ШЕСТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 1: Сабота, 25. Јануари 2025

Задача 1. Патната инфраструктура во една држава се состои од парен број директни патишта, секој од кои е двонасочен. Притоа, за секои два града X и Y, има најмногу еден директен пат помеѓу нив и постои низа $X = X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = Y$ од градови такви што за секој $i = 0, \dots, n-1$ постои директен пат помеѓу X_i и X_{i+1}.

Докажете дека сите директни патишта во државата може да се ориентираат (т.е. на секој пат да се воведе еднонасочен сооообраќај) така што од секој град X излегуваат парен број директни патишта.

Задача 2. Нека $\triangle ABC$ е разностран и остроаголен во кој аголот во темето A е среден по големина, H е ортоцентарот и k е опишаната кружница со центар O. Нека опишаната кружница на $\triangle AHO$ ги сече страните AB и AC по втор пат во M и N соодветно, а висините CH и BH ја сечат k по втор пат во K и L соодветно. Докажете дека пресекот на KL и симетралата на отсечката AH е ортоцентарот на $\triangle AMN$.

Задача 3. Низа од реални броеви $(a_k)_{k\geq 0}$ ја нарекуваме *лог-конкавна* ако за секој $k \geq 1$, важи $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$. Нека $n, l \in \mathbb{N}$. Докажете дека низата $(a_k)_{k\geq 0}$ со општ член

$$a_k = \sum_{i=k}^{k+l} \binom{n}{i}$$

е лог-конкавна.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ШЕСТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 2: Недела, 26. Јануари 2025

Задача 4. Докажете дека за секои реални броеви a, b и c поголеми од 1 важи неравенството

$$a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b) \geq a^2+b^2+c^2+3abc\,.$$

Кога важи равенство?

Задача 5. Нека $s<t$ се позитивни цели броеви. Дефинираме низа со: $a_1=s$; $a_2=t$; a_3 е најмалиот цел број поголем од a_2 што е делив со a_1; општо, a_{n+1} е најмалиот цел број поголем од a_n што е делив со $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$.

а) Колку најмногу непарни броеви можат да се јават во ваква низа? (Образложете го одговорот.)

б) Докажете дека a_{2025} е делив со 2^{808}, независно од изборот на s и t.

Задача 6. Дадени се $n \geq 7$ точки во рамнина, никои три од кои не се колинеарни. Барем 7 парови од точките се поврзани со отсечки. За секоја таква отсечка s, нека $t(s)$ е бројот на триаголници за кои отсечката s е страна. Докажете дека постојат различни отсечки s_1, s_2, s_3 и s_4 за кои важи

$$t(s_1)=t(s_2)=t(s_3)=t(s_4)\,.$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.