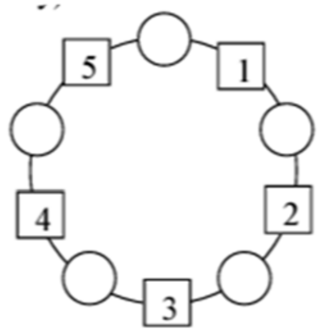
Дополнително тестирање за државен првак за 6 одд

10.6.2024 година

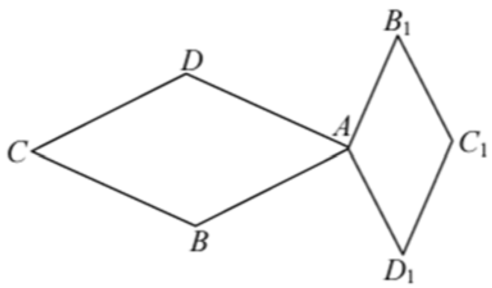
1. Петар изработил вкупно 16 хартиени фигури. Секоја од нив е обоена во една од боите жолта или црвена. Ако му даде на својот брат 3 фигури, тогаш во секој случај ќе има повеќе фигури обоени со црвена боја отколку со жолта боја. Ако му даде на својот брат половина од фигурите обоени со црвена боја, тогаш ќе има повеќе фигури обоени со жолта боја отколку со црвена боја. Колку фигури се обоени со црвена боја?

2. Во секое од кругчињата на цртежот запиши по еден број така што бројот во секое квадратче е еднаков на збирот на броевите во двете негови соседни кругчиња.



3. Нека a, b и n е природнои броеви такви што a^2+2nb^2 е квадрат на природен број. Докажи дека бројот a^2+nb^2 може да се запише како збир на квадратите на два природни броја.

4. Ромбот $ABCD$ и ромбот $AB_1C_1D_1$ имаат заедничко теме во A и притоа $\measuredangle DAB_1 = \measuredangle BAD_1$, како на цртежот. Докажи дека средината на отсечката BD_1, пресекот на дијагоналите на ромбот $ABCD$ и пресекот на дијагоналите на ромбот $AB_1C_1D_1$ се темиња на рамнокрак триаголник.



Време за работа 120 минути

Секоја точно решена задача се вреднува со 25 поени

РЕШЕНИЈА

1. Петар изработил вкупно 16 хартиени фигури. Секоја од нив е обоена во една од боите жолта или црвена. Ако му даде на својот брат 3 фигури, тогаш во секој случај ќе има повеќе фигури обоени со црвена боја отколку со жолта боја. Ако му даде на својот брат половина од фигурите обоени со црвена боја, тогаш ќе има повеќе фигури обоени со жолта боја отколку со црвена боја. Колку фигури се обоени со црвена боја?

Решение. Знаеме дека ако Петар му даде на својот брат 3 фигури, тогаш во секој случај ќе има повеќе фигури обоени со црвена боја отколку со жолта боја. Од ова следува дека Петар има најмалку 4 фигури обоени со црвена боја повеќе од фигурите обоени со жолта боја. Бидејќи има вкупно 16 фигури, тогаш само следниве опции одговараат на оваа состојба:

• 16 фигури со црвена боја и 0 фигури со жолта боја,

• 15 фигури со црвена боја и 1 фигура со жолта боја,

• 14 фигури со црвена боја и 2 фигури со жолта боја,

• 13 фигури со црвена боја и 3 фигури со жолта боја,

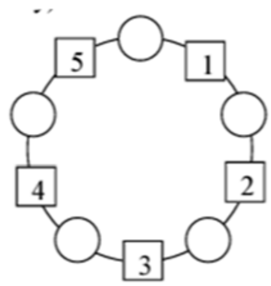
• 12 фигури со црвена боја и 4 фигури со жолта боја,

• 11 фигури со црвена боја и 5 фигури со жолта боја,

• 10 фигури со црвена боја и 6 фигури со жолта боја.

Сега од другиот услов на задачата, ако му даде на својот брат половина од фигурите обоени со црвена боја, тогаш ќе има повеќе фигури обоени со жолта боја отколку со црвена боја. Очигледно е дека од наведените случаи, само последниот одговара на условите, односно обоил 10 фигури со црвена боја и 6 фигури со жолта боја.

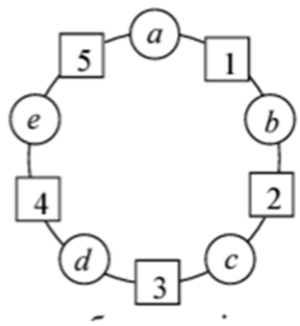
2. Во секое од кругчињата на цртежот запиши по еден број така што бројот во секое квадратче е еднаков на збирот на броевите во двете негови соседни кругчиња.



Решение. Да ги означиме броевите во кругчињата како на цртежот. Тогаш $a+b=1$, т.е. $b=1-a$

па $b+c=2$, однсосно $c=2-b=1+a$.

Натаму, $d=3-c=2-a$ и $e=4-d=2+a$.



Бидејќи $a+e=5$ добиваме $a+2+a=5$, т.е. $2+2a=5$ и оттука $a=\frac{3}{2}$.

Според тоа другите броеви се $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{5}{2}$, $d=\frac{1}{2}$ и $e=\frac{7}{2}$.

3. Нека a, b и n е природнои броеви такви што a^2+2nb^2 е квадрат на природен број. Докажи дека бројот a^2+nb^2 може да се запише како збир на квадратите на два природни броја.

Решение. Нека $a^2+2nb=c^2$, каде $c\in\mathbb{N}$. Тогаш $c^2-a^2=2nb^2$ е парен, од каде следува дека $c>a$ и a и c имаат иста парност. Сега, од $nb^2=\frac{c^2-a^2}{2}$ добиваме дека

$$a^2+nb^2=a^2+\frac{c^2-a^2}{2}=\frac{c^2+a^2}{2}=\frac{2c^2+2a^2}{4}=$$
$$=\frac{(a+c)^2+(c-a)^2}{4}=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

Бидејќи a и c имаат иста парност и $c>a$ следува дека $a+c$ и $c-a$ се парни природни броеви па $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ се природни броеви. Оттука следува тврдењето на задачата.

4. Ромбот $ABCD$ и ромбот $AB_1C_1D_1$ имаат заедничко теме во A и притоа $\measuredangle DAB_1=\measuredangle BAD_1$, како на цртежот. Докажи дека средината на отсечката BD_1, пресекот на дијагоналите на ромбот $ABCD$ и пресекот на дијагоналите на ромбот $AB_1C_1D_1$ се темиња на рамнокрак триаголник.

Решение. Бидејќи $\measuredangle DAB_1=\measuredangle BAD_1$ и од тоа што дијагоналата го дели внатрешниот агол на ромбот на два еднакви дела следува дека $\measuredangle DAO=\measuredangle OAB$ и $\measuredangle B_1AO_1=\measuredangle O_1AD_1$, добиваме дека $\measuredangle OAO_1=180°$, т.е. точките O, A и O_1 се колинеарни. Значи четириаголникот OO_1D_1B е правоаголен трапез.

Нека E е средина на BD_1 и нека F е подножјето на нормалата од E на OO_1. Тогаш $OB\parallel EF\parallel D_1O_1$, па EF е средна линија на трапезот OO_1D_1B. Следува дека E лежи на симетралата на OO_1, па триаголникот OEO_1 е рамнокрак.