Изборен тест за ИМО 2024

Ден 1: Решенија и распределба на поени

Задача 1. Нека $p = p_1, p_2, ..., p_k$ се различни прости броеви и нека $a_2, a_3, ..., a_k$ се ненегативни цели броеви. Нека $m = \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{k} p_i^{a_i}\Big(\prod_{i=1}^{k}(p_i+1)+\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)\Big)$ и $n = \frac{1}{2}\prod_{i=2}^{k} p_i^{a_i}\Big(\prod_{i=1}^{k}(p_i+1)-\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)\Big)$.

Докажете дека

$$(p^2-1) \mid (pm-n)\,.$$

Решение 1. Забележуваме дека

$$m+n = \prod_{i=2}^{k} p_i^{a_i}\prod_{i=1}^{k}(p_i+1) \text{ и } m-n = \prod_{i=2}^{k} p_i^{a_i}\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)\,.$$

(2п)

Следствено,

$$(p+1) \mid (m+n) \text{ и } (p-1) \mid (m-n)\,.$$

(2п)

Исто така важи и

$$2 \mid \Big(\frac{m+n}{p+1}+\frac{m-n}{p-1}\Big)\,.$$

(1п)

Сега тврдењето во задачата следува од равенството

$$pm-n = (p^2-1)\frac{1}{2}\Big(\frac{m+n}{p+1}+\frac{m-n}{p-1}\Big)\,.$$

(2п)

□

Решение 2. Нека $A = \prod_{i=2}^{k}(p_i+1)$, $B = \prod_{i=2}^{k}(p_i-1)$ и $C = \prod_{i=2}^{k}(p_i^{a_i})$. Тогаш имаме:

$$pm-n = p\frac{1}{2}C((p+1)A+(p-1)B) - \frac{1}{2}C((p+1)A-(p-1)B) =$$
$$\frac{1}{2}C(p(p+1)A+p(p-1)B-(p+1)A+(p-1)B) = (p+1)(p-1)C\frac{A+B}{2}.$$

(5п)

Јасно A и B се со иста парност, па $\frac{A+B}{2}$ е цел број, од каде следува дека $pm-n$ е делив со $(p+1)(p-1) = p^2-1$. **(2п)** □

Задача 2. Нека u, v, w се позитивни реални броеви. Докажете дека постои циклична пермутација (x, y, z) на (u, v, w) така што неравенството

$$\frac{a}{xa+yb+zc}+\frac{b}{xb+yc+za}+\frac{c}{xc+ya+zb} \geq \frac{3}{x+y+z}$$

важи за сите позитивни реални броеви a, b и c.

Решение. Јасно е дека важи барем едно од неравенствата $v+w \geq 2u$, $u+w \geq 2v$, $v+w \geq 2u$. **(1п)** Нека (x, y, z) е циклична пермутација на (u, v, w) таква што $y+z \geq 2x$. **(1п)** Левата страна на посакуваното равенство е еднаква на

$$\frac{a^2}{xa^2+yab+zac}+\frac{b^2}{xb^2+ybc+zab}+\frac{c^2}{xc^2+yac+zbc}.$$

(1п)

Применувајќи го неравенството на Коши-Шварц (во обликот на Артур Енгелс) имаме

$$\frac{a^2}{xa^2+yab+zac}+\frac{b^2}{xb^2+ybc+zab}+\frac{c^2}{xc^2+yac+zbc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x(a^2+b^2+c^2)+(y+z)(ab+ac+bc)}.$$

(1п)

Означуваме $S=a^2+b^2+c^2$ и $P=ab+ac+bc$. Доволно е да докажеме дека

$$\frac{S+2P}{xS+(y+z)P} \geq \frac{3}{x+y+z}\,.$$

(1п)

Последното неравенство е еквивалентно на $(y+z-2x)(S-P) \geq 0$, што е очигледно задоволено бидејќи $S \geq P$ и $y+z \geq 2x$. **(2п)** $\square$

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$, точки K и L на AB, точки M и N на BC и точки P и Q на CA, такви што $AK = LB < \frac{1}{2}AB$, $BM = NC < \frac{1}{2}BC$ и $CP = QA < \frac{1}{2}AC$. Пресечните точки на KN со MQ и LP се R и T соодветно, а пресечните точки на NP со LM и KQ се D и E соодветно. Докажи дека правите DR, BE и CT минуваат низ една точка.

Решение. Нека U, V и W се пресечните точки на AB, BC и CA со MQ, KN и PL соодветно. Некои од овие точки може да бидат „бесконечните“ на соодветните прави. **(1п)**

Од теорема на Менелај за $\triangle ABC$ и правите MQ, KN и PL добиваме:

$$\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}} = -\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}},$$

$$\frac{\overline{BV}}{\overline{VC}} = -\frac{\overline{BL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}},$$

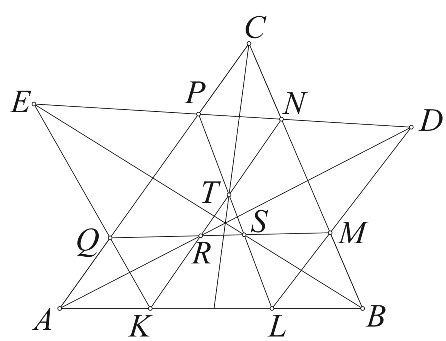
$$\frac{\overline{CW}}{\overline{WA}} = -\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BK}}{\overline{KA}}.$$

По нивно множење добиваме:

$$\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}} \cdot \frac{\overline{BV}}{\overline{VC}} \cdot \frac{\overline{CW}}{\overline{WA}} = -\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BK}}{\overline{KA}} = -1.$$

Од обратната теорема на Менелај следува дека точките U, V и W се колинеарни. **(2п)** Според ова $\triangle ALP$ и $\triangle RMN$ се коосни. Од теоремата на Дезарг добивам дека $\triangle ALP$ и $\triangle RMN$ се кополарни, т.е. A, R и D се колинеарни. **(1п)**

Нека S е пресечната точка на LP и MQ. Од исти причини $\triangle BKN$ и $\triangle SQP$ се коосни, па според теоремата на Дезарг и кополрани, т.е. точките B, S и E се колинеарни. **(1п)**



Повторно од колинеарноста на U, V и W, следува дека $\triangle ABC$ и $\triangle RST$ се коосни, што од теоремата на Дезарг повлекува дека се кополарни, па $AR \equiv DR$, $BS \equiv BE$ и CT се сечат во една точка. **(1п)**

Правите AR, BS и CT не можат да се паралелни бидејќи R, S и T се во $\triangle ABC$. **(1п)** $\square$

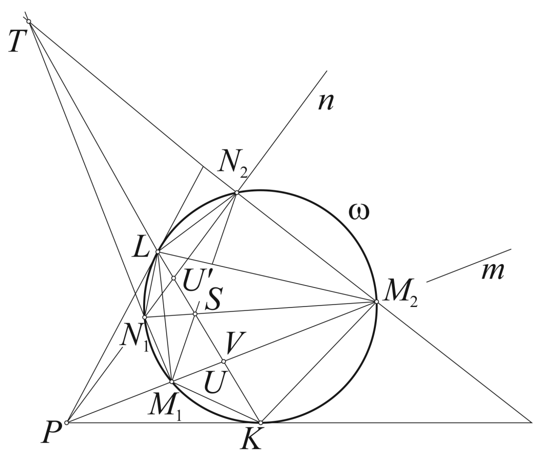
Изборен тест за ИМО 2024

Ден 2: Решенија и распределба на поени

Задача 4. Нека $\triangle ABC$ е разностран и остроаголен. Нека k_A е кружницата со дијаметар BC, а B_A и C_A се допирните точки на нејзините тангенти од точката A, така што B и B_A се на различни страни од AC, а C и C_A се на различни страни од AB. На ист начин (циклично) ги дефинираме точките B_A, B_C, C_A и C_B.

Докажете дека правите B_AC_A, C_BA_B и A_CB_C се сечат во една точка.

Решение. Прво ќе ја докажеме следната лема:
Лема. Нека ω е кружница и P е точка надвор од ω. Нека L и K се допирните точки на тангентите од P на ω. Две различни прави m и n низ P се такви што m ја сече ω во M_1 и M_2, а n ја сече ω во N_1 и N_2. Ако $M_1N_1 \cap M_2N_2 = T$ и $M_1N_2 \cap M_2N_1 = S$, тогаш K, L, S и T се колинеарни. **(5п)**



Доказ 1. Нека $TS \cap m = U$. Од теоремите на Чева и Менелај за $\triangle M_1M_2T$, точката S и правата n добиваме:

(1)
$$\frac{\overline{M_1U}}{\overline{UM_2}} = \frac{\overline{M_1N_1}}{\overline{N_1T}} \cdot \frac{\overline{TN_2}}{\overline{N_2M_2}} = -\frac{\overline{M_1P}}{\overline{PM_2}}.$$

(2п)

Нека $LK \cap m = V$. Од сличните триаголници $\triangle PM_1K \sim \triangle PKM_2$, $\triangle PM_1L \sim \triangle PLM_2$, $\triangle M_1KV \sim \triangle M_2LV$ и $\triangle M_1LV \sim \triangle M_2KV$ имаме:

$$\frac{M_1P}{M_2P} = \frac{M_1P}{KP} \cdot \frac{KP}{M_2P} = \frac{M_1P}{KP} \cdot \frac{LP}{M_2P} = \frac{M_1K}{KM_2} \cdot \frac{LM_1}{M_2L}$$
$$\frac{M_1V}{M_2V} = \frac{M_1V}{KV} \cdot \frac{KV}{M_2V} = \frac{M_1L}{KM_2} \cdot \frac{KM_1}{M_2L}.$$

Бидејќи P е надвор од ω, па и надвор од M_1M_2, а V е во ω, па и во M_1M_2, заклучуваме дека

(2)
$$\frac{\overline{M_1V}}{\overline{VM_2}} = -\frac{\overline{M_1P}}{\overline{PM_2}}.$$

(2п)

Со комбинирање на (1) и (2) добиваме $U \equiv V$. Од причини на симетрија, еквивалентно дефинираните точки U' и V' на n се совпаѓаат. Следува дека точките K, L, S и T лежат на правата UU', т.е. се колинеарни. **(1п)** $\square$

Доказ 2. Познато е дека правите TM_1 и TM_2 хармониски ги делат TP и TS, т.е. важи $(TP, TS; TM_1, TM_2) = -1$ (дијагонала во комплетен четиристраник). **(2п)**

Од друга страна имеме:

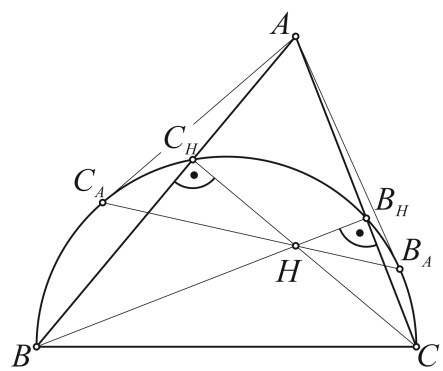
$$(LP, LK; LM_1, LM_2) = \frac{\sin\angle PLM_1}{\sin\angle M_1LK} \cdot \frac{\sin\angle KLM_2}{\sin\angle M_2LP} =$$
$$-\frac{LM_1}{KM_1} \cdot \frac{KM_2}{LM_2} = -\frac{LM_1}{LM_2} \cdot \frac{KM_2}{KM_1} = -\frac{PL}{PM_2} \cdot \frac{PM_2}{PK} = -1.$$

(2п)

Па, KL и ST поминуваат низ истите точки U на m и U' на n. Според ова K, L, S и T се колинеарни. **(1п)** $\square$

Доказ 3. Од теоремата на Брокард, правата TS е полара за точката P. **(3п)**

Од друга страна KL по дефиниција е поларата за P, па K, L, S и T се колинеарни. **(2п)** $\square$



Нека B_H и C_H се подножјата на висините во $\triangle ABC$, од B и C соодветно. Од правите агли $\angle BB_HC = \angle BC_HC = 90°$, следува дека B_H и C_H лежат на k_A. Бидејќи ортоцентарот H во $\triangle ABC$ е во пресекот на BB_H и CC_H, од лемата следува дека H лежи на B_AC_A. Од причини на симетрија H лежи и на A_CB_C и на C_BA_B. Заклучуваме дека правите B_AC_A, A_CB_C и C_BA_B минуваат низ една точка (H). **(2п)** $\square$

Задача 5. Најдете го најголемиот позитивен цел број k за кој постои конвексен полиедар P со следниве особини:
1) P има точно 666 ребра.
2) Степените на темињата на P не се разликуваат за повеќе од 1.
3) Ребрата на P можат да се обојат со k бои, така што за секоја боја c и пар различни темиња (V_1, V_2) постои еднобоен пат помеѓу V_1 и V_2 во бојата c.

Решение. *Одговор:* $k = 2$.**(1п)**

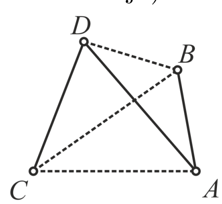
Решението ќе го направиме во два чекори. Прво ќе докажеме дека $k < 3$, а потоа индуктивно ќе дадеме обојување на P за $k = 2$.

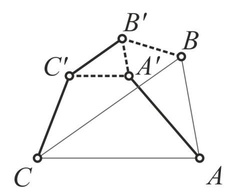
Нека P има V темиња, E рабови и F страни.

Да претпоставиме спротивно, т.е. дека $k > 2$. Во овој случај имаме k дисјунктни дрва со V темиња, па $E \geq 3(V-1)$. Секоја страна има барем три рабови, а секој раб е заеднички за точно две страни, од каде добиваме $2E \geq 3F$. Со собирање на овие две неравенства добиваме $3E \geq 3(V - 1 + F)$, т.е. $E + 1 \geq V + F$. Последното е противречно на Ојлеровата формула $(E + 2 = V + F)$. Со ова докажавме дека $k < 3$.**(3п)**

Сега со помош на индукција ќе докажеме дека кога $k = 2$ за секој природен број n, постои конвексен полиедар P_{6n} со $6n$ рабови кој ги задоволува условите на задачата.

За $n = 1$, разгледуваме тетраедар $ABCD$ (цртеж лево). Едно боење кое ги задоволува условите на задачата е ако AB, AD и CD се во првата боја (полна линија), а AC, BC и BD во втората (испрекината линија).



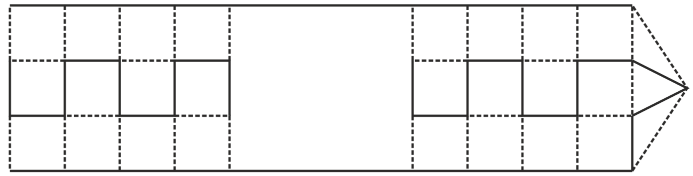


Да претпоставиме дека сме конструирале полиедар P_{6n}, кој е обоен така што ги задоволува условите на задачата, секое теме има степен три или четири и има триаголник за страна, таков што сите негови темиња имаат степен три.

Конструкцијата на P_{6n+6} ја правиме со лепење на потсечена тристрана пирамида (цртеж десно) на избраниот триаголник, така што $\triangle ABC$ се лепи со овој триаголник. Јасно на овие темиња се додава по еден раб, па степенот се зголемува на четири, а новиот триаголник со темиња со степен три е $A'B'C'$. Освен тоа до темето A' може да се дојде со полна линија преку A, а до темињата B' и C' преку C (AA', CC' и $C'B'$ се со полна линија). Со испрекината линија до сите темиња може да се дојде преку B (BB', $B'A'$ и $A'C'$ се со испрекината линија). Според ова P_{6n+6} ги задоволува условите на задачата и дополнителниот услов за постоење на триаголник ($\triangle A'B'C'$) во кој сите темиња имаат степен три.

Од принципот на математичка индукција следува дека ова може да се направи за секој n, па и за $n = 111$, т.е. за полиедар со точно 666 рабови. **(3п)**

Боењето може да се направи и директно во развиена форма:



$\square$

Задача 6. Нека a, b се позитивни цели броеви такви што $a+1, b+1$ и ab се полни квадрати. Докажете дека НЗД$(a,b)+1$ е исто така полн квадрат.

Решение. Да забележиме дека за $a=b$, НЗД$(a,b)+1 = a+1$ е полн квадрат.**(1п)**

Без губење од општоста, да претпоставиме $a<b$. Нека $a+1=A^2, b+1=B^2$, каде $1<A<B$ се позитивни цели броеви. Означуваме $g=$ НЗД(a,b). Тогаш, со оглед дека ab е полн квадрат, постојат заемно прости позитивни цели броеви x, y такви што:

$$a = A^2-1 = gx^2 \text{ и } b = B^2-1 = gy^2\,.$$

(2п)

Значи паровите (A,x) и (B,y) ја задоволуваат следната равенка на Пел:

$$p^2 - gq^2 = 1\,.$$

Ако (p_1, q_1) е фундаменталното решение на оваа равенка, тогаш секое друго решение е генерирано од рекурентните равенки:

$$p_{n+1} = p_1p_n + gq_1q_n \tag{3}$$
$$q_{n+1} = p_1q_n + q_1p_n\,. \tag{4}$$

(2п)

Оттаму $q_1 \mid q_n$ за секој n. Значи $q_1 \mid x, y$, па $q_1 \mid (x,y)=1$ што повлекува дека $q_1=1$. Но тогаш, имајќи го предвид фундаменталното решение, имаме:

$$1 = p_1^2 - gq_1^2 = p1^2 - g\,.$$

Следствено,

$$g+1 = p_1^2\,,$$

што и требаше да се докаже.**(2п)**

□