

# ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2024

Недела, 21. Април 2024

**Задача 1.** Во дадена група луѓе  $\mathcal{F}$  секој член има барем двајца познаници од  $\mathcal{F}$ . Притоа, за секој циклус  $A_1 \leftrightarrow A_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow A_n \leftrightarrow A_1$  во  $\mathcal{F}$  (тука ' $X \leftrightarrow Y$ ' означува дека  $X$  и  $Y$  се познаници) секој  $A_i$  познава точно два други  $A_j$ -овци. Докажете дека постојат  $X, Y \in \mathcal{F}$  такви што секој од нив има точно два познаника во  $\mathcal{F}$  и  $X, Y$  имаат барем еден заеднички познаник во групата.

**Задача 2.** Нека  $D$  и  $E$  се произволни точки од страните  $BC$  и  $AC$ , соодветно, во  $\triangle ABC$ . Опишаната кружница на  $\triangle ADC$  по втор пат ја сече опишаната кружница на  $\triangle BCE$  во точка  $F$ . Правата  $FE$  ја сече  $AD$  во точка  $G$ , а правата  $FD$  ја сече  $BE$  во точка  $H$ . Докажете дека правите  $CF$ ,  $AH$  и  $BG$  се сечат во една точка.

**Задача 3.** Нека  $p \neq 5$  е прост број. Докажете дека  $p^5 - 1$  има прост делител  $q$  од облик  $5x + 1$ .

**Задача 4.** Нека  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) се реални броеви од интервалот  $[1, 2]$ . Докажете дека

$$|x_1 - x_2| + \dots + |x_n - x_1| + \frac{1}{3} (|x_1 - x_3| + \dots + |x_n - x_2|) \leq \frac{2}{3} (x_1 + \dots + x_n)$$

и определете во кои случаи важи равенство.

*Време: 4 саати и 30 минути.  
Секоја задача вреди 10 поени.*

