ &\Rightarrow B = 4 \cdot 20 - 9 \\ &\Rightarrow B = 71 \qquad (5) \end{aligned}$$

Значи, Баба Роса има 71 година, а внуката Елена има 20 години. **(5)**

2. Дијагоналата AC на трапезот $ABCD$ е нормална на кракот BC, а острииот агол во темето B има 40^0. Определи ги останатите агли во трапезот, ако е познато дека помалата основа е еднаква на другиот крак.

Решение:

Од првите два услови на задачата, добиваме дека аголот $\measuredangle BAC = 90^0 - 40^0 = 50^0$. **(5)** Од третиот услов знаеме дека $\measuredangle CAD = \measuredangle ACD$.**(5)** Освен тоа, $\measuredangle ACD = \measuredangle BAC$ (како наизменични агли на трансверзалата). Оттука добиваме дека $\measuredangle CAD = \measuredangle BAC = 50^0$, **(5)** што значи дека аглите на трапезот се $\measuredangle BAD = 50^0 + 50^0 = 100^0$, $\measuredangle BCD = 90^0 + 50^0 = 140^0$ **(5)** и $\measuredangle CDA = 360^0 - (40^0 + 100^0 + 140^0) = 80^0$. **(5)**



Одговор: Аглите на трапезот се 100^0, 40^0, 140^0 и 80^0.

3. Збирот на броителот и именителот на една дропка е 296. По скратувањето на таа дропка се добива дропката $\frac{12}{25}$. Одреди ја таа дропка.

Решение:

Нека $\frac{a}{b}$ е бараната дропка. Тогаш $a+b=296$ и $\frac{a}{b}=\frac{12}{25}$ **(10)**

Од $a+b=296$ се добива $a=296-b \Rightarrow \frac{296-b}{b}=\frac{12}{25}$, т.е. $(296-b)\cdot 25=12b$. **(10)** Со решавање на равенката, се добива $b=200$, $a=296-200=96$.**(5)**

Бараната дропка е $\frac{96}{200}$.

4. Во трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) впишана е кружница со радиус 6 cm. Периметарот на трапезот е 24 cm. Пресметај ја плоштината на тој трапез.

Решение:

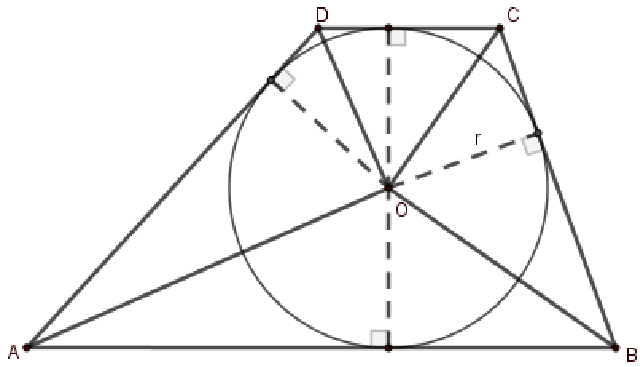
$$P=P_{\Delta ABO}+P_{\Delta BCO}+P_{\Delta CDO}+P_{\Delta DAO}$$ **(10)**

$$P=\frac{\overline{AB}\cdot r}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{CD}\cdot r}{2}+\frac{\overline{DA}\cdot r}{2}$$ **(10)**

$$P=\frac{r}{2}\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}\right)$$

$$P=\frac{r}{2}\cdot L=\frac{6}{2}\cdot 24=72cm^2$$ **(5)**

Плоштината на трапезот е 72 cm^2.



IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Кој е најголемиот двоцифрен број кој станува за 75% поголем кога неговите цифри ќе си ги заменат местата?

Решение: Нека $n=\overline{ab}=10a+b$ е бараниот двоцифрен број. Тогаш $N=\overline{ba}=10b+a$ е неговиот обратен број. ....**(2б)** Бидејќи n е најголем, може да земеме дека $n>0$. По услов на задачата имаме дека

$$N=n+\frac{75}{100}\cdot n.$$ ....**(5б)**

Оттука

$$N=\frac{100n+75n}{100}=\frac{175}{100}\cdot n=\frac{7}{4}\cdot n.$$ ....**(3б)**

Следува дека

$$10b+a=\frac{7}{4}\cdot(10a+b),$$
$$40b+4a=70a+7b,$$
$$33b=66a,$$ т.е.
$$b=2a$$ ......(*) ....**(5б)**

Значи, секој двоцифрен број $n=10a+b$ со услов $b=2a$ го има бараното својство. Бидејќи a и b се цифри имаме дека $b<10$ и, поради (*), $a<5$. Ова значи дека можните вредности на бројот n се 12, 24, 36 и 48. Најголемиот од нив е 48. ....**(10б)**

2. (Нумерус 50-1, задача 4160, 8-9 одделение) На основата AB на рамнокракиот ΔABC се избрани точки D и E (по тој редослед од темето A кон темето B), така што $\overline{AD}=\overline{BE}$ и $\measuredangle DCE=60^\circ$. Ако периметарот на ΔDEC е $30\ cm$, а збирот од периметрите на ΔADC и ΔBCE е $60\ cm$, пресметај го периметарот на ΔABC.

Решение: Од условот на задачата $\overline{AD}=\overline{BE}=x$, $\overline{DE}=y$ и $\measuredangle DCE=60^\circ$. Бидејќи триаголникот ΔABC е рамнокрак, важи $\overline{AC}=\overline{BC}=b$ и $\measuredangle BAC=\measuredangle CBA=\alpha$. ....**(5б)**

Ги разгледуваме ΔADC и ΔBCE: $\overline{AC}=\overline{BC}=b$, $\measuredangle DAC=\measuredangle CBE=\alpha$ и $\overline{AD}=\overline{BE}=x$. Според признакот САС следува $\Delta ADC\cong\Delta BEC$. Од ова, следува: $\overline{DC}=\overline{EC}$. ....**(5б)**

Бидејќи ΔDEC е рамнокрак и аголот при врвот $\measuredangle DCE=60^\circ$ следува дека ΔDEC е рамностран. ....**(1б)** Од

$$L_{\Delta DEC}=30\ cm\ \Rightarrow$$
$$3y=30\ cm\Rightarrow$$
$$y=10\ cm.$$ ....**(4б)**

Од $L_{\Delta ADC} + L_{\Delta BCE} = 60\ cm$ и $\overline{DC} = \overline{EC}$ добиваме:

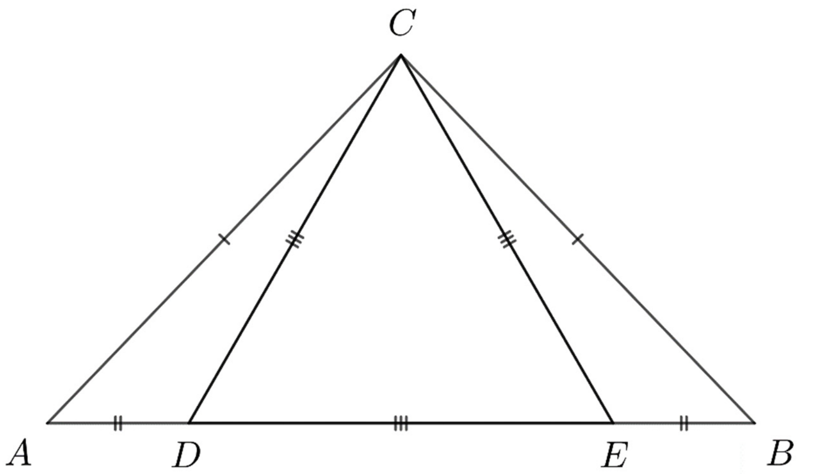
$$2x + 2y + 2b = 60\ cm\ .$$ ....**(4б)**

Бидејќи $y = 10\ cm$, следува

$$2x + 20 + 2b = 60\ cm \Leftrightarrow$$
$$2x + 2b = 40\ cm\ .$$ ....**(4б)**

Следува

$$L_{\Delta ABC} = 2x + 2b + y = 40cm + 10cm = 50cm.$$ ....**(2б)**



3. (Нумерус 49-3, задача 4105) Нека x, y и z се ненулти реални броеви, такви што $x+y+z=0$. Претпоставуваме дека

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1.$$

Пресметај ја вредноста на $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$.

Решение: Заедниччката вредност на $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ и $\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1$ ќе ја означиме со a, т.е.

$$a=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \text{ и } a=\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1$$ ....**(4б)**

Ги собираме двете равенства и добиваме

$$2a=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1=1+\frac{x+z}{y}+\frac{y+x}{z}+\frac{z+y}{x}$$ ....**(6б)**

Но, од $x+y+z=0$ имаме дека $x+z=-y$, $y+x=-z$ и $z+y=-x$, ...**(7б)**
па следува дека

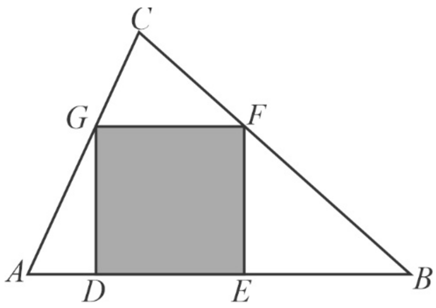
$$2a=1+\frac{-y}{y}+\frac{-z}{z}+\frac{-x}{x}=1-1-1-1=-2$$ ....**(5б)**

Оттука добиваме дека

$$2a=-2 \text{ , т.е. } a=-1.$$

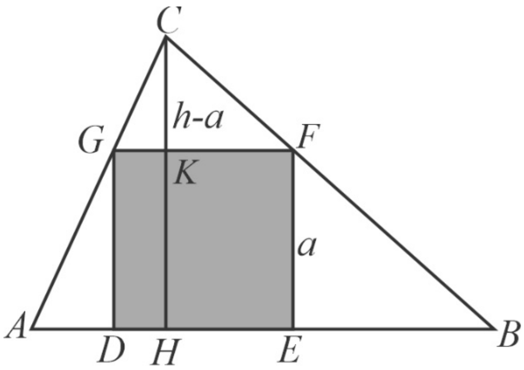
Значи бараната вредност е $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=-1$ ....**(3б)**

4. Во триаголникот ABC е впишан квадрат $DEFG$ како на цртежот. Ако $\overline{AD} + \overline{EB} = 16\ cm$ и плоштината на триаголникот GCF е $16\ cm^2$, пресметај ја плоштината на квадратот $DEFG$.



Решение: Нека со a ја означиме страната на квадратот $DEFG$, а со h должината на висината спуштена од темето C кон страната AB. Тогаш $h = \overline{CH}$ и $\overline{CK} = h - a$, каде што K е пресечна точка на h со страната FG на квадратот. Од сличноста на триаголниците GCF и ACB имаме дека

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CH}}. \qquad \text{.......}\mathbf{(5б)}$$



Оттука добиваме

$$\frac{a}{a + (\overline{AD} + \overline{EB})} = \frac{h-a}{h},$$
$$ah = (h-a)(a+16),$$
$$ah = ah + 16h - a^2 - 16a,$$
$$a^2 + 16a = 16h \qquad \ldots\ldots(1) \qquad \text{.......}\mathbf{(5б)}$$

Плоштината на триаголникот GCF е $P_{\Delta GCF} = \frac{1}{2}\overline{GF} \cdot \overline{CK}$. Оттука добиваме

$$16 = \frac{1}{2}a \cdot (h-a)$$
$$32 = ah - a^2,$$
$$h = \frac{a^2+32}{a} \qquad \ldots\ldots(2) \qquad \text{.......}\mathbf{(5б)}$$

Со замена на (2) во (1) добиваме

$$a^2 + 16a = 16 \cdot \frac{a^2+32}{a},$$
$$a^3 + 16a^2 = 16(a^2+32),$$
$$a^3 + 16a^2 = 16a^2 + 512,$$
$$a^3 = 512. \qquad \text{.......}\mathbf{(5б)}$$

Оттука, $a^3 = 8^3$, т.е. $a = 8\ cm$. Плоштината на квадратот е

$$P_{DEFG} = a^2 = 8^2 = 64\ cm^2. \qquad \text{.......}\mathbf{(5б)}$$