28. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^4+3}{b}+\frac{b^4+3}{c}+\frac{c^4+3}{a}\geq 12.$$

Кога важи знакот за равенство?

Решение. Од неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$a^4+3=a^4+1+1+1\geq 4a, \quad \textbf{(3п)}$$

и еквивалентно $b^4+3\geq 4b$ и $c^4+3\geq 4c$.

По делење на овие равенства со b, c и a и собирање добиваме

$$\frac{a^4+3}{b}+\frac{b^4+3}{c}+\frac{c^4+3}{a}\geq 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq \quad \textbf{(2п)}$$

$$4\cdot 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=4\cdot 3\cdot 1=12, \quad \textbf{(2п)}$$

при што последното неравенство е повторно меѓу аритметичка и геометриска средина.

Равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$. **(1п)** □

Задача 2. За група од 2024 ученици знаеме дека секој ученик има барем 1011 познаници меѓу останатите членови на групата. Освен тоа, постои ученик кој има барем 1012 познаници во групата. Докажи дека за секој пар ученици X, Y, во групата постојат ученици $X_0=X$, $X_1,\dots,X_{n-1}$, $X_n=Y$, така што за секој индекс $i=0,\dots,n-1$, учениците X_i и X_{i+1} се познаници.

Решение. Нека A е ученикот кој има барем 1012 познаници, а B е ученик кој не го познава A (ако таков постои). **(2п)**

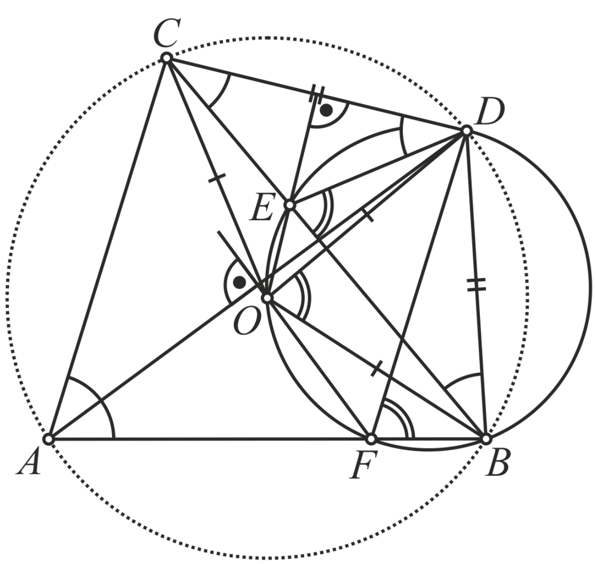
Да претпоставиме дека A и B немаат заеднички познаник. Тогаш вкупниот број на познаници на A и B е најмалку $1012+1011=2023$. Но, меѓу нив не се A и B, па добиваме дека групата има најмалку 2025 ученици, што е контрадикција. **(3п)**

Според ова секој ученик или го познава A или има заеднички познаник со A. За произволни ученици X и Y ги имаме следниве случаи:

- $X = A$ го познава Y
- $X = A$ познава X_1, кој го познава Y
- $X = X_0$ го познава $X_1 = A$, кој го познава Y
- $X = X_0$ го познава $X_1 = A$, кој познава X_2 кој го познава Y и
- $X = X_0$ познава X_1 кој го познава $X_2 = A$, а A познава X_3 кој го познава Y. **(3п)** $\square$

Задча 3. Симетралата на $\angle BAC$ ја сече опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$ во точката D. Нека симетралите на отсечките CD и AD ги сечат страните BC и AB во точките E и F, соодветно. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, докажи дека точките F, D, E и O лежат на иста кружница.

Решение 1.



Бидејќи четириаголникот $ABDC$ е тетивен и користејќи го фактот дека AD е симетрала на $\angle BAC$ имаме

$$\angle BCD = \angle BAD = \angle DAC = \angle DBC. \text{ **(1п)**}$$

Од последното и од $OB = OC$, следува четириаголникот $OBDC$ е делтоид, па $OD \perp BC$.

Од теоремата за централен и периферен агол имаме

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha. \text{ **(1п)**}$$

Бидејќи OD е симетрала на $\angle BOC$ (OD е оска на симетрија) следува

$$\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOC = \alpha. \text{ (1п)} \tag{1}$$

Од друга страна, од $ED = EC$ имаме

$$\angle CDE = 2\angle ECD = \frac{\alpha}{2},$$

па

$$\angle BED = \alpha. \text{ (1п)} \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува четириаголникот $BDEO$ е тетивен. **(1п)**

Бидејќи AD е тетива, нејзината симетрала минува низ O, па

$$\angle DFO = \angle OFA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

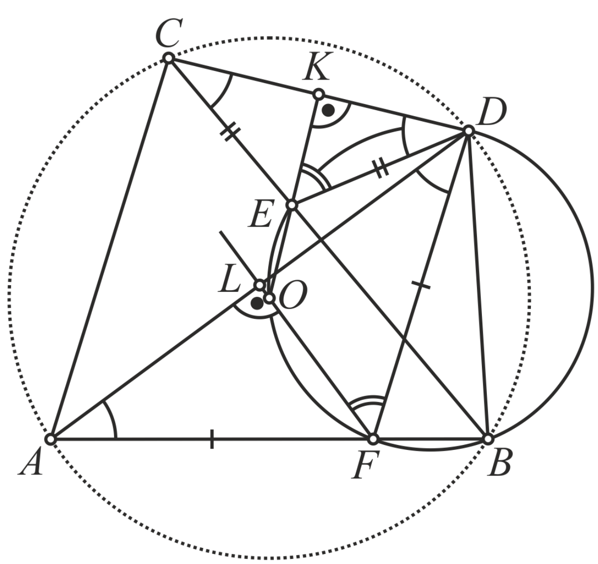
од каде следува дека

$$\angle BFD = \alpha. \text{ (1п)} \tag{3}$$

Од (1) и (3) следува четириаголникот $BDEF$ е тетивен. **(1п)**

Бидејќи низ три неколинеарни точки минува единствена кружница, од тетивноста на четириаголниците $BDEO$ и $BDEF$, добиваме дека четириаголникот $FDEO$ е тетивен, т.е. точките F, D, E и O лежат на иста кружница. **(1п)** □

Решение 2.



Бидејќи четириаголникот $ABDC$ е тетивен имаме

$$\angle FAD \equiv \angle BAD = \angle BCD \equiv \angle ECD. \text{ **(1п)**}$$

Триаголниците $\triangle ADF$ и $\triangle CDE$ се рамнокраки, затоа што F и E лежат на симетралите на основите. **(1п)** А, бидејќи имаат еднаков агол на основата тие се слични. **(2п)**

Нека K е средината на CD, а L средината на AD. Отсечките CD и AD се тетиви во опишаната кружница, па нивните симетрали KE и FL минуваат низ центарот O. **(1п)**

Од $\triangle ADF \sim \triangle CDE$ добиваме дека $\angle DFO \equiv \angle DFL = \angle DEK$. **(2п)**

Според ова точките F, D, E и O лежат на иста кружница. **(1п)** □

Задача 4. Нека a_1, a_2, ..., a_n е низа од природни броеви што се полни квадрати и a_{i+1} се добива од a_i со допишување на една цифра од десно. Одреди ги сите вакви низи со максимална должина.

Решение 1. Бараниот број е $n = 3$ и се добива за 1, 16 и 169. **(1п)**

Да забележиме дека нема полни квадрати меѓу 1690 и 1699. **(1п)**

Ова ќе бидат единствените три броеви кои го задоволуваат ова својство. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека постојат $a_1 = b^2 > 1$, $a_2 = c^2$ и $a_3 = d^2$ кои го задоволуваат својството. Од дефиницијата имаме дека $d^2 = 100b^2 + m$, за некој $0 < m < 100$ ($m \neq 0$, бидејќи $10b^2$ не може да биде полн квадрат). **(2п)**

Според ова $d = 10b + k$, за некој природен број $k > 0$. Од

$$d^2 = 100b^2 + 20bk + k^2$$

следува дека $20bk + k^2 < 100$, што нема решение за $b > 4$. **(2п)**

Останува да ги разгледаме случаите $b \in \{2, 3\}$ (случаите $b = 1$ и $b = 4$ се сведуваат на примерот). За $b = 2$ добиваме $a_1 = 4$, $a_2 = 49$ и нема полн квадрат меѓу 490 и 499 **(1п)**, а за $b = 3$ добиваме $a_1 = 9$ и нема полн квадрат меѓу 90 и 99. **(1п)** □

Решение 2. Нека $a_1 = b^2$, $a_2 = c^2$ и $a_3 = d^2$ се броеви кои го задоволуваат својството. Од дефиницијата имаме дека $d^2 = 100b^2 + m$, за некој $0 < m < 100$ ($m \neq 0$, бидејќи $10b^2$ не може да биде полн квадрат). **(2п)**

Според ова $d = 10b + k$, за некој природен број $k > 0$, од каде добиваме:

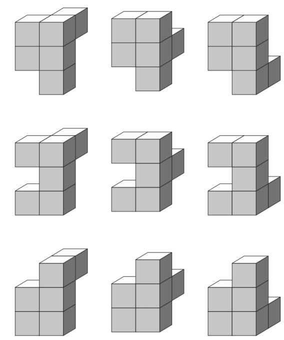
$$(d - 10b)(d + 10b) = m \implies k(20b + k) = m. \text{ **(2п)**}$$

Природите решенија за (b, k, m) на последната равенка кога $m < 100$ се: $(1, 1, 21), (1, 2, 44), (1, 3, 69), (1, 4, 96), (2, 1, 41), (2, 2, 84), (3, 1, 61)$ и $(4, 1, 81)$. **(1п)**

За a_2 се добиваат $12, 14, 16, 19, 44, 48, 96$ и 168 соодветно. Од нив само 16 е полн квадрат. **(2п)**

Следува дека бараниот број е $n = 3$ и се добива единствено за 1, 16 и 169. **(1п)** □

Задача 5. Фигурите на цртежот десно се составени од по шест коцки со страна 1. Кои од телата можат да се пополнат со овие фигури:



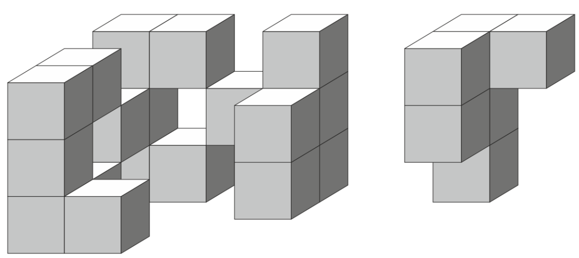
а) коцка со страна 3 од која е отстранет еден раб (три слоја со форма)?

б) квадар со димензија $5 \times 4 \times 3$ од кој се отстранети два раба со должина три од една 5×3 страна (три слоја со форма)?

Секоја фигура е дозволено да се искористи најмногу еднаш, фигурите не смеат да се преклопуваат, ниту да излегуваат од телото и секоја мала коцка од телото мора да е покриена со мала коцка од фигура.

Решение.

а) Ги означуваме дадените фигури од првиот ред со 11, 12 и 13 по редослед, во вториот со 21, 22 и 23 и во третиот со 31, 32 и 33. Пополнувањето е можно. Еден начин на пополнување е даден на цртежот. По поврзување на трите фигури лево (22, 23 и 32) останува точно простор за фигурата десно (33).



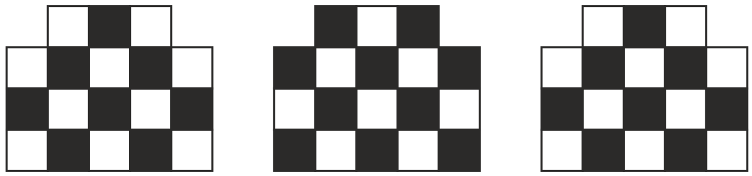
22	22	32
23	33	33
23	33	

22	32	32
22	33	32
23	33	

22	22	32
23	33	32
23	23	

На вториот цртеж е дадено пополнување на телото при што најлевиот слој е најгоре, а најдесниот најдолу. **(3п)** □

б) Ги означуваме дадените фигури од првиот ред со 11, 12 и 13 по редослед, во вториот со 21, 22 и 23 и во третиот со 31, 32 и 33. Ги боиме малите коцки во даденото тело црно-бело наизменично (секои две соседни коцки се со различна боја). На цртежот е претставено боењето по слоеви и лесно можеме да забележиме дека има 28 бели и 26 црни коцки. **(1п)**



Јасно е дека за целосно да се пополни телото мора да се искористат сите девет фигури (телото има $54 = 9 \cdot 6$ мали коцки). Забележуваме дека како и да се поставени фигурите 11, 13, 22, 31 и 33 ќе имаат еднаков број на бели и црни коцки, а фигурите 12, 21, 23 и 32 имаат четири коцки во едната боја, а две во другата. **(2п)**

Да претпоставиме дека сме успеале да го пополниме целото тело со овие девет фигури, при што b од фигурите имаат за две повеќе бели коцки, а c имаат за две повеќе црни коцки. Јасно $b + c = 4$, а за во целото тело да има точно две повеќе бели коцки мора $b - c = 1$. Со собирање на равенките добиваме $2b = 5$, што не е можно бидејќи b е цел број. Според ова пополнувањето на ова тело е невозможно. **(2п)** □