

28. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Среда, 5. Јуни 2024

Задача 1. Нека a , b и c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^4 + 3}{b} + \frac{b^4 + 3}{c} + \frac{c^4 + 3}{a} \geq 12.$$



Кога важи знакот за равенство?

Задача 2. За група од 2024 ученици знаеме дека секој ученик има барем 1011 познаници меѓу останатите членови на групата. Освен тоа, постои ученик кој има барем 1012 познаници во групата. Докажи дека за секој пар ученици X, Y , во групата постојат ученици $X_0 = X, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = Y$, така што за секој индекс $i = 0, \dots, n - 1$, учениците X_i и X_{i+1} се познаници.

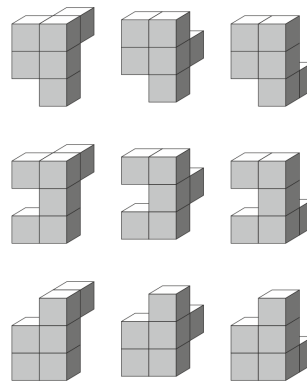
Задача 3. Симетралата на $\angle BAC$ ја сече опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$ во точката D . Нека симетралите на отсечките CD и AD ги сечат страните BC и AB во точките E и F , соодветно. Ако O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, докажи дека точките F, D, E и O лежат на иста кружница.

Задача 4. Нека a_1, a_2, \dots, a_n е низа од природни броеви што се полни квадрати и a_{i+1} се добива од a_i со допишување на една цифра од десно. Одреди ги сите вакви низи со максимална должина.

Задача 5. Фигурите на цртежот десно се составени од по шест коцки со страна 1. Кои од телата можат да се пополнат со овие фигури:

- а) коцка со страна 3 од која е отстранет еден раб (три слоја со форма )?
- б) квадар со димензија $5 \times 4 \times 3$ од кој се отстранети два раба со должина три од една 5×3 страна (три слоја со форма )?

Секоја фигура е дозволено да се искористи најмногу еднаш, фигурите не смеат да се преклопуваат, ниту да излегуваат од телото и секоја мала коцка од телото мора да е покриена со мала коцка од фигура.



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

**Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Секоја задача се вреднува со 8 поени.**