ШЕСТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

J1. Одредете ги сите тројки од прости броеви (p, q, r) кои ја задоволуваат равенката

$$p2^q + r^2 = 2025\,.$$

Решение. Со трансформацијата на дадената равенката добиваме

$$p2^q = (45 - r)(45 + r)\,.$$

Следствено, еден од двата множитела на десната страна е степен на 2 додека другиот е производ на p со степен на 2. **(2п)**
Да забележиме дека броевите $45-r$ и $45+r$ се парни: имено, во спротивно обата се непарни па $q = 0$, што не е можно. Бидејќи во каноничната факторизација на збирот $(45-r)+(45+r) = 90$ бројот 2 се јавува со експонент 1 следува дека во едниот од броевите $45-r$ и $45+r$ експонентот на 2 е 1 а во другиот е $q-1 > 1$. **(2п)**
Ги разгледуваме можностите за $45 - r \in \{2,4,8,16,32\}$ и $45 + r = 64$ (бидејќи $r < 45$ не може степенот да биде поголем од 6). Се добива $r \in \{43, 41, 37, 29, 13, 19\}$, при што можностите за кои p и q се прости се $(43, 3, 41)$, $(37, 5, 29)$ и $(13, 7, 19)$. **(3п)** □

Забелешка. Заклучокот дека $r \notin \{43, 37, 13\}$ може да се добие од тоа што $q > 2$ мора да е непарен.

J2/C1. Патната инфраструктура во една држава се состои од парен број директни патишта, секој од кои е двонасочен. Притоа, за секои два града X и Y, има најмногу еден директен пат помеѓу нив и постои низа $X = X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = Y$ од градови такви што за секој $i = 0, \ldots, n-1$ постои директен пат помеѓу X_i и X_{i+1}.

Докажете дека сите директни патишта во државата може да се ориентираат (т.е. на секој пат да се воведе еднонасочен сообраќај) така што од секој град X излегуваат парен број директни патишта.

Решение 1. Ќе докажеме дека секој сврзан едноставен граф со парен број ребра ја дозволува посакуваната ориентација. Најпрво го докажуваме следново.

Тврдење. Множеството ребра $E(G)$ на секој сврзан едноставен граф G со парен број ребра може да се разбие на патишта со должина 2. (Претпоставката за сврзаност е неопходна, бидејќи тврдењето не важи за граф кој има компонента со непарен број ребра.) **(1п)**

Доказ. Спроведуваме индукција по $|E(G)|$. За базата на индукција, постои единствен пат со должина 2 доколку $|E(G)| = 2$. За $|E(G)| > 2$, нека $P : x, y, z$ е произволен пат со должина 2 во G, и нека $G' = G - \{xy, yz\}$ е графот добиен од G со отстранување на ребрата од P. Напоменуваме дека G' не мора да е сврзан; овој граф може да има најмногу три компоненти бидејќи секое отстранување на ребро го зголемува бројот на компоненти за најмногу 1. **(1п)** Ако $E(G')$ се разбива на помали сврзани подграфови секој од кои има парен број ребра, тогаш индуктивната претпоставка е применлива за секое такво парче и ја добиваме посакуваната декомпозиција на G. Затоа можеме да претпоставиме дека G' содржи две компоненти G'_1 и G'_2 секоја од кои има непарен број ребра и евентуално уште една (трета) компонента со парен број ребра. **(1п)** Да забележиме дека секоја од компонентите G'_1 и G'_2 го содржи барем едно од темињата x, y, z (бидејќи за секое ребро чие бришење го зголемува бројот на компоненти во графот, краевите на тоа ребро припаѓаат на различни компоненти од преостанатиот граф). Значи, можеме дополнително да претпоставиме дека $\{x, y\} \cap V(G'_1) \neq \varnothing$ и $\{y, z\} \cap V(G'_2) \neq \varnothing$. **(1п)** Но тогаш $G'_1 + xy$ и $G'_2 + yz$ се сврзани подграфови од G кои имаат парен број ребра **(1п)**, што повлекува дека $E(G')$ сепак се разбива на помали сврзани подграфови секој од кои има парен број ребра. ⋄

Враќајќи се на задачата, нека G е сврзан едноставен граф со парен број ребра. Горното тврдење ни дава разбивање на $E(G)$ на патишта со должина 2. Да ги ориентираме двете ребра на секој таков пат од средишното теме кон краевите. **(1п)** Со оглед дека секој така ориентиран 2-пат има парен допринос (0 или 2) кон излезниот степен на произволно теме, во резултантниот ориентиран граф секое теме ќе има парен излезен степен. **(1п)** □

Решение 2. Ја спроведуваме следнава постапка:

влез: сврзан едноставен граф G со парен број ребра;

чекор 1: избираме скелетно дрво T во G; **(1п)**
чекор 2: произволно го ориентираме секое ребро $e \in E(G) \backslash E(T)$; **(1п)**
чекор 3: избираме висечко ребро f во T и го ориентираме f така што посакуваниот услов е запазен за излезниот степен на лист-теме v (во однос на T) кое е инцидентно со реброто f; такво теме v постанува 'комплетирано' со оглед дека $E_G(v)$ е целосно ориентирано; **(1п)**
чекор 4: го заменуваме дрвото T со преостанатото неориентирано дрво $T - v$; **(1п)**
чекор 5: ако актуелното неориентирано дрво не се состои од само едно теме тогаш продолжуваме со чекор 3; **(1п)**
чекор 6: излезот е посакуваната ориентација на G. **(1п)**

Да забележиме дека резултантниот ориентиран граф ја има посакуваната особина. Навистина, секое освен едно од неговите темиња е комплетирано. Со оглед дека бројот на ребра во G

е парен, конструираната ориентација мора да го задоволува условот за излезниот степен и на некомплетираното теме. (Имено, збирот на сите излезни степени во ориентиран граф е еднаков на вкупниот број на ребра; следствено, не е можно само едно теме да има непарен излезен степен.) **(1п)** □

Решение 3. Нека G е сврзан едноставен граф со парен број ребра, и нека диграфот D е ориентација на G која ја минимизира кардиналноста (бројот на елементи) на подмножеството $S = S(D)$ од $V(G)$ дефинирано на следниот начин:

$$S(D) = \{u \in V(G) : \deg_D^+(u) \text{ е непарен}\}.$$

(2п)

Имајќи го предвид равенството

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_D^+(v) = |E(G)|,$$

кардиналноста $|S(D|$ е парен број. **(1п)**

Ако $S(D) = \varnothing$ тогаш ориентацијата D ја има посакуваната особина. Во спротивно, избираме две темиња $u, w \in S(D)$. Со оглед дека G е сврзан граф, постои пат P (во однос на G) чии краеви се u и w. **(1п)** Ја сменуваме ориентацијата на секое ребро долж P. **(1п)** Да забележиме дека за добиениот диграф D' важи $S(D') = S(D) \setminus \{u, w\}$ па така $|S(D')| < |S(D)|$. **(1п)** Но, ова противречи на минималниот избор на D. **(1п)** □

Забелешка. Второто и третото решение ја овозможуваат следнава посилна варијанта на задачата (формулирана во терминологија од теоријата на графови):

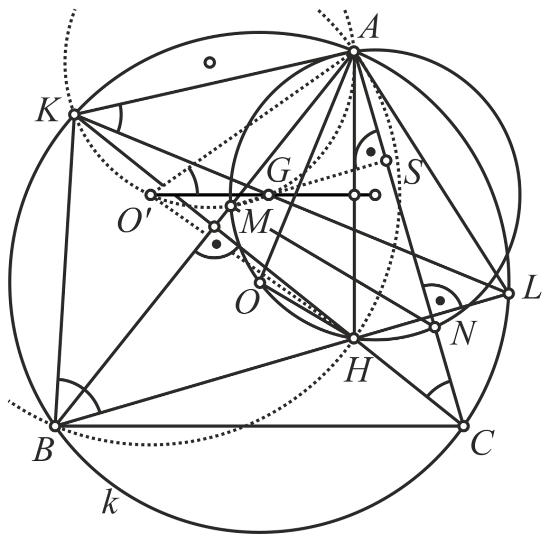
Нека G е сврзан едноставен граф и нека $S \subseteq V(G)$. Следниве искази се еквивалентни:

(1) Постои ориентација D на G таква што $S = \{u \in V(G) : \deg_D^+(u) \text{ е непарен}\}$.
(2) Кардиналностите $|S|$ и $|E(G)|$ имаат иста парност.

J3/C2. Нека $\triangle ABC$ е разностран и остроаголен во кој аголот во темето A е среден по големина, H е ортоцентарот и k е опишаната кружница со центар O. Нека опишаната кружница на $\triangle AHO$ ги сече страните AB и AC по втор пат во M и N соодветно, а висините CH и BH ја сечат k по втор пат во K и L соодветно. Докажете дека пресекот на KL и симетралата на отсечката AH е ортоцентарот на $\triangle AMN$.

Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$. Како периферни агли во опишаната кружница и агли со заемно нормални краци имаме $\angle KBA = \angle KCA = 90^\circ - \alpha = \angle ABL = \angle LKA$ **(1п)**. Оттука и бидејќи $HK \perp AB$ следува дека $\triangle HKB$ е рамнокрак и осносиметричен во однос на AB, т.е. H и K се осносиметрични во однос на AB **(1п)**. Од исти причини H и L се осносиметрични во однос на AC и општо точките осносиметрични на ортоцентарот на триаголникот во однос на страните лежат на опишаната кружница.

Ако G е ортоцентарот на $\triangle AMN$, тогаш точката G' која е осносиметрична на G во однос на AM лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMN$, т.е. околу $\triangle AMH$. Бидејќи $\triangle AMK$ и $\triangle AMH$ се осносиметрични во однос на AB од симетријата следува дека G лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMK$ **(1п)**. Ако S е подножјето на висината од M во $\triangle AMN$, добиваме дека $\angle GKA = \angle GMA \equiv \angle SMA = 90^\circ - \alpha = \angle LKA$. Оттука следува дека точките K, G и L се колинеарни **(1п)**.



Нека O' е осносиметричната точка на O во однос на AB. Како и за H со K, заклучуваме дека O' лежи на опишаната кружница околу $\triangle AMK$, од каде следува дека и $\angle GO'A = 90^\circ - \alpha$ **(1п)**. Од друга страна $\angle O'AH = \angle BAO + \angle BAH = 90^\circ - \angle ACB + \angle BAH = \angle HAC + \angle BAH = \alpha$, па $O'G \perp AH$ **(1п)**. Освен тоа кружницата која е осносиметрична на k во однос на AB има центар O' и минува низ A, B и H. Оттука следува дека $\triangle HAO'$ е рамнокрак, па нормалата $O'G$ на основата AH е и нејзина симетрала. Според тоа и симетралата на AH минува низ G **(1п)**.

Бидејќи $\triangle ABC$ е разностран, правите KL и $O'G$ не се совпаѓаат. Ако претпоставиме спротивно од $O'G \perp AH \perp BC$ добиваме дека $KL \parallel BC$, што е можно само за $\angle CKL = \angle KCB$. Но $\angle CKL = \angle CBL = 90^\circ - \angle ACB$ и $\angle KCB = 90^\circ - \angle CBA$, од каде $\angle ACB = \angle CBA$, т.е. $\triangle ABC$ е рамнокрак - контрадикција.

Заклучуваме дека симетралата на AH и правата KL имаат единствена заедничка точка (G), која е ортоцентарот на $\triangle AMN$. $\square$

Забелешка. Условот дека триаголникот е остроаголен е за O и H да бидат внатрешни точки, а α е среден по големина за G да биде внатрешна за $\triangle AMN$.

С3. Низа од реални броеви $(a_k)_{k\geq 0}$ ја нарекуваме *лог-конкавна* ако за секој $k \geq 1$, важи $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$. Нека $n, l \in \mathbb{N}$. Докажете дека низата $(a_k)_{k\geq 0}$ со со општ член

$$a_k = \sum_{i=k}^{k+l} \binom{n}{i}$$

е лог-конкавна.

Решение. Тврдењето следува од следните леми.

Лема 1. За секој природен број n, низата $b_k = \left(\binom{n}{k}\right)_{k\geq 0}$ е лог-конкавна.

Доказ. Имаме

$$\frac{b_{k-1}b_{k+1}}{b_k^2} = \frac{\binom{n}{k-1}\cdot\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2} = \frac{k!\cdot(n-k)!\cdot k!\cdot(n-k)!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!\cdot(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{k(n-k)}{(k+1)(n-k+1)} < 1,$$

од каде следува $b_{k-1}b_{k+1} \leq b_k^2$, т.е. b_n е лог-конкавна. **(2п)** ⋄

Лема 2. Ако $(c_k)_{k\geq 0}$ е лог-конкавна низа од позитивни броеви, тогаш за секое $l \geq 1$, низата $(c_k + c_{k+1} + \cdots + c_{k+l})_{k\geq 0}$ е лог-конкавна.
Доказ. За природен број $k \geq 1$ имаме

$$c_{k-1}c_{k+2} = \frac{c_{k-1}c_{k+1}c_kc_{k+2}}{c_kc_{k+1}} \leq \frac{c_k^2c_{k+1}^2}{c_kc_{k+1}} = c_kc_{k+1}.$$

За $m > n \geq 1$ природни броеви последното и $c_{k-1}c_{k+1} \leq c_k^2$ се обопштува до

$$c_{n-1}c_{m+1} = \frac{c_{n-1}c_{n+1}c_{m-1}c_{m+1}}{c_{n+1}c_{m-1}} \leq \frac{c_n^2c_m^2}{c_{n+1}c_{m-1}} \leq c_nc_m. \quad \textbf{(2п)}$$

Според ова добиваме

$$\begin{aligned}
(c_{k-1} + \cdots + c_{k+m})(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m+2}) &= \\
(c_{k-1} + c_k)(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m+2}) + (c_{k+1} + \cdots + c_{k+m})^2 &+ \\
(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m})(c_{k+m+1} + c_{k+m+2}) &\leq \\
(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m})^2 + c_k(c_k + 2c_{k+1} + \cdots + 2c_{k+m+1} + c_{k+m+2}) &+ \\
(c_{k+1} + 2c_{k+2} + \cdots + 2c_{k+m} + c_{k+m+1})c_{k+m+1} &= \\
(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m})^2 + 2(c_k + c_{k+m+1})(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m}) &+ \\
c_k^2 + 2c_kc_{k+m+1} + c_kc_{k+m+2} - c_{k+1}c_{k+m+1} + c_{k+m+1}^2 &\leq \\
(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m})^2 + 2(c_k + c_{k+m+1})(c_{k+1} + \cdots + c_{k+m}) + (c_k + c_{k+m+1})^2 &\leq (c_k + \cdots + c_{k+m+1})^2,
\end{aligned}$$

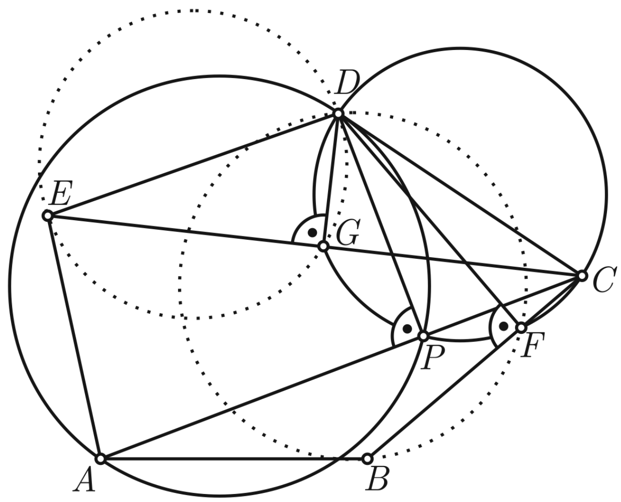
т.е. низата $(c_k + c_{k+1} + \cdots + c_{k+l})_{k\geq 0}$ е лог-конкавна. **(2п)** ⋄

Бидејќи биномните коефициенти се позитивни, тврдењето на задачата е директна последица на лемите. **(1п)** □

Забелешка. Доколку ученикот нема добиено поени за Лема 2, може да добие **(1п)** за доказ на Лема 2, за фиксен $k \geq 2$.

J4. За петаголникот $ABCDE$ важи $\angle DCB < 90^\circ < \angle EDC$. Нека кружницата со дијаметар BD ја сече правата BC по втор пат во точката F, а кружницата со дијаметар DE ја сече правата CE по втор пат во точката G. Докажете дека втората пресечна точка ($\neq D$) на опишаната кружница на $\triangle DFG$ и кружницата со дијаметар AD се наоѓа на отсечката AC.

Решение. Од $\angle DCB < 90^\circ < \angle EDC$ следува дека F е внатрешна точка на отсечката BC, а G е внатрешна точка на отсечката CE. Освен тоа како агли над дијаметар важи $\angle DGE = \angle DFB = 90^\circ$ **(1п)**, па и $\angle CGD = \angle CFD = 90^\circ$ **(1п)**. Оттука следува дека точките F и G лежат на кружницата со дијаметар CD, т.е. тоа е опишаната кружница на $\triangle DFG$ **(2п)**.



Нека P е втората пресечна точка на кружниците со дијаметри AD и CD. За аглите во неа важат $\angle DPA = \angle CPD = 90^\circ$ **(1п)**, па $\angle CPA = \angle DPA + \angle CPD = 180^\circ$, т.е. P лежи на отсечката AC. Што требаше да се докаже **(2п)**. $\square$

J5/C4. Докажете дека за секои реални броеви a, b и c поголеми од 1 важи неравенството

$$a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b) \geq a^2+b^2+c^2+3abc\,.$$

Кога важи равенство?

Решение 1. Со префрлање на сите членови од лева страна добиваме:

$$\begin{aligned}a^2(c-1)+b^2(a-1)+c^2(b-1)+ab(1-c)+bc(1-a)+ca(1-b) = \\ a(a-b)(c-1)+b(b-c)(a-1)+c(c-a)(b-1). \quad \textbf{(1п)}\end{aligned}$$

Нека $x=a-1$, $y=b-1$ и $z=c-1$. **(1п)** Од условот на задачата x, y и z се позитивни реални броеви. Претходниот израз се сведува на:

$$\begin{aligned}(x+1)(x-y)z+(y+1)(y-z)x+(z+1)(z-x)y = \\ xz(x-y)+yx(y-z)+zy(z-x)+xz-yz+yx-zx+zy-xy = \\ x^2z+y^2x+z^2y-3xyz \geq 3\sqrt[3]{x^2z\cdot y^2x\cdot z^2y}-3xyz = 0, \quad \textbf{(3п)}\end{aligned}$$

при што го користиме неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните реални броеви x^2z, y^2x и z^2y. Со ова го завршивме доказот на неравенството.
Равенство ќе важи кога овие три броеви се еднакви. Од $x^2z=y^2x$ добиваме дека $xz=y^2$, а од $z^2y=y^2x$, дека $z^2=yx$. Оттука $xz^3=xy^3$, па $y=z$, а по замена во $xz=y^2$ се добива и $x=z$. Според ова равенството важи ако и само ако $a=b=c$. **(2п)** □

Решение 2. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека a е најмалиот меѓу броевите. Нека $u=b-a\geq 0$, а $v=c-a\geq 0$. **(1п)** Даденото неравенство се трансформира во:

$$\begin{aligned}ab(b-c)+bc(c-a)+ca(a-b) \geq a(a-c)+b(b-a)+c(c-b) \Leftrightarrow \textbf{(1п)} \\ a(a+u)(u-v)+v(a+u)(a+v)-au(a+v) \geq \\ -av+(a+u)u+(a+v)(v-u) \Leftrightarrow \\ a^2(u-v+v-u)+a(u^2-uv+uv+v^2-uv)+uv^2 \geq \\ a(-v+u+v-u)+u^2+v^2-uv \Leftrightarrow \\ a(u^2+v^2-uv)+uv^2 \geq u^2+v^2-uv.\textbf{(3п)}\end{aligned}$$

Последното неравенство важи бидејќи $a>1$, $uv^2\geq 0$ и $u^2+v^2-uv=\frac{1}{2}(u^2+v^2+(u-v)^2)\geq 0$. **(1п)**

Равенството се достигнува ако и само ако $u=v=0$, т.е., $a=b=c$. **(1п)** □

J6/C5. Нека $s < t$ се позитивни цели броеви. Дефинираме низа со: $a_1 = s$; $a_2 = t$; a_3 е најмалиот цел број поголем од a_2 што е делив со a_1; општо, a_{n+1} е најмалиот цел број поголем од a_n што е делив со $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$.
а) Колку најмногу непарни броеви можат да се јават во ваква низа? (Образложете го одговорот.)
б) Докажете дека a_{2025} е делив со 2^{808}, независно од изборот на s и t.

Решение.
а) За $s = 3$ и $t = 7$ се добива низата $3, 7, 9, 21, 63, 126, 189, \ldots$, која има 6 непарни броеви. Ќе докажеме дека ваква низа не може да има повеќе од 6 непарни броеви.
Бидејќи a_{n-1} е делив со a_1, a_2, ..., a_{n-4} и a_{n-3}, членот на низата a_{n+1} може да се дефинира како најмалиот број поголем од a_n кој е делив со a_{n-1} и a_{n-2}.
Ако a_i е парен, тогаш сите членови почнувајќи од a_{i+2} се деливи со a_i, па се парни. Според ова најголемиот број на непарни броеви мора да се јави на последователно на почетокот и најмногу уште еден потоа. **(1п)**
Нека за s и t се добива низа со најмалку 5 последователни непарни членови. Ако d е најголемиот заеднички делител на s и t, $a = \frac{s}{d}$ и $b = \frac{t}{d}$, тогаш a, b и d се непарни броеви. Освен тоа $a_3 = cad$ за природниот број c за кој $ca > b \geq (c-1)a$, а бидејќи е непарен мора $c \geq 3$. Сега $a_4 = abd$ бидејќи a и b се заемно прости и $b \geq (c-1)a \geq 2c-2 > c$.
Нека m е најмалиот заеднички содржател на b и c. Важи $a_5 = kamd$ за некој непарен број k, при што $(k-1)amd \leq abd \leq amd$. Бидејќи k е непарен, мора $k = 1$. Сега за a_6 знаеме дека е делив со abd и cad, т.е. со $a_5 = amd$, па мора $a_6 = 2a_5$ да е парен. Со ова докажавме дека не може да има 6 последователни непарни членови во низата. А оттука следува дека не може да има 7 непарни членови во ваква низа. **(1п)** □
б) Ја разгледуваме низата N дадена со $u, 2u, 3u, 4u, 6u, 12u, 24u, 36u, 48u, 72u, 144u, \ldots$. Забележуваме дека ако шестиот член $12u$ го заменеме со v низата почнувајќи од него е $v, 2v, 3v, 4v, 6v, 12v, \ldots$. Со што можеме да заклучиме дека во ваква низа $a_{i+5} = 12a_i = 2^2 \cdot 3a_i$. (Во **а)** докажавме дека низата зависи само од последните три члена). **(1п)**
Како и во случајот **а)** нека d е најголемиот заеднички делител на s и t, $a = \frac{s}{d}$ и $b = \frac{t}{d}$. Јасно е дека сите членови на низата се деливи со d, па доволно е да го разгледаме случајот кога $s = a$ и $t = b$ се заемно прости.
За $a = 1$ ако $b = 2$ ја имаме низата N ($a_{10} = 144$), а за $b > 2$ првите членови се $1, b, b+1, 2b, b(b+1)$. Ако b е парен следните три члена се $a_6 = 2b(b+1)$, $a_7 = 4b(b+1)$ и $a_8 = 6b(b+1)$ со што се продолжува со низата N и $a_{10} = 6a_6$ е делив со 4. Ако пак b е непарен следните членови се $2b(b+1)$ и $3b(b+1)$, низата N почнува од петтиот член и $a_{10} = 12a_5$ е делив со 4. Во секој од случаите имаме дека $4 \mid a_{10}$, а од $a_{2025} = 2^{806} \cdot 3^{403} \cdot a_{10}$ следува дека 2^{808} е делител на a_{2025}.

(2п)

Нека сега $a \geq 2$ и како во **а)** третиот член е ac, така што $a(c-1) \leq b < ac$. Од $b \geq a(c-1) \geq 2c-2 \geq c$ следува дека $a_4 = 2ab$ ако $a = c = 2$ и $a_4 = ab$ во спротивно. За $a = c = 2$, мора $b = 3$, па низата е $2, 3, 6, 12, 18, \ldots$, т.е. низата N започнува од третиот член. Во спротивно имаме низа $a, b, ac, ab, \ldots$. Нека m е најмалиот заеднички содржател на b и c. Важи $a_5 = kam$ за некој природен број k, при што важат неравенствата $(k-1)am \leq ab \leq am$. Оттука $k \in \{1, 2\}$, каде $k = 2$ ако и само ако $b = m$. Во овој случај $c \mid b$, па следните членови се $a_5 = 2ab$, $a_6 = 3ab$, т.е. низата N почнува од четвртиот член. Во случајот кога $k = 1$ имаме $a_5 = am$, $a_6 = 2am$ (мора да е делив со ab и ac и да е поголем од am) и $a_7 = 3am$, па во овој случај низата N почнува од петтиот член. Во секој од случаите имаме дека $a_{2025} = 2^{808} \cdot 3^{404} \cdot a_5$ е делив со 2^{808}. **(2п)** □

C6. Дадени се $n \geq 7$ точки во рамнина, никои три од кои не се колинеарни. Барем 7 парови од точките се поврзани со отсечки. За секоја таква отсечка s, нека $t(s)$ е бројот на триаголници за кои отсечката s е страна. Докажете дека постојат различни отсечки s_1, s_2, s_3 и s_4 за кои важи

$$t(s_1) = t(s_2) = t(s_3) = t(s_4)\,.$$

Решение. Да претпоставиме дека постои конфигурација кај која не постојат четири отсечки кои се страни на еднаков број на триаголници. Тогаш постојат најмногу 3 отсечки кои не се страни на ниту еден триаголник. Ги разгледуваме останатите m отсечки; ова е *редуцираната конфигурација* и јасно $m \geq 7-3=4$. Секоја од овие m отсечки учествува во најмалку 1 триаголник и за секој $k \geq 1$ има најмногу 3 отсечки кои учествуваат во точно k триаголници. Според ова, ако s_1 е отсечка која учествува во максимален број триаголници, да речеме r на број, тогаш редуцираната конфигурација има најмногу $3r$ отсечки; следствено, $t(s_1) = r \geq \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Слично, ако s_2 е отсечка $\neq s_1$ за која $t(s_2)$ се максимизира, да речеме $t(s_2) = q$ (не е исклучено дека $q = r$), тогаш редуцираната конфигурација има најмногу $3q+1$ отсечка; следствено, $t(s_2) = q \geq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$. Да забележиме и дека, независно од тоа дали $q = r$ или $q < r$, неравенството $m \leq 3q+1$ повлекува дека $m \leq 2q + r$. **(1п)**

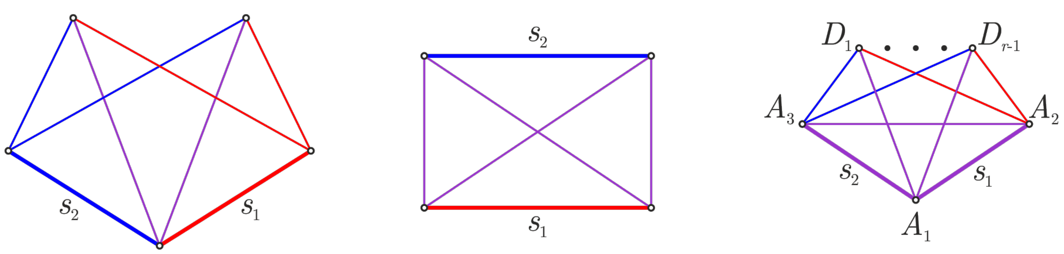
Бидејќи секој триаголник е еднозначно определен со две свои страни, триаголниците кои ја содржат s_1 опфаќаат $2r+1$ отсечки. Ги боиме овие отсечки во црвена боја. **(1п)**

Слично, страните на триаголниците кои како страна ја имаат отсечката s_2 ги боиме во сина боја; притоа, ако некоја од тие отсечки е претходно обоена во црвено тогаш нејзината боја постанува виолетова (= црвена + сина). На овој начин сме обоиле $2q+1$ отсечка со сина боја. Нека c е бројот на црвени, b е бројот на сини и v е бројот на виолетови отсечки. Според претходната дискусија имаме $c + v = 2r + 1$ и $b + v = 2q + 1$. **(1п)** За бројот на обоени отсечки важи $b + c + v \leq m \leq 2q + r$, па имаме

$$v \geq (b+v) + (c+v) - m \geq (2q+1) + (2r+1) - (2q+r) = r+2\,. \tag{1}$$

(1п)

Ги разгледуваме трите можни случаи.



Случај 1 Случај 2 Случај 3

Случај 1. *Отсечката s_2 не е виолетова, но има заедничко теме со отсечката s_1.* Тогаш има најмногу r виолетови отсечки (од заедничкото теме на s_1 и s_2), односно $v \leq r$. Но ова противречи на неравенството (1). ⋄

(1п)

Случај 2. *Отсечката s_2 не е виолетова и нема заедничко теме со s_1.* Значи има најмногу 4 виолетови отсечки (имено, секоја виолетова отсечка мора да поврзува теме на s_1 со теме s_2). Од (1) следува дека $r \leq 2$. Така, од неравенствата $2r+1+1 \leq m \leq 3r$ и $m \geq 4$, имаме дека $r = 2$ и $m = 6$. Значи, $v = 4$ и редуцираната конфигурација се состои од шесте отсечки над темињата на s_1 и s_2. Но тогаш секоја од тие 6 отсечки учествува во точно два триаголника, што противречи на појдовната претпоставка. $\diamond$

(1п)

Случај 3. *Отсечката s_2 е виолетова.* Тогаш триаголникот кој го формираат s_1 и s_2 е виолетов. Дополнително имаме најмногу уште $q-1$ виолетова отсечка (од заедничкото теме на s_1 и s_2); значи $v \leq q+2$. Така, имајќи ги предвид неравенствата $q \leq r$ и (1), заклучуваме дека $q = r = v-2$. Следствено, $c = b = r-1$ и $c+b+v = 3r \geq m$. Значи $r \geq 2$. Заклучуваме и дека $c+b+v = m = 3r$, што ни кажува дека нема необоена отсечка во редуцираната конфигурација. Оваа конфигурација мора да се состои од триаголник $A_1A_2A_3$ чии две страни се $A_1A_2 \equiv s_1$ и $A_1A_3 \equiv s_2$, и темиња $D_1, D_2, \ldots, D_{r-1}$ кои со отсечки се поврзани единствено со темињата A_1, A_2 и A_3. Секоја отсечка A_iD_j учествува во точно два триаголника (со уште по едно од останатите A-темиња). Така најдовме барем $3(r-1)$ отсечки кои учествуваат во точно два триаголника. Оттаму, $3(r-1) \leq 3$ односно $r \leq 2$. Следствено, $r = 2$. Но тогаш редуцираната конфигурација се состои од вкупно 6 отсечки (над 4 темиња A_1, A_2, A_3, D_1), и секоја од овие отсечки е страна на точно два триаголника, што противречи на појдовната претпоставка. $\diamond$

(1п)

Во секој од случаите добивме контрадикција, што значи дека секогаш постојат 4 отсечки кои се страни на еднаков број триаголници. $\square$

Забелешка. Претпоставката дека има барем 7 отсечки не може да се релаксира. На пример, долеприкажаната конфигурација се состои од еден триаголник и уште три независни отсечки, и ја нема посакуваната особина.