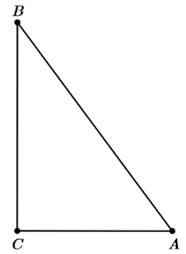
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VI ОДДЕЛЕНИЕ

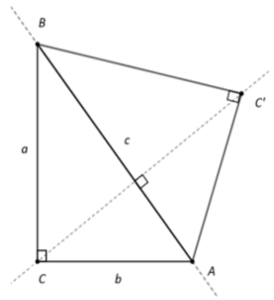
1. Одреди ги сите прости броеви p за кои важи дека $2<\frac{p}{16}<3$.

Решение. Користејќи дека $\frac{2}{1}=\frac{32}{16}$ и $\frac{3}{1}=\frac{48}{16}$, дадениот израз $2<\frac{p}{16}<3$ го трансформираме во облик $\frac{32}{16}<\frac{p}{16}<\frac{48}{16}$. (**10б**) Според тоа, добиваме дека бараните прости броеви се оние за кои важи $32<p<48$. (**5б**) Следува дека простите броеви кои го задоволуваат условот на задачата се броевите 37, 41, 43 и 47. (**10б**)

2. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C, како на цртежот. Должината на страната AC е $\frac{3}{4}$ од должината на страната BC, а должината на страната AB е за 25% поголема од должината на страната BC. Нека C' е точка добиена при осна симетрија на точката C во однос на страната AB. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC, ако периметарот на четириаголникот $CAC'B$ е еднаков на $16{,}8\,\text{cm}$.



Решение. Нека $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\overline{AB}=c$ се страните на триаголникот ABC. Од условите на задачата $\overline{AC}=\frac{3}{4}\cdot\overline{BC}=0{,}75\cdot\overline{BC}$, односно $b=0{,}75\cdot a$ и $\overline{AB}=\overline{BC}+\frac{25}{100}\cdot\overline{BC}=1{,}25\cdot\overline{BC}$, односно $c=1{,}25\cdot a$. (**5б**) При осна симетрија на точката C во однос на страната AB се добива точката C', па триаголникот ABC' е правоаголен триаголник добиен со осна симетрија на триаголникот ABC во однос на страната AB. (**5б**)

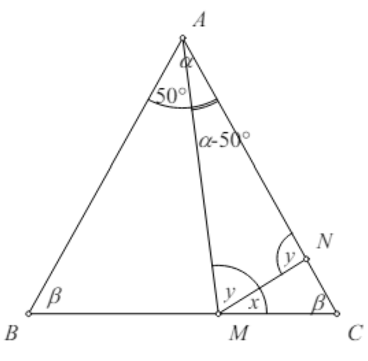


Од својствата на осна симетрија $\overline{AC}=\overline{AC'}$, $\overline{BC}=\overline{BC'}$, па заклучуваме дека четириаголникот $CAC'B$ има два пара еднакви страни. Збирот на должините на страните на четириаголникот $CAC'B$ е $16{,}8\,\text{cm}$, па $2\cdot a+2\cdot b=16{,}8$. (**5б**) Со замена за $b=0{,}75\cdot a$, добиваме дека $2\cdot a+2\cdot 0{,}75\cdot a=16{,}8$, односно $3{,}5\cdot a=16{,}8$, од каде следува дека $a=16{,}8:3{,}5$, односно $a=4{,}8\,\text{cm}$. (**5б**) Според тоа, со замена во $b=0{,}75\cdot a$ и $c=1{,}25\cdot a$ добиваме дека $b=0{,}75\cdot 4{,}8\,\text{cm}$ и $c=1{,}25\cdot 4{,}8\,\text{cm}$, односно $b=3{,}6\,\text{cm}$ и $c=6\,\text{cm}$. Конечно, периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $L=a+b+c$, па $L=4{,}8+3{,}6+6$, односно $L=14{,}4\,\text{cm}$. (**5б**)

3. Марко запишал на лист еден трицифрен број. Ако се допише цифрата 9 пред цифрата на стотките се добива четирицифрен број којшто е 21 пати поголем од бројот на Марко. Кој трицифрен број го запишал Марко на листот?

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abc}$. Ако се допише цифрата 9 пред цифрата на стотките се добива четирицифрениот бројот $\overline{9abc}$. (**5б**) Од условот на задачата $\overline{9abc}=21\cdot\overline{abc}$,(**5б**) односно $9000+\overline{abc}=21\cdot\overline{abc}$. (**5б**) Тогаш $21\overline{abc}-\overline{abc}=9000$, односно $20\overline{abc}=9000$. (**5б**) Следува бараниот број е $\overline{abc}=9000:20=450$. Значи, Марко го запишал на листот бројот 450. (**5б**)

4. Даден е рамнокрак $\Delta ABC\left(\overline{AB}=\overline{AC}\right)$ така што $\angle BAC>50^\circ$. На страната BC е избрана точка M, така што $\angle BAM=50^\circ$ и на страната AC е избрана точка N, така што $\overline{AM}=\overline{AN}$. Определи ја големината на аголот CMN.



Решение: Скица 5 бода. $\measuredangle CMA$ е надворешен агол на ΔAMB, па важи $x+y=\beta+50^\circ$ (1) (**5б**) $\measuredangle ANM$ е надворешен агол на триаголникот ΔMCN, па важи $y=x+\beta$ (2) (**5б**) Ако се замени (2) во (1) се добива: $x+x+\beta=\beta+50^\circ$ т.е. $2x=50^\circ$. Значи, аголот

$\measuredangle CMN = 25°$. (**10б**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. На еден тест имало 20 прашања. За точно одговорено прашање се добивале 8 поени, за неточно одговорено прашање се одземале 5 поени, а неодговорено прашање се бодувало со 0 поени. На колку прашања Кирил не одговорил, ако на тестот имал освоено вкупно 120 поени?

Решение. Со x го означуваме бројот на точно одговорени прашања, а со y бројот на неодговорени прашања. Тогаш $20-x-y$ е бројот на погрешно одговорени прашања. (**5 б**) Според тоа, ја добиваме равенката од облик $8\cdot x-5(20-x-y)=120$, односно $13\cdot x+5\cdot y=220$, каде што $x>0, y\geq 0$ и $x+y\leq 20$. (**10 б**) Од последната равенка x треба да биде делив со 5. Бидејќи $13\cdot 20=260>220$, добиваме дека $x\in\{5,10,15\}$. (**7 б**) Со проверка добиваме дека за единствено $x=15$ ги задоволува условите, а според тоа $y=\frac{220-13\cdot 15}{5}=5$. Значи, Кирил не дал одговор на 5 прашања. (**3 б**)

2. Најди ги сите подредени парови (x,y), каде што x и y се природни броеви, така што $x+y=100$ и $\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19$.

Решение. Од $\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19$ добиваме дека

$$\frac{\frac{1}{x}+y}{x+\frac{1}{y}}=19 \Leftrightarrow \frac{\frac{1+xy}{x}}{\frac{xy+1}{y}}=19 \Leftrightarrow \frac{(1+xy)y}{(xy+1)x}=19 \Leftrightarrow \frac{y}{x}=19 \Leftrightarrow y=19x.\ (\mathbf{10\ б})$$

Се бараат сите броеви за кои $x+y=100$ и $y=19x$. Со замена на $y=19x$ во $x+y=100$, добиваме $x+19x=100 \Leftrightarrow 20x=100 \Leftrightarrow x=100:20 \Leftrightarrow x=5$. (**10 б**) За $x=5$ добиваме $y=19\cdot 5=95$, па единствениот пар природни броеви кој ги задоволува условите на задачата е $(x,y)=(5,95)$. (**5 б**)

3. Една работилница требало да произведе одредена количина од еден ист производ за неколку дена. Според планот за производство требало да се произведува по 10 производи дневно. Но, секој ден се произведувало 20% повеќе од предвиденото на дневно ниво. Осум дена пред крајниот рок биле произведени 72 производи повеќе од вкупната предвидена количината на производи во планот. Колку вкупно производи произвела работилницата до крајниот рок?

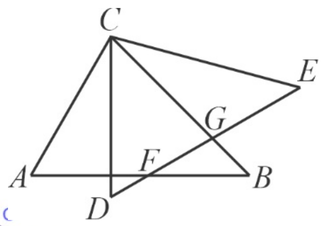
Решение: Нека x е бројот на произведени производи осум дена пред крајниот рок. Осум дена пред крајниот рок биле произведени 72 производи повеќе од вкупната предвидена количината на производи во планот, па $x-72$ е вкупната предвидена количина на производи во планот. Бидејќи требало да се произведува по 10 производи дневно, според планот биле потребни вкупно $\frac{x-72}{10}$ денови. (**5 б**) Секој ден се произведувало 20% повеќе од предвиденото на дневно ниво, што значи 2 производи повеќе од предвиденото, односно 12 производи дневно. Според тоа, вкупниот број на денови во планот е исто така еднаков на $\frac{x}{12}+8$. (**5 б**) Со изедначување на изразите $\frac{x-72}{10}$ и $\frac{x}{12}+8$, ја добиваме равенката $\frac{x-72}{10}=\frac{x}{12}+8$. (**3 б**) Со решавање на равенката добиваме дека

$$\frac{x-72}{10}=\frac{x}{12}+8 \Leftrightarrow 12(x-72)=10x+960 \Leftrightarrow 12x-864=10+960 \Leftrightarrow 12x-10x=960+864 \Leftrightarrow$$

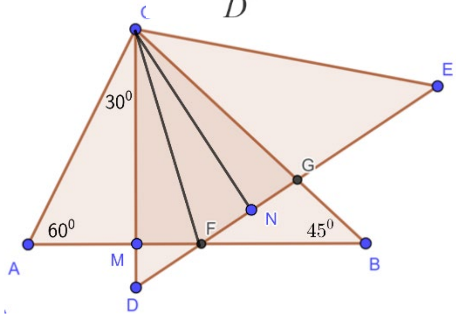
$$2x=1824 \Leftrightarrow x=1824:2 \Leftrightarrow x=912,\ (\mathbf{7\ б})$$

односно осум дена пред крајниот рок се произведени 912 производи, за $912:12=76$ дена. Значи, според планот требало да се работи $76+8=84$ дена. (**3 б**) Заклучуваме дека, до крајниот рок, работилницата произвела $84\cdot 12=1008$ производи. (**2 б**)

4. Даден е триаголникот ABC со агли $\angle BAC=60°$ и $\angle ABC=45°$. Триаголниците ABC и DEC се складни, како на цртежот. Аголот $\angle ACD=30°$. Докажи дека триаголникот CFG е рамнокрак.



Решение 1. Го разгледуваме $\triangle AMC$. Од дадените агли во условот на задачата аголот AMC е прав агол, односно $\measuredangle AMC=180°-(60°+30°)=90°$, па добиваме дека CM е висина на $\triangle AMC$, односно и на триаголникот ABC (**5 б**).
Спуштаме висина CN од C на страната DE.
Сега од складноста на триаголниците ABC и DEC, следува дека и $\triangle AMC$ е складен со $\triangle DNC$ (АСА).



$\measuredangle MCB=\measuredangle ACB-\measuredangle ACM=75°-30°=45°$ ($\measuredangle ACB=180^0-(60^0+45^0)=75^0$) (**5 б**) $\measuredangle NCB=\measuredangle MCB-\measuredangle MCN=45°-30°=15°$, од каде добиваме дека $\measuredangle NGC=180°-(90°+15°)=75°$. Тогаш $\measuredangle NGB=180°-75°=105°$, односно $\measuredangle BFG=180°-(105°+45°)=30°$, па $\measuredangle GFM=180°-30°=150°$ (**5 б**). Сега ги разгледуваме триаголниците FMC и FNC, имаат заедничка хипотенуза, прав агол спроти хипотенузата и еднаква катета $\overline{CM}=\overline{CN}$, па тие се складни правоаголни триаголници според признакот САС (**5 б**). Од тука $\measuredangle CFG=150°:2=75°$. Добиваме дека $\measuredangle FGC=\measuredangle CFG=75°$, односно триаголникот FGC е рамнокрак (**5 б**)

Решение 2. Го разгледуваме $\triangle AMC$, па $\measuredangle AMD=\measuredangle AMC=90°$ (**5 б**). Спуштаме висина CN од C на страната DE (**5 б**). Триаголниците ABC и DEC се складни, па имаат еднакви висини, односно $\overline{CN}=\overline{CM}$. Од складноста на триаголниците ABC и DEC следува дека $\measuredangle ECD=\measuredangle ACB=180°-105°=75°$. Триаголниците MFC и FNC се складни правоаголни триаголници според признакот САС, односно имаат прав агол, заедничка хипотенуза и $\overline{CN}=\overline{CM}$. (**5 б**). Аголот $\measuredangle MFD=90°-60°=30°$. Исто така $\measuredangle CFB=\measuredangle MFD=30°$, како накрсни агли. Аголот CGN е надворешен агол за триаголникот FGB, односно $\measuredangle CGN=30°+45°=75°$. Од правоаголниот триаголник CNG следува дека $\measuredangle GCN=90°-75°=15°$.(**5 б**). Аголот $DCN=45°-15°=30°$. Од складноста на триаголниците MFC и FNC следува дека $\measuredangle MCF=\measuredangle NCF=30°:2=15°$. Триаголниците CFN и CGN се складни според признакот АСА. Од складноста добиваме дека $\overline{NG}=\overline{NF}$ и $\overline{FC}=\overline{GC}$, односно триаголникот CFG е рамнокрак (**5 б**).

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ако $a+b+c=2024$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$, пресметај ја вредноста на изразот $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.

Решение 1. Од $a+b+c=2024$ имаме $a=2024-b-c$, $b=2024-a-c$ и $c=2024-a-b$. (**6 б**) Со замена во $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2024-b-c}{b+c}+\frac{2024-c-a}{c+a}+\frac{2024-a-b}{a+b}= \text{(4 б)}$$

$$=\frac{2024}{b+c}-\frac{b+c}{b+c}+\frac{2024}{c+a}-\frac{c+a}{c+a}+\frac{2024}{a+b}-\frac{a+b}{a+b}=\frac{2024}{b+c}-1+\frac{2024}{c+a}-1+\frac{2024}{a+b}-1= \text{(8 б)}$$

$$=\frac{2024}{b+c}+\frac{2024}{c+a}+\frac{2024}{a+b}-3=2024\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3=2024-3=2021. \text{(7 б)}$$

Решение 2. Од $a+b+c=2024$ и $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=1$ имаме дека

$$2024=(a+b+c)\cdot 1=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=$$ (**10 б**)

$$=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=\frac{a+b}{a+b}+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{b}{c+a}=$$ (**8 б**)

$$=1+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+1+1+\frac{b}{c+a}=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},$$ (**4 б**)

односно $2024=3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$. Според тоа, добиваме дека $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2021$. (**3 б**)

2. Кате, Нена и Ана саделе цвеќиња. Ако Кате засади 16 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено толку цвеќиња колку што засадиле Нена и Ана заедно. Ако Нена засади 39 цвеќиња повеќе отколку што засадила, тогаш би имала засадено двојно повеќе отколку што засадиле Кате и Ана заедно. Нивните презимиња се Крстеска, Петрова и Милевска. Колку цвеќиња засадила секоја од нив и кое ѝ е презимето, ако бројот на цвеќиња што ги засадила Крстеска е делив со 5, бројот на цвеќиња што ги засадила Петрова е делив со 7, а бројот на цвеќиња што ги засадила Милевска е прост број и никоја не засадила повеќе од 15 цвеќиња.

Решение. Нека Кате, Нена и Ана засадиле x, y и z цвеќиња, соодветно. Од условот на задачата ги добиваме равенките: $x+16=y+z$ и $y+39=2(x+z)$. (**5 б**) Од првата равенка имаме $y=x-z+16$ и со негова замена во втората равенка, добиваме

$$x-z+16+39=2x+2z \Leftrightarrow x+3z=55 \Leftrightarrow x=55-3z.$$ (**5 б**)

Бидејќи $x\le 15 \Rightarrow 55-3z\le 15 \Leftrightarrow 3z\ge 40 \Leftrightarrow z\ge 13\frac{1}{3}$. Но, z е природен број и не е поголем од 15, па следува дека $z=14$ или $z=15$. (**5 б**)

Ако $z=14$, добиваме дека $x=55-3\cdot 14=13$, $y=x-z+16=13-14+16=15$. Притоа, $x=13$ е прост број (Милевска), $y=15$ е делив со 5 (Крстеска) и $z=14$ е делив со 7 (Петрова). (**5 б**)

Ако $z=15$, добиваме дека $x=55-3\cdot 15=10$, $y=x-z+16=10-15+16=11$. Но, ниту еден од броевите 15, 10 и 11 не е делив со 7, што е спротивно на условот дека бројот на цвеќиња што ги засадила Петрова е делив со 7. Значи, единствено решение е $x=13, y=15$ и $z=14$, односно Кате Милевска засадила 13 цвеќиња, Нена Крстеска засадила 15 цвеќиња, а Ана Петрова засадила 14 цвеќиња. (**5 б**)

3. Нека природните броеви a, b и c се должини на страните на еден триаголник. Ако висината спуштена кон страната a е еднаква на збирот на останатите две висини на триаголникот, тогаш $a^2+b^2+c^2$ е квадрат на природен број. Докажи!

Решение. Нека h_a, h_b и h_c се висините спуштени кон страните a, b и c, соодветно. Од условот $h_a=h_b+h_c$. Од тоа што $a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h_c$, добиваме дека $\frac{h_c}{a}=\frac{h_a}{c}$ и $\frac{h_b}{a}=\frac{h_a}{b}$. (**4 б**) Следствено имаме $\frac{h_a}{a}=\frac{h_c+h_b}{a}=h_a\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$, односно $\frac{1}{a}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{b+c}{bc}$. (**4 б**) Со квадрирање на последното равенство, добиваме $\frac{1}{a^2}=\frac{b^2+2bc+c^2}{b^2c^2}$, односно $b^2c^2=a^2(b^2+2bc+c^2)$. (**5 б**) Со трансформирање на последното равенство добиваме

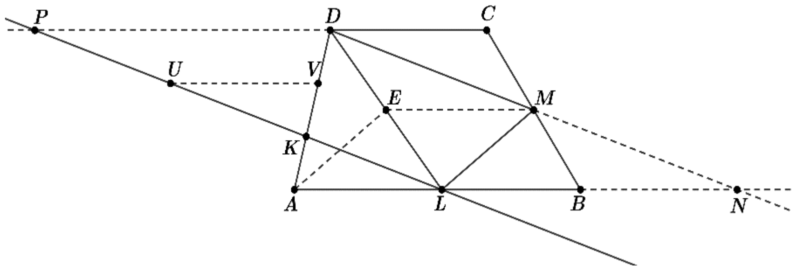
$$b^2c^2=a^2\left(b^2+2bc+c^2\right) \Leftrightarrow b^2c^2=a^2\left(a^2+b^2+c^2+2bc-a^2\right) \Leftrightarrow b^2c^2=a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)+2a^2bc-a^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^4-2a^2bc+b^2c^2=a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow\left(a^2-bc\right)^2=a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=\left(\frac{a^2-bc}{a}\right)^2.$$ (**7 б**)

Од тоа што a,b,c се природни броеви и од $\frac{1}{a}=\frac{b+c}{bc}\Leftrightarrow\frac{bc}{a}=b+c$, следува дека $\frac{bc}{a}$ е природен број, односно a е делител на производот bc. Јасно, a е делител на a^2. Оттука следува дека $\frac{a^2-bc}{a}$ е природен број, па $a^2+b^2+c^2$ е квадрат на природен број. (**5 б**)

4. Во трапезот $ABCD$ симетралата на аголот во темето D ја сече основата AB во точката L и точката M е средина на страната BC. Правата паралелна на DM, која минува низ точката L, ја сече AD во точката K. Ако аголот DLM е прав, определи го односот $\overline{DK}:\overline{KA}$.

Решение. Нека продолжението на DM ја сече AB во точката N, а продолжението на LK ја сече CD во точката P. Нека $\overline{LB}=x$ и $\overline{CD}=y$. Триаголниците DCM и NBM се складни триаголници ($\overline{MC}=\overline{MB}$, $\angle CMD=\angle BMN$ и $\angle DCM=\angle NBM$), од каде следува дека $\overline{BN}=\overline{CD}=y$. (**6 б**)



Четириаголникот $PLND$ е паралелограм, $LN\parallel DP$ и $PL\parallel DN$, па $\overline{PD}=\overline{LN}=\overline{LB}+\overline{BN}=x+y$. (**2 б**) Од условот DL е симетрала на аголот во темето D, па $\angle LDC=\angle ADL$. Од друга страна, $AB\parallel CD$, па $\angle ALD=\angle LDC$, како наизменични агли. Според тоа $\angle ALD=\angle LDC=\angle ADL$, односно ΔDLA е рамнокрак. (**5 б**) Значи, висината AE кон страната LD на триаголникот DLA е и тежишна линија. Па, EM е средна линија на трапезот $LBCD$, од каде следува $\overline{EM}=\frac{\overline{LB}+\overline{CD}}{2}=\frac{x+y}{2}$. (**4 б**) Бидејќи AE и LM се нормални на LD, тие се меѓусебно паралелни и $ALME$ е паралелограм. Според тоа, $\overline{AL}=\overline{EM}=\frac{x+y}{2}=\frac{\overline{PD}}{2}$. (**2 б**) Ги разгледуваме средините U и V на PK и DK, соодветно. Од тоа што $\overline{UV}=\frac{\overline{PD}}{2}=\overline{AL}$, триаголниците UVK и LAK се складни $\left(\overline{UV}=\overline{AL},\angle LAK=\angle UVK,\angle AKL=\angle VKU\right)$, од каде следува $\overline{DK}=2\overline{KV}=2\overline{KA}$, односно $\overline{DK}:\overline{KA}=2:1$. (**6 б**)

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Определи го природниот број $\overline{abcdef}$ ако важат следниве услови: $a\cdot d\neq 0$, $a+d=b+e=c+f=9$ и количникот $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}$ е природен број.

Решение. Нека $A=\overline{abcdef}$ и $B=\overline{defabc}$. Бидејќи количникот е природен број, имаме дека $a>d$. **.....**(**3б**) Уште важи и $100000\leq B\leq A\leq 899999$. **.....**(**3б**) Збирот на броевите A и B е

$$\overline{abcdef}+\overline{defabc}=999999$$ **.....**(**3б**)

и бидејќи $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}\in\mathbb{N}$, постои $k\in\mathbb{N}$, така што $\frac{\overline{abcdef}}{\overline{defabc}}=k$, т.е. $A=k\cdot B$. **.....**(**5б**) Следува дека

$$A+B=999999,\text{ т.е.}$$
$$kB+B=999999,$$
$$(k+1)\cdot B=999999.$$ **.....**(**3б**)

Значи $k+1$ е делител на бројот 999999, најмногу еднаков на 9, т.е. $k+1\in\{1,3,7,9\}$. **.....**(**3б**) За $k+1=1$, $k+1=3$ и $k+1=9$, добиваме дека $B=999999$, $B=333333$ и $B=111111$, соодветно, што противречи на дадениот услов. **.....**(**3б**) За $k+1=7$, т.е. $k=6$ добиваме дека $B=142857$ и $A=857142$. **.....**(**2б**)

2. Нека $ABCD$ е квадрат. Точките K, L, M и N лежат на страните AB, BC, CD и DA, соодветно и тие се темиња на квадрат. Правите DK и NM се сечат во точка E, а правите CK и LM се сечат во точка F. Докажи дека правите EF и AB се паралелни.

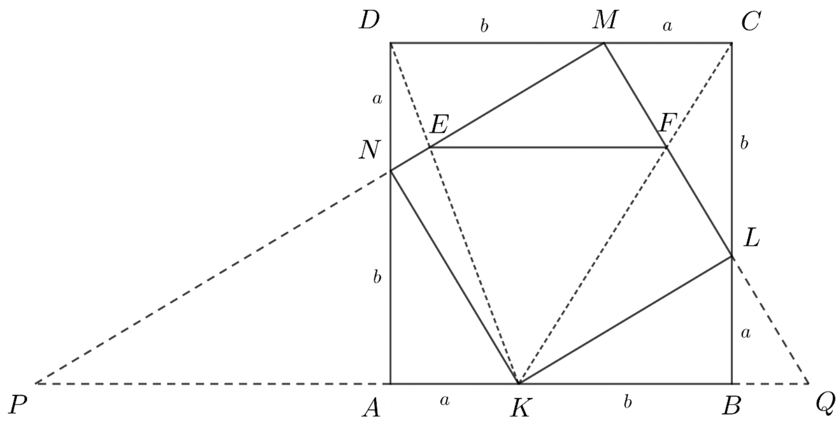
Решение. Нека P и Q се точките во кои правите NM и LM ја сечат правата AB. Триаголниците NAK, KBL, LCM и MDN се складни (хипотенуза,прав агол, агли со нормални краци). Нека $\overline{AK}=a$ и $\overline{BK}=b$. Тогаш $\overline{BL}=\overline{CM}=\overline{DN}=a$ и $\overline{LC}=\overline{MD}=\overline{NA}=b$. ......(**5** б) Триаголниците PNK и QLK се правоаголни, па според Евклидовата теорема $\overline{PA}\cdot a=b^2$ и $\overline{QB}\cdot b=a^2$. ......(**5** б) Од сличноста на триаголниците PEK и MED добиваме

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{PK}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{PA}+\overline{AK}}{\overline{MD}}=\frac{\frac{b^2}{a}+a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}. \quad ......(\mathbf{5}\text{ б})$$

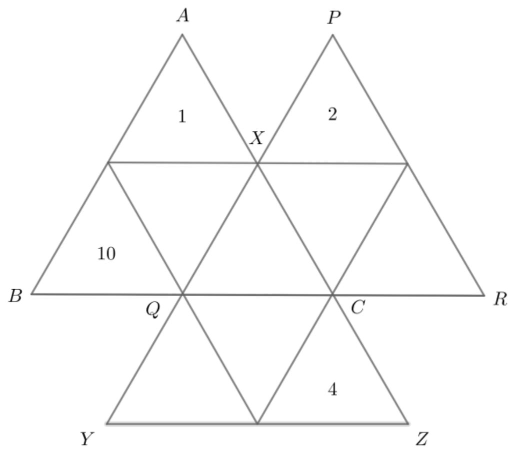
Од сличноста на триаголниците QFK и MFC добиваме

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{QK}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{QB}+\overline{BK}}{\overline{MC}}=\frac{\frac{a^2}{b}+b}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}. \quad ......(\mathbf{5}\text{ б})$$

Значи, $\frac{\overline{KE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{FK}}{\overline{CF}}$. Според теоремата на Талес следува дека $EF||DC$, т.е. $EF||AB$, што требаше да се докаже. ......(**5** б)



3. На дијаграмот се претставени три триаголници ABC, PQR и XYZ, така што секој од нив е разделен на четири помали триаголници. Дијаграмот треба да се пополни со вметнување на природните броеви од 1 до 10, во помалите триаголници, така што збирот на броевите во трите триаголници ABC, PQR и XYZ да биде ист. Броевите 1, 2, 4 и 10 се вметнати во дијаграмот. На колку начини може да се пополни дијаграмот и кои се тие?

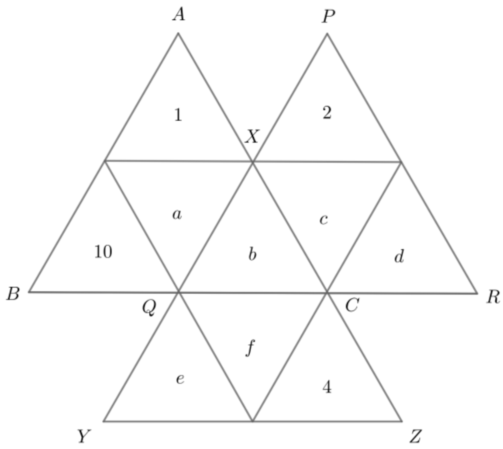


Решение: Нека броевите во малите триаголници ги означиме со a, b, c, d, e и f. Значи, во триаголниците може да ги впишеме само броевите 3, 5, 6, 7, 8 или 9. Бидејќи збирот на броевите од 1 до 10 е $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$, следува дека и збирот

$$1+2+10+a+b+c+d+e+f=55.$$

Оттука,

$$a+b+c+d+e+f=38 \quad .....(1) \quad (\mathbf{5}\text{ б})$$



По услов на задачата имаме дека збирот на броевите во ΔABC, ΔPQR и ΔXYZ е ист. Нека тој збир го означиме со x. Имаме дека

$$x = 11 + a + b,$$
$$x = 2 + b + c + d \text{ и}$$
$$x = 4 + b + e + f. \quad .....(*) \quad \textbf{(3 б)}$$

Со собирање на трите равенства добиваме дека

$$3x = 17 + 2b + a + b + c + d + e + f$$

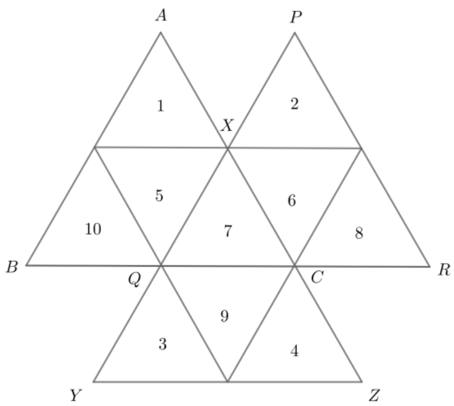
и поради (1)

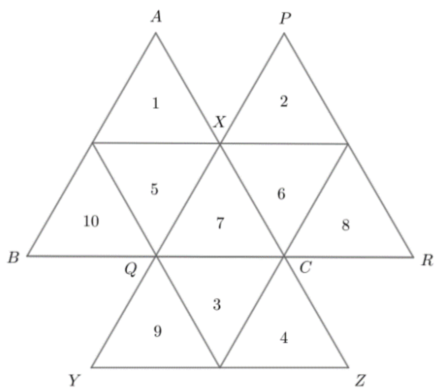
$$3x = 17 + 2b + 38 \text{, т.е.}$$
$$3x = 55 + 2b \quad ......(2) \quad \textbf{(5 б)}$$

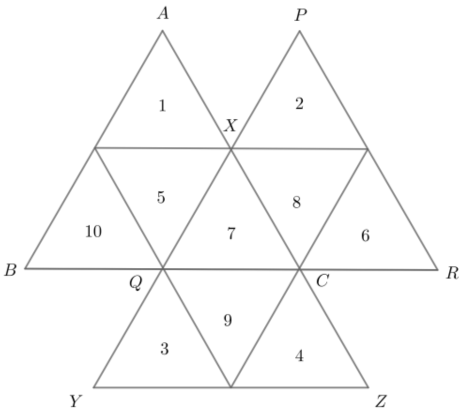
Значи $3 \mid (55 + 2b)$. Од броевите 3, 5, 6, 7, 8 или 9 само бројот 7 го исполнува овој услов, па следува дека $b = 7$. Тогаш, од (2) добиваме дека збирот на броевите во секој од ΔABC, ΔPQR и ΔXYZ е $x = 23$. Со замена во равенствата (*) добиваме дека

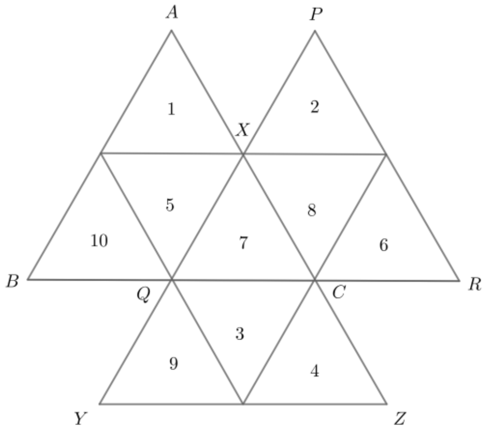
$$a = 5,$$
$$c + d = 14,$$
$$e + f = 12. \quad \textbf{(7 б)}$$

Сега единствени останати броеви се 3, 6, 8 и 9. Равенката $c + d = 14$ е исполнета за броевите $c = 8$ и $d = 6$ или $c = 6$ и $d = 8$, додека равенката $e + f = 12$ е исполнета за броевите $e = 3$ и $f = 9$ или $e = 9$ и $f = 3$. Поради тоа, постојат само 4 различни начини на кои може дијаграмот да биде пополнет и тие се следниве (**5 б**):

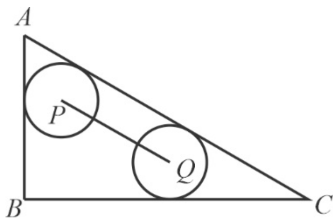








4. Две кружници со еднаков радиус r и центри во точките P и Q се впишани во правоаголен триаголник ABC како на цртежот, при што $\overline{AB}=6\text{cm}$ и $\overline{BC}=8\text{cm}$. Отсечката PQ со пресечните точки со кружниците е поделена на три еднакви делови. Пресметај го радиусот r.



Решение. Нека S, M, N и U се допирни точки на кружниците со ΔABC. Според Питагоровата теорема

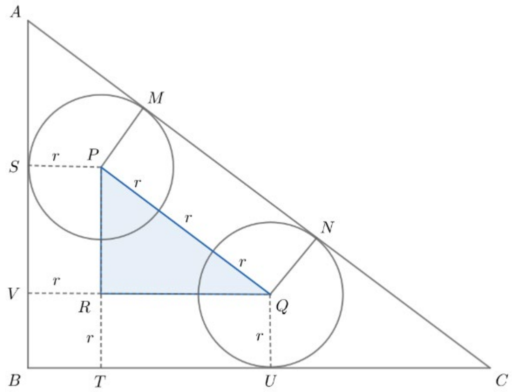
$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10\text{ cm}.$$

Значи,

$$10=\overline{AM}+3r+\overline{NC}.$$ .....(3б)

Ќе ги изразиме $\overline{AM}$ и $\overline{NC}$ преку r. Нека точката T е подножје на нормалата спуштена од P на $\overline{BC}$, а точката V е подножје на нормалата спуштена од Q на $\overline{AB}$. .....(2б) Јасно е дека $\overline{PQ}=3r$. Од сличноста на ΔABC и ΔPRQ добиваме

$$\overline{AB}:\overline{PR}=\overline{AC}:\overline{PQ},\ 6:\overline{PR}=10:3r,\ \overline{PR}=\frac{9}{5}r$$ .....(4б)



и

$$\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{RQ}:\overline{PQ},\ 8:10=\overline{RQ}:3r,\ \overline{RQ}=\frac{12}{5}r.$$ .....(4б)

Бидејќи $\overline{SV}=\overline{PR}$, следува дека

$$\overline{AS}=6-\left(r+\overline{SV}\right)=6-\left(r+\frac{9}{5}r\right)=6-\frac{14}{5}r.$$ .....(3б)

Слично, бидејќи $\overline{TU}=\overline{RQ}$, следува дека

$$\overline{CU}=8-\left(r+\overline{TU}\right)=8-\left(r+\frac{12}{5}r\right)=8-\frac{17}{5}r.$$ .....(3б)

Имајќи предвид дека $\overline{AM}=\overline{AS}$ и $\overline{NC}=\overline{CU}$, ...(3б) со замена во $10=\overline{AM}+3r+\overline{NC}$, добиваме $10=6-\frac{14}{5}r+3r+8-\frac{17}{5}r$, $r=\frac{5}{4}$ cm. .....(3б)