31. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Недела, 7. Април 2024

Задача 1. Нека M е позитивен реален број. Одредете го најмалиот позитивен реален број k со следнава особина: за секој цел број $n > M$, интервалот $(n, kn]$ содржи степен на бројот 2.

Задача 2. Нека $ABCD$ е четириаголник со $AB > AD$, таков што впишаната кружница k_1 на $\triangle ABC$ со центар O_1 и впишаната кружница k_2 на $\triangle ADC$ со центар O_2 имаат заедничка точка на AC. Ако k_1 ја допира AB во M и k_2 ја допира AD во L, докажете дека правите BD, LM и O_1O_2 минуваат низ заедничка точка.

Задача 3. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кои го задоволуваат равенството

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy\,,$$

за секои реални броеви x и y.

Задача 4. Во две дрвени кутии има 1994 и 2024 џамлии, соодветно. Спиро и Цветко ја играат следната игра. Наизменично, секој играч е на потег и отстранува неколку џамлии од една од кутиите така што бројот на отстранетите џамлии во тој потег е делител на моменталниот број на џамлии во другата кутија. Победник во играта е оној после чиј потег двете кутии се празни. Спиро е прв на потег. Кој од играчите има победничка стратегија? (Образложете го одговорот.)

Задача 5. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\setminus\{1\}$ го задоволува неравенството $f(a+f(a)) \leq 2a+3$ и равенството

$$f(f(a)+b) = f(a+f(b))\,,$$

за секои $a, b \in \mathbb{N}$. Нека $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана со: „$g(a)$ е најголемиот прост делител на $f(a)$“. Докажете дека постојат цели броеви $a > b > 2024$ такви што $b \mid a$ и $g(a) = g(b)$.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 8 поени.