31. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 1. Нека M е позитивен реален број. Одредете го најмалиот позитивен реален број k со следнава особина: за секој цел број $n > M$, интервалот $(n, kn]$ содржи степен на бројот 2.

Решение. Најпрво ќе покажеме дека бројот $k = 2$ ја има посакуваната особина. Да разгледаме цел број $n \geq M$. Нека 2^a е најголемиот степен на 2 таков што $2^a < n+1$, каде $a \geq 0$. Тогаш $2^{a+1} \geq n+1 > n$. Од друга страна

$$2^a < n+1 \implies 2^{a+1} < 2(n+1)\,,$$

па така $2^{a+1} \leq 2n+1$. Со оглед дека $2n+1$ е непарен број, важи и посилното неравенство $2^{a+1} \leq 2n$. Значи $n < 2^a \leq 2n$, што и сакавме да покажеме. **(4п)**

Нека $0 < k < 2$. Да разгледаме цел број b што е поголем од M, и нека $n = 2^b$. Јасно n е цел број и $n = 2^b \geq b > M$. Забележуваме дека интервалот $I = (n, kn] = (2^b, k2^b]$ е целосно содржан во интервалот $(2^b, 2^{b+1})$ бидејќи $k < 2$. Со оглед дека не постои степен на 2 во интервалот $(2^b, 2^{b+1})$, ни интервалот I не може да содржи степен на 2. Заклучуваме дека ниту еден позитивен цел број k што е помал од 2 ја нема посакуваната особина.

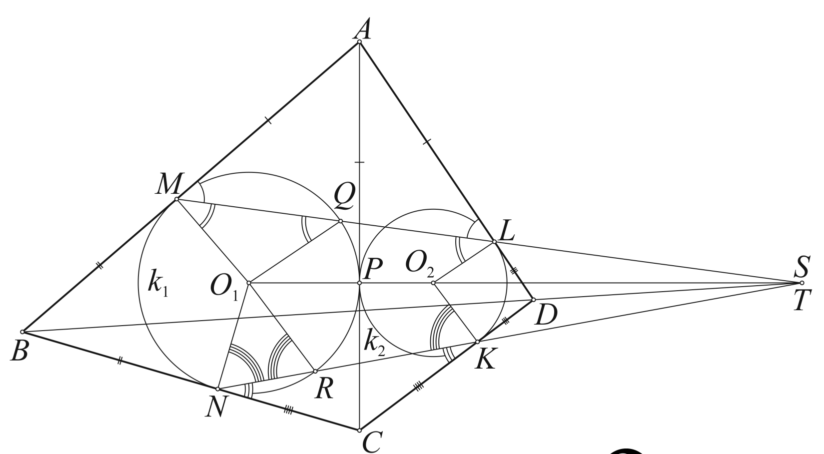
Следствено, најмалиот позитивен реален број k со посакуваната особина е $k = 2$. **(4п)** □

Задача 2. Нека $ABCD$ е четириаголник со $AB > AD$, таков што впишаната кружница k_1 на $\triangle ABC$ со центар O_1 и впишаната кружница k_2 на $\triangle ADC$ со центар O_2 имаат заедничка точка на AC. Ако k_1 ја допира AB во M и k_2 ја допира AD во L, докажете дека правите BD, LM и O_1O_2 минуваат низ заедничка точка.

Решение 1. Нека k_1 ја допира BC во N, k_2 ја допира CD во K, а двете кружници ја допираат AC во P. Од тангентните сегменти на k_1 и k_2 имаме: $MA = PA = LA$, $NB = MB$, $LD = KD$ и $NC = PC = KC$. **(1п)**

Нека Q и R се вторите пресеци на LM и KN со кружницата k_1, соодветно. Користејќи $MA = LA$, $NC = KC$ и тангентите на k_1 и k_2 добиваме:

$$\angle MLO_2 = 90^\circ - \angle ALM = 90^\circ - \angle LMA = \angle O_1MQ = \angle MQO_1, \qquad \textbf{(1п)}$$
$$\angle O_2KN = 90^\circ - \angle NKC = 90^\circ - \angle CNK = \angle RNO_1 = \angle O_1RN. \qquad \textbf{(1п)}$$



Нека T и T' се пресечните точки на LM и KN со O_1O_2, соодветно. Комбинирајќи ги претходните две равенства ги добиваме следниве пропорционалности:

$$\frac{\overline{TO_2}}{\overline{TO_1}} = \frac{\overline{O_2L}}{\overline{O_1Q}} = \frac{\overline{O_2K}}{\overline{O_1R}} = \frac{\overline{T'O_2}}{\overline{T'O_1}},$$

од каде следува $T \equiv T'$. Според ова правите LM, KN и O_1O_2 минуваат низ точката T. **(1п)**

Нека S е пресекот на LM и BD, од теорема на Менелај за $\triangle ABD$ и LM имаме:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LD}} \cdot \frac{\overline{DS}}{\overline{SB}} = -1 \implies \frac{\overline{DS}}{\overline{SB}} = -\frac{\overline{MA}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{AL}} = -\frac{LD}{MB}. \qquad \textbf{(1п)}$$

Слично ако S' е пресекот на KN и BD, од теорема на Менелај за $\triangle CBD$ и KN добиваме:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CK}}{\overline{KD}} \cdot \frac{\overline{DS'}}{\overline{S'B}} = -1 \implies \frac{\overline{DS'}}{\overline{S'B}} = -\frac{\overline{NC}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{KD}}{\overline{CK}} = -\frac{KD}{NB}. \qquad \textbf{(1п)}$$

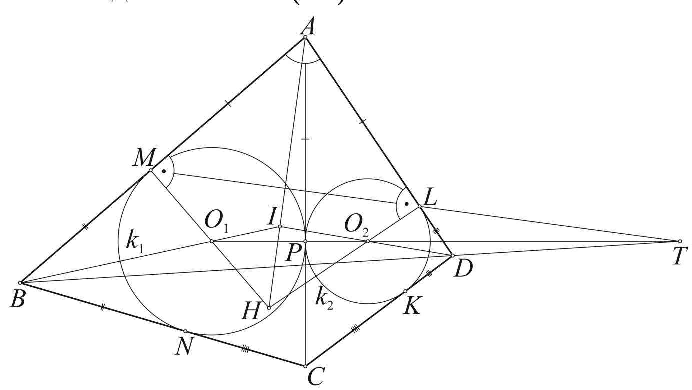
Според ова имаме

$$\frac{\overline{DS}}{\overline{SB}} = -\frac{LD}{MB} = -\frac{KD}{NB} = \frac{\overline{DS'}}{\overline{S'B}} \implies S \equiv S'. \qquad \textbf{(1п)}$$

Па, правите LM, KN и BD минуваат низ заедничка точка S. Точките T и S се совпаѓаат бидејќи се добиваат како пресечни точки на LM и KN. Според ова правите BD, LM и O_1O_2 минуваат низ заедничка точка (T). **(1п)** □

Решение 2. Нека k_1 ја допира BC во N, k_2 ја допира CD во K, а двете кружници ја допираат AC во P. Од тангентните сегменти на k_1 и k_2 имаме $MA = PA = LA$, $NB = MB$, $LD = KD$ и $NC = PC = KC$. **(1п)**

Оттука следува $AD + BC = AL + LD + BN + NC = AM + MB + DK + KC = AB + DC$, па заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ е тангентен. Според ова симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во една точка I. **(2п)**



Нека MO_1 и LO_2 се сечат во H. Бидејќи $\angle HMA = \angle HLA = 90$, $AM = AL$ и AH е задничка страна добиваме дека $\triangle AMH \cong \triangle ALH$. Според ова H лежи на симетралата на $\angle BAD$. **(1п)**

Бидејќи AH, BO_1 и DO_2 се симетрали на соодветните агли во $ABCD$, тие минуваат низ I, т.е. A, I и H се колинеарни. **(1п)**

Според ова $\triangle BMO_1$ и $\triangle DLO_2$ се коосни, па од теоремата на Дезарг следува дека се кополарни, т.е. BD, ML и O_1O_2 минуваат низ заедничка точка. **(3п)** □

Задача 3. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кои го задоволуваат равенството

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy,$$

за секои реални броеви x и y.

Решение. Ставајќи $y = 0$, добиваме

$$f(f(x)) = f(x) + f(0) \cdot f(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Нека $Im(f)$ е множеството вредности на f, т.е., $Im(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Нека $c = f(0)$. Од (1) имаме

$$f(z) = (c+1)z\,, \quad \forall z \in Im(f)\,. \tag{2}$$ **(1п)**

Имајќи предвид дека $f(x+y) \in Im(f)$ за секои $x, y \in \mathbb{R}$, равенството (2) повлекува

$$cf(x+y) = f(x) \cdot f(y) - x \cdot y\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{3}$$ **(1п)**

Ќе докажеме дека $c = 0$. Навистина, аргументирајќи со контрадикција, да претпоставиме дека $c \neq 0$. Тогаш $0 \notin Im(f)$ (во спротивно, од (2) следува дека $f(0) = 0$, што е противречност). Ставајќи $x = -y = c$ во (3), имаме $c^2 = cf(0) = f(c) \cdot f(-c) + c^2$. Ова повлекува дека $f(c) \cdot f(-c) = 0$, и значи $0 \in Im(f)$. Последнава противречност потврдува дека $c = 0$. **(3п)**

Следствено, од (3) добиваме

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y\,, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Лесно воочуваме дека константната функција $f(x) \equiv 0$ не го задоволува условот на задачата. Значи постои ненулта вредност $z \in Im(f)$. Ставајќи $y = z$ во (4) имаме $f(x) \cdot z = x \cdot z$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Оттука заклучуваме дека $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **(2п)**

Ни преостанува да воочиме дека функцијата $f(x) \equiv x$ го задоволува почетниот услов. **(1п)**

□

Задача 4. Во две дрвени кутии има 1994 и 2024 џамлии, соодветно. Спиро и Цветко ја играат следната игра. Наизменично, секој играч е на потег и отстранува неколку џамлии од една од кутиите така што бројот на отстранетите џамлии во тој потег е делител на моменталниот број на џамлии во другата кутија. Победник во играта е оној после чиј потег двете кутии се празни. Спиро е прв на потег. Кој од играчите има победничка стратегија? (Образложете го одговорот.)

Решение. Секоја позиција во која точно една од двете кутии е непразна е „добитна во еден потег“, и тоа се единствените такви позиции. Да разгледаме произволен момент во кој двете кутии се непразни, нека содржат m и n џамлии соодветно. Функцијата $\nu_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ е дефинирана со $2^{\nu_2(N)} \parallel N$; со други зборови, оваа функција на секој позитивен цел број N му го придружува најголемиот цел број k таков што N е делив со 2^k. **(1п)** Ќе докажеме две помошни тврдења.

Лема 1. *Ако во одреден момент во кутиите има $m > 0$ односно $n > 0$ џамлии при што важи својството $\nu_2(m) = \nu_2(n)$, тогаш ова својство престанува да важи со одигрувањето на следниот потег.* **(1п)**

Од причини на симетрија, да претпоставиме дека потегот се состои во отстранување на r џамлии од кутијата што содржи m џамлии. Бидејќи r е делител на n, имаме дека важи $\nu_2(r) \leq \nu_2(n) = \nu_2(m)$. Доколку $\nu_2(r) < \nu_2(m)$ тогаш $\nu_2(m-r) < \nu_2(m) = \nu_2(n)$, што и тврдиме. Од друга страна, ако $\nu_2(r) = \nu_2(m)$ тогаш $r = 2^k r_1$ и $m = 2^k m_1$, каде r_1 и m_1 се непарни цели броеви. Значи $m - r = 2^k(m_1 - r_1)$ е делив со 2^{k+1} (со оглед дека $m_1 - r_1$ е парен). Следствено, $\nu_2(m-r) \geq k+1 > \nu_2(m)$, што и сакавме да докажеме. **(2п)** ◇

Лема 2. *Ако во одреден момент во кутиите има $m > 0$ односно $n > 0$ цамлии така што својството $\nu_2(m) = \nu_2(n)$ не важи, тогаш ова својство може да се поврати со соодветен следен потег.* **(1п)**

Нека $\nu_2(m) < \nu_2(n)$. Соодветен потег се состои во отстранување на $r = 2^{\nu_2(m)}$ цамлии од кутијата која содржи n цамлии, бидејќи $\nu_2(n-r) = \nu_2(m)$. **(1п)** ⋄

Преостанува да забележиме дека на самиот почеток од играта, имаме $\nu_2(1994) = 1 \neq 3 = \nu_2(2024)$. **(1п)** Оттука, имајќи ги предвид Лемите 1 и 2, Спиро ја има следната победничка стратегија: со секој свој потег го обезбедува својството $\nu_2(m) = \nu_2(n)$. **(1п)** □

Задача 5. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ го задоволува неравенството $f(a+f(a)) \leq 2a+3$ и равенството

$$f(f(a)+b) = f(a+f(b)),$$

за секои $a, b \in \mathbb{N}$. Нека $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана со: „$g(a)$ е најголемиот прост делител на $f(a)$". Докажете дека постојат цели броеви $a > b > 2024$ такви што $b \mid a$ и $g(a) = g(b)$.

Решение. Ако постои природен број p за кој $f(p) < p$, тогаш со избор $b = p$ и $a = p - f(p)$ во даденото равенство добиваме $f(f(p-f(p))+p) = f(p)$. Нека $f(p) = s$, $f(p-s) = d$ и $q = p+d$. Имаме $f(q) = f(f(p-s)+p) = f((p-s)+s) = f(f(p-s)+q) = f(q+d)$ и општо $f(p+kd) = f(f(p-s)+p+(k-1)d) = f((p-s)+s) = f(f(p-s)+p+kd) = f(p+(k+1)d)$. Следува дека $f(p+kd) = s$ за секој $s \in \mathbb{N}_0$. Сега $b = p+2024d > 2024$ и $a = (d+1)b = p+(2024+b)d$ ги задоволуваат условите бидејќи $f(a) = f(b) = s$. **(2п)**

Ако постои природен број p за кој $f(p) = p$ и $f(a) \geq a$ за секој природен број, тогаш нека d е максималната вредност на $f(a) - a$. Ваква вредност постои, бидејќи ако $f(a) > a+4$, тогаш $2a+3 \geq f(a+f(a)) \geq a+f(a) \geq 2a+4$, дава контрадикција. Нека q е природен број за кој $f(q) = q+d$. Со избор $a = p$, $b = q$ добиваме

$$p+q+d \geq f(p+q) = f(f(p)+q) = f(p+f(q)) = f(p+q+d) \geq p+q+d,$$

од каде $f(p+q) = f(p+q+d) = p+q+d$. Истото можеме да го направиме за p и $p+q$ со што добиваме

$$f(2p+q) = f(2p+q+d) = 2p+q+d.$$

Обопштено за p и $kp+q$ заклучуваме дека важи

$$f(kp+q) = f(kp+q+d) = kp+q+d.$$

Со избор $b = kp+q+d > 2024$ таков што b има прост делител поголем од $p+1$ и $a = b(p+1) = (k+b)p+q+d$ ни дава пар кој ги задоволува условите на задачата. **(3п)**

Останува случајот кога $f(a) > a$ за секоја $a \in \mathbb{N}$. Од $2a+3 \geq f(a+f(a)) \geq a+f(a)+1$, следува дека $f(a) \leq a+2$. Ако $f(a) = a+1$ за секој $a \in \mathbb{N}$ одбираме прост број $p > 2025$, $a = p^2-1$ и $b = p-1$. Бидејќи $f(a) = p^2$, $f(b) = p$ и $a = (p-1)(p+1)$ имаме $g(a) = g(b) = p$ и $b \mid a$, па a и b ги задоволуваат условите на задачата. **(1п)**

Ако постои природен број p, за кој $f(p) = p+2$, тогаш $f(2p+2) = 2p+3$. Бидејќи остана случајот во кој $f(a) \leq a+2$ за секој a, следува дека постои m меѓу p и $2p+1$, таков што $f(m) = f(m+1) = m+2$. Избираме $a = m+1$ и $b = m$ и добиваме $f(2m+2) = f(2m+3) = 2m+4$. Со идукција ова се генерализира до $f(km+2k-2) = f(km+2k-1) = k(m+2)$. Навистина

$$\begin{gathered} f((k+1)m+2k) = f(f(m)+km+2k-2) = \\ f(m+f(km+2k-2)) = f(m+f(km+2k-1)) = \\ f(f(m)+km+2k-1) = f((k+1)m+2k+1) = (k+1)m+2k+2. \end{gathered}$$

Оттука $f(k(m+2)-1) = k(m+2)$. Избираме $b = k(m+2)-1 > 2024$ и $a = (k(m+2)+1)b = k^2(m+2)^2-1$. За нив важи $f(b) = k(m+2)$ и $f(a) = k^2(m+2)^2$, па го имаат истиот најголем прост делител, т.е. $g(a) = g(b)$. **(2п)** □