ШЕСТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 1: Сабота, 25. Јануари 2025

Задача 1. Одредете ги сите тројки од прости броеви (p, q, r) кои ја задоволуваат равенката
$$p2^q + r^2 = 2025\,.$$

Задача 2. Патната инфраструктура во една држава се состои од парен број директни патишта, секој од кои е двонасочен. Притоа, за секои два града X и Y, има најмногу еден директен пат помеѓу нив и постои низа $X = X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n = Y$ од градови такви што за секој $i = 0, \ldots, n-1$ постои директен пат помеѓу X_i и X_{i+1}.

Докажете дека сите директни патишта во државата може да се ориентираат (т.е. на секој пат да се воведе еднонасочен сооообраќај) така што од секој град X излегуваат парен број директни патишта.

Задача 3. Нека $\triangle ABC$ е разностран и остроаголен во кој аголот во темето A е среден по големина, H е ортоцентарот и k е опишаната кружница со центар O. Нека опишаната кружница на $\triangle AHO$ ги сече страните AB и AC по втор пат во M и N соодветно, а висините CH и BH ја сечат k по втор пат во K и L соодветно. Докажете дека пресекот на KL и симетралата на отсечката AH е ортоцентарот на $\triangle AMN$.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ШЕСТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 2: Недела, 26. Јануари 2025

Задача 4. За петаголникот $ABCDE$ важи $\angle DCB < 90^\circ < \angle EDC$. Нека кружницата со дијаметар BD ја сече правата BC по втор пат во точката F, а кружницата со дијаметар DE ја сече правата CE по втор пат во точката G. Докажете дека втората пресечна точка ($\neq D$) на опишаната кружница на $\triangle DFG$ и кружницата со дијаметар AD се наоѓа на отсечката AC.

Задача 5. Докажете дека за секои реални броеви a, b и c поголеми од 1 важи неравенството

$$a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b) \geq a^2+b^2+c^2+3abc\,.$$

Кога важи равенство?

Задача 6. Нека $s < t$ се позитивни цели броеви. Дефинираме низа со: $a_1 = s$; $a_2 = t$; a_3 е најмалиот цел број поголем од a_2 што е делив со a_1; општо, a_{n+1} е најмалиот цел број поголем од a_n што е делив со $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$.
а) Колку најмногу непарни броеви можат да се јават во ваква низа? (Образложете го одговорот.)
б) Докажете дека a_{2025} е делив со 2^{808}, независно од изборот на s и t.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.