ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2024

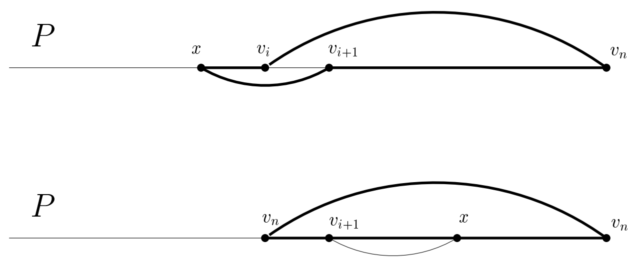
РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. Во дадена група луѓе $\mathcal{F}$ секој член има барем двајца познаници од $\mathcal{F}$. Притоа, за секој циклус $A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow A_1$ во $\mathcal{F}$ (тука '$X \leftrightarrow Y$' означува дека X и Y се познаници) секој A_i познава точно два други A_j-овци. Докажете дека постојат $X, Y \in \mathcal{F}$ такви што секој од нив има точно два познаника во $\mathcal{F}$ и X, Y имаат барем еден заеднички познаник во групата.

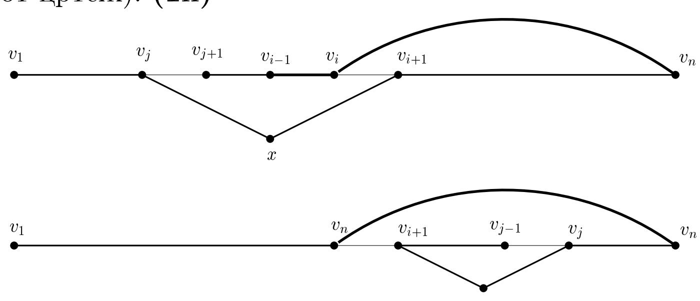
Решение. Нека G е придружениот едноставен граф: темињата се членовите на $\mathcal{F}$ и секој (неподреден) пар познаници е поврзан со ребро. Од условите имаме дека минималниот степен $\delta(G) \geq 2$ и секој циклус во G е индуциран (т.е., без тетиви). Разгледуваме пат $P : v_1 v_2 \ldots v_n$ од најголема можна должина. **(1п)** Со оглед дека $\deg(v_n) \geq 2$, постои $i \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ така што $v_i \leftrightarrow v_n$. **(1п)** Притоа, од изборот на P, секој сосед на v_n лежи на P. **(1п)** Следствено, користејќи дека секој циклус е индуциран, $N(v_n) = \{v_i, v_{n-1}\}$; значи $\deg(v_n) = 2$. **(1п)**

Ќе докажеме дека $\deg(v_{i+1}) = 2$. **(1п)**

Аргументираме со противречност. Имено, да претпоставиме дека постои $x \in N(v_{i+1}) \backslash \{v_i, v_{i+2}\}$. Тогаш $x \notin V(P)$, во спротивно се појавува циклус со тетива (прикажан задебелено на долниот цртеж). **(1п)**



Бидејќи $\deg(x) \geq 2$, постои теме $y \in N(x) \backslash \{v_{i+1}\}$. **(1п)** Да забележиме дека $y \in V(P)$, во спротивно патот $Q : v_1 v_2 \ldots v_i v_n v_{n-1} \ldots v_{i+1} x y$ има должина $n+1$, што противречи на изборот на P. **(1п)** Значи $y = v_j$, и притоа има две можности: $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$ или $j \in \{i+2, \ldots, n-1\}$. Но секоја од двете можности противречи на изборот на P (постои пат со должина $n+1$, прикажан задебелено на долниот цртеж). **(1п)**

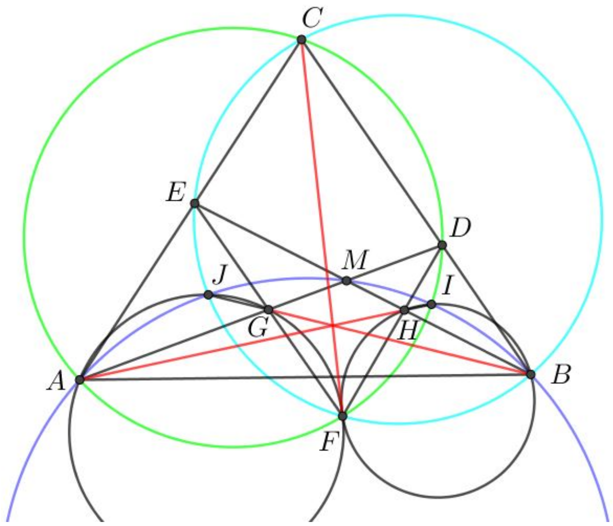


Значи $X = v_{i+1}$ и $Y = v_n$ го формираат посакуваниот пар. **(1п)** □

Забелешка. Дадениот доказ всушност потврдува постоење на барем два такви пара X, Y, со оглед дека $v_1 \notin \{v_{i+1}, v_n\}$.

2. Нека D и E се произволни точки од страните BC и AC, соодветно, во $\triangle ABC$. Опишаната кружница на $\triangle ADC$ по втор пат ја сече опишаната кружница на $\triangle BCE$ во точка F. Правата FE ја сече AD во точка G, а правата FD ја сече BE во точка H. Докажете дека правите CF, AH и BG се сечат во една точка.

Решение. Нека правата AH ја сече опишаната кружница на $\triangle ADC$ во точката I, а правата BG ја сече опишаната кружница на $\triangle BCF$ во точката J. Нека M е пресечната точка на правите AD и BE.



Бидејќи петаголниците $AFIDC$ и $BCEJF$ се тетивни, користејќи ја Талесовата теорема за периферен агол, довиваме:

$$\angle FAG \equiv \angle FAD = \angle FCD \equiv \angle FCB = \angle FJB \equiv \angle FJG\,,$$

од каде следува дека четириаголникот $AFGJ$ е тетивен. **(2п)** Аналогно се докажува дека и четириаголникот $BFHI$ е тетивен. **(2п)**
Од последново и од тетивноста на $BCEJF$ добиваме:

$$\angle MAJ \equiv \angle GAJ = \angle GFJ \equiv \angle EFJ = \angle EBJ \equiv \angle MBJ\,.$$

Значи и четириаголникот $ABMJ$ е тетивен. **(2п)**
Аналогно се докажува дека и четириаголникот $ABIM$ е тетивен **(2п)**, од каде следува дека точката I лежи на опишаната кружница околу четириаголникот $ABMJ$. **(1п)**
Имајќи предвид дека BJ е радикална оска за $(BCEJF)$ и $(ABIMJ)$, AI е радикална оска за $(ABIMJ)$ и $(AIDC)$ и CF е радикална оска за $(AIDC)$ и $(BCEJF)$, заклучуваме дека правите BJ, CF и AI се сечат во една точка. **(1п)** □

3. Нека $p \neq 5$ е прост број. Докажете дека $p^5 - 1$ има прост делител q од облик $5x + 1$.

Решение. Прво ќе докажеме дека равенката $p^5 - 1 = (p-1) \cdot 5^x$ нема природни решенија. Забележуваме дека

$$\frac{p^5 - 1}{p - 1} = p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 > 5.$$

Оттука ако (p, x) е решение, тогаш $25|5^x$, па $25|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$. Според ова $5|p^5 - 1$, што важи само кога $p \equiv 1 \pmod 5$ бидејќи $p^4 \equiv 1 \pmod 5$ за секој прост број $p \neq 5$.

Од претходната дискусија, имаме дека $25|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ повлекува $p \equiv 1, 6, 11, 16, 21 \pmod{25}$. Со директна замена во $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ добиваме дека во ниту еден случај не се добива број делив со 25. **(5п)**

Според ова постои прост број $q \neq 5$ таков што $q|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$. Според ова $q|p^5 - 1$, па $p^5 \equiv 1 \pmod q$. Ако $t = \mathrm{ord}_q(p)$ (најмалиот природрн број за кој $q \mid p^t - 1$), тогаш $t \in \{1, 5\}$. За $t = 1$, важат $q|p - 1$ и $q|p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$, па

$$0 \equiv p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 5 \pmod q,$$

последното не е можно бидејќи $q \neq 5$. Заклучуваме дека $t = 5$. Од малата теорема на Ферма следува дека $5|q - 1$, т.е. $q = 5x + 1$ и $q|p^5 - 1$. **(5п)** □

4. Нека $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ се реални броеви од интервалот $[1, 2]$. Докажете дека

$$|x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - x_1| + \frac{1}{3}\left(|x_1 - x_3| + \cdots + |x_n - x_2|\right) \leq \frac{2}{3}\left(x_1 + \cdots + x_n\right)$$

и определете во кои случаи важи равенство.

Решение. За доказот ќе го користиме следното:

Неравенство. *Ако $a, b, c, d \in [1, 2]$, тогаш*

$$|a - b| + |b - c| + |c - d| + \frac{1}{2}|a - c| + \frac{1}{2}|b - d| \leq \frac{1}{2}(a + b + c + d), \tag{1}$$

(4п)

со равенство ако и само ако (a, b, c, d) е една од четворките

$$(2, 1, 1, 2), (x, 1, 2, 1), (1, y, 2, 1), (1, 2, z, 1), (1, 2, 1, t), \tag{2}$$

за некои $x, y, z, t \in [1, 2]$.

(1п)

Доказ. Со помош на равенството $|x - y| = x + y - 2\min(x, y)$ бараното неравенство (1) се трансформира во

$$a + 2b + 2c + d \leq 2\min(a, b) + 2\min(b, c) + 2\min(c, d) + \min(a, c) + \min(b, d).$$

Разгледуваме четири можности: $a \geq b$ и $a \geq c$, $a \geq b$ и $a < c$, $a < b$ и $a \geq c$, $a < b$ и $a < c$.

- Ако $a \geq b$ и $a \geq c$ неравенството се поедноставува до

  $$a + |c - d| \leq 2\min(b, c) + \min(b, d).$$

  Ова е точно бидејќи $a \leq 2 \leq 2\min(b, c)$ и $|c - d| \leq 1 \leq \min(b, d)$. Равенство важи ако и само ако $a = 2$, $\{c, d\} = \{1, 2\}$ и $b = 1$, т.е. за (a, b, c, d) еднакво на $(2, 1, 1, 2)$ или $(2, 1, 2, 1)$.
- Ако $a \geq b$ и $a < c$, тогаш $b < c$, па неравенството се поедноставува до

  $$c + |c - d| \leq 2b + \min(b, d).$$

  Ова е точно бидејќи $c \leq 2 \leq 2b$ и $|c - d| \leq 1 \leq \min(b, d)$. Равенство се достигнува ако и само ако $b = 1$, $c = 2$ и $d = 1$, па $(a, b, c, d) = (x, 1, 2, 1)$ за некој $x \in [1, 2]$.

- Ако $a < b$ и $a \geq c$, тогаш $c < b$ и неравенството се поедноставува до
$$2b + d \leq a + 2\min(c, d) + c + \min(b, d).$$
ова е точно бидејќи $2b + d - \min(b, d) \leq 4$, $a \geq 1$, $\min(c, d) \geq 1$ и $c \geq 1$. Равенство ќе важи ако и само ако $a = 1$, $b = 2$ и $c = 1$, so $(a, b, c, d) = (1, 2, 1, t)$ за некое $t \in [1, 2]$.
- Ако $a < b$ и $a < c$ тогаш неравенството се поедноставува во
$$2b + 2c + d \leq 2a + 2\min(b, c) + 2\min(c, d) + \min(b, d).$$
Ако $b \geq c$ добиваме $2b+d \leq 2a+2\min(c, d)+\min(b, d)$, што е точно бидејќи $2b+d-\min(b, d) \leq 4 \leq 2a+2\min(c, d)$. Во овој случај равеснтво важи ако само ако $a = 1$, $b = 2$ и $\min(c, d) = 1$, па бидејќи $a < c$ мора $d = 1$, т.е. $(a, b, c, d) = (1, 2, z, 1)$ за некое $z \in [1, 2]$.
Ако пак $b < c$, тогаш $a < b < c$, и имаме $c + |c - d| \leq 2a + \min(b, d)$, што е точно бидејќи $c + |c - d| \leq 3 \leq 2a + \min(b, d)$. Равенство во овој случај ќе важи ако и само ако $a = 1$, $c = 2$ и $d = 1$, па $(a, b, c, d) = (1, y, 2, 1)$ за некое $y \in [1, 2]$. □

Да се вратиме на даденото неравенство. Со примена на (1) за $(x_1, x_2, x_3, x_4), \dots, (x_n, x_1, x_2, x_3)$, после делење на нивниот збир со 3, добиваме
$$|x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - x_1| + \frac{1}{3}\left(|x_1 - x_3| + \cdots + |x_n - x_2|\right) \leq \frac{2}{3}\left(x_1 + \cdots + x_n\right).$$
(2п)

Равенство ќе важи ако секоја од четворките $(x_1, x_2, x_3, x_4), \dots, (x_n, x_1, x_2, x_3)$ се од некој облик од (2). Не може да се појави четворка $(x, 1, 2, 1)$ со $1 < x < 2$ бидејќи тогаш претходната четворка (циклично) мора да биде $(*, x, 1, 2)$, што не е дозволено. Слично, не може да се појави $(1, y, 2, 1)$ за $1 < y < 2$, бидејќи претходната четворка (циклично) мора да биде $(*, 1, y, 2)$. Не може да се појави $(1, 2, z, 1)$ за $1 < z < 2$, бидејќи претходната четворка (циклично) мора да биде $(*, 1, 2, z)$. Не може да се појави $(1, 2, 1, t)$ за $1 < t < 2$, бидејќи следната четворка (циклично) мора да биде $(2, 1, t, *)$. За крај, не може да се појави $(1, 2, 2, 1)$, бидејќи претходната четворка (циклично) мора да биде $(*, 1, 2, 2)$. Заклучуваме дека равенство важи ако и само ако четворките $(x_1, x_2, x_3, x_4), \dots, (x_n, x_1, x_2, x_3)$ се меѓу
$$(2, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2),$$
т.е. ако и само ако $x_i \in \{1, 2\}$ за секој $i \in \{1, \dots, n\}$ и меѓу нив нема две последователни двојки (циклично) ниту три последователни единици (циклично). **(3п)** □