ПЕТТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

J1. Најдете ги сите природни броеви m и n и сите прости броеви p такви што

$$4mn - 3m + 2n + mp = p + 12\,.$$

Решение. Ако p е непарен број, тогаш десната страна е непарна додека левата е парна. Оттаму, равенката нема решение доколку p е непарен број. **(1п)** Следствено, кај секое решение (m, n, p) важи $p = 2$. **(1п)** Тогаш почетната равенка добива облик

$$4mn - m + 2n = 14\,.$$

Последното е еквивалентно со

$$m = \frac{14 - 2n}{4n - 1}\,. \qquad \textbf{(2п)}$$

За $n \geq 7$ броителот е 0 или негативен природен број, па заклучуваме дека равенката нема решение за $n \geq 7$. **(1п)** Останува да ги разгледаме случите $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Со директна проверка забележуваме дека единствено при $n = 1$, соодветната вредност за m е природен број, имено $m = 4$. **(1п)**
Заклучуваме дека задачата има единствено решение: $m = 4$, $n = 1$ и $p = 2$. **(1п)** □

J2/C1. Некои од учесниците на овогодинешниот меморијален натпревар АБЦ се познаници (познанствата се симетрични). За секој учесник X, нека $t(X)$ го означува вкупниот број поени што X ги има освоено на минатогодишните натпреварувања. Исполнето е следново:

- За секои пријатели X' X'', важи $t(X') \neq t(X'')$;
- За секој X, множеството $\{t(Y) : Y$ е познаник на $X\}$ се состои од последователни цели броеви.

Организаторите сакаат да ги сместат натпреварувачите во амфитеатри така што никои двајца познаници не се во ист амфитеатар. Колку најмалку амфитеатри им се доволни?

Решение. Одговорот гласи: 2 амфитеатри.

Бидејќи некои од учесниците се познаници, барем два амфитеатри се потребни. **(1п)** Ќе докажеме дека учесниците може да се сместат во два амфитеатри на посакуваниот начин. Всушност, потребно и доволно е да го докажеме следното еквивалентно тврдење: *Не постојат учесници $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ такви што X_i и X_{i+1} се познаници за секој $1 \leq i \leq 2n$ и уште X_{2n+1} и X_1 се познаници.* **(1п)**

Да претпоставиме дека постои „непарен циклус“ учесници $X_1, X_2, \dots, X_{2n+1}$ со споменатата особина. Го ориентираме секое од ребрата $X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_{2n}X_{2n+1}, X_{2n+1}X_1$ така што

$$t(\text{почеток}) < t(\text{завршеток})\,.$$

Со оглед дека разгледуваниот циклус е непарен, постојат две последователни ребра со согласни ориентации, т.е. завршетокот на едното ребро е почеток на другото или обратно. Две такви ребра формираат насочен пат со должина 2. Без губење од општоста, можеме да претпоставиме дека $t(X_1) < t(X_2) < t(X_3)$. Бидејќи $t(X_1), t(X_3) \in \{t(Y) : Y \text{ е познаник на } X_2\}$, од вториот услов на задачата имаме дека: за секој цел број y што лежи помеѓу $t(X_1)$ и $t(X_3)$ постои познаник Y на X_2 таков што $t(Y) = y$. Но од ова, земајќи $y = t(X_2)$ првиот услов на задачата ја дава посакуваната противречност. **(5п)** □

J3/C2. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $xy + z^2 = 8$. Определете ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме:

$$(1) \qquad 2\sqrt{xyz^2} \leq xy + z^2 = 8 \implies z\sqrt{xy} \leq 4. \qquad \textbf{(2п)}$$

Следува дека,

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2} &= \frac{x+y}{z} + \left(\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right) + z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \\ \frac{2\sqrt{xy}}{z} + \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2z}{xy} &= \frac{\sqrt{xy}}{z} + \frac{\sqrt{xy}}{z} + \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2z}{xy} \geq \\ 4\sqrt[4]{\frac{\sqrt{xy}}{z} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{z} \cdot \frac{2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{2z}{xy}} &= 4\sqrt[4]{\frac{4}{z\sqrt{xy}}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{4}{4}} = 4. \qquad \textbf{(4п)} \end{aligned}$$

Го користевме (1) во последното неравенство. За да се достигне минималната вредност 4 мора да важат равенствата $xy = z^2$ и $x = y$. Ова е можно само за $x = y = z = 2$. По замена на овие вредности во дадениот израз лесно се добива вредност 4. **(1п)** □

C3. Определете ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такви што за секој позитивен цел број k важи $|f(k)| \leq k$ и постои прост број $p > 2024$ за кој се задоволени следните услови:

- За секој $a \in \mathbb{N}$ важи $af(a+p) = af(a) + pf(a)$;
- За секој $a \in \mathbb{N}$ важи $p | a^{\frac{p+1}{2}} - f(a)$.

Решение. Прво ќе докажеме дека $a | f(a)$ за секој позитивен цел број a. Од вториот услов следува $p | (pk)^{\frac{p+1}{2}} - f(pk)$ за секој $k \geq 1$, па ако $p | a$, тогаш $p | f(a)$. Ако $p \nmid a$, од првиот услов добиваме $af(a+p) = (a+p)f(a)$, но $(a+p, a) = 1$ повлекува $a | f(a)$. Со ова докажавме дека $a | f(a)$. **(1п)**

Дефинираме функција $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ со $g(a) = \frac{f(a)}{a}$ за секој позитивен цел број a. (**1п**)

Од претходната дискусија следува дека функцијата е добро дефинирана. Уште повеќе за секој позитивен цел број k важи:

$$|g(k)| = \left|\frac{f(k)}{k}\right| \leq \frac{k}{|k|} = 1.$$

Сега првиот услов се трансформира во $g(a+p) = g(a)$ за секој позитивен цел број a, а вториот во $p|a \cdot (a^{\frac{p-1}{2}} - g(a))$. **(1п)**

Ако $p \nmid a$ од Ојлеровиот критериум добиваме $g(a) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$. Следствено $p|g(a) - \left(\frac{a}{p}\right)$. Од друга страна $\left|g(a) - \left(\frac{a}{p}\right)\right| \leq |g(a)| + \left|\left(\frac{a}{p}\right)\right| \leq 2$, што бидејќи $p > 2024$ е можно само ако $g(a) = \left(\frac{a}{p}\right)$. **(1п)**

Ако $p|a$, забележуваме дека постои константа c од $\{-1, 0, 1\}$ за која $g(a) = c$ за екое a деливо со p. **(1п)**

Сега од $f(a) = ag(a)$, добиваме три можни решенија за секој $p > 2024$: првото решение е $f_1(a) = a \cdot \left(\frac{a}{p}\right)$ за секој позтивен цел број a. Останатите две се дадени со:

$$f_2(a) = \begin{cases} a \cdot \left(\frac{a}{p}\right), & \text{if } p \nmid a \\ a, & \text{ако } p|a \end{cases}$$

$$f_3(a) = \begin{cases} a \cdot \left(\frac{a}{p}\right), & \text{if } p \nmid a \\ -a, & \text{ако } p|a \end{cases}$$

Лесно се проверува дека овие три функции ги задоволуваат условите на задачата. **(2п)** □

J4. За множество S од барем две точки во рамнина велиме дека е *добро* ако за секои две точки $A, B \in S$, кружницата со дијаметар AB содржи и трета точка од S. Дали е можно множеството S да биде конечно? (Образложете го одговорот.)

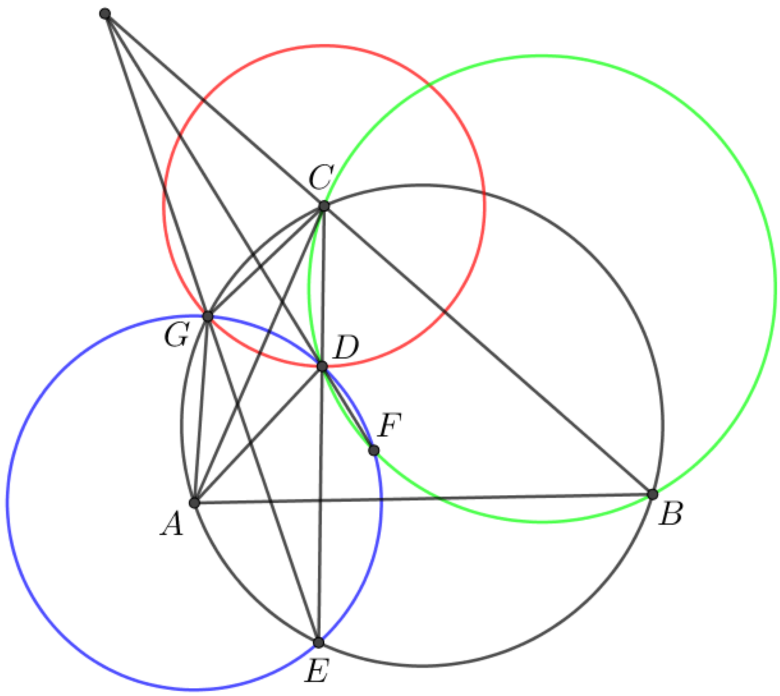
Решение. Да претпоставиме дека множеството S конечно. Тогаш множеството од сите отсечки со краеви во S е конечно и непразно. **(2п)** Нека $A, B \in S$ се краеви на отсечка со *најмала* должина. **(1п)** Кружницата со дијаметар AB содржи трета точка $C \in S$. Имаме

$$AC^2 < AC^2 + BC^2 = AB^2 . \quad \textbf{(2п)}$$

Оттаму $AC < AB$, што противречи на претпоставената *минималност* на AB. **(1п)** Значи множеството S мора да е бесконечно. **(1п)** □

J5/C4. Нека D е точка од внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\angle CDA + \angle CBA = 180°$. Правата CD по вторпат ја сече кружницата (ABC), опишана околу $\triangle ABC$, во точка E. Нека G пресекот на кружницата со центар во C и радиус CD со лакот $\overset{\frown}{AC}$ од (ABC) кој не ја содржи точката B. Кружница со центар во A и радиус AD по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle BCD$ во точка F. Докажете дека правите GE, FD и CB се сечат во една точка или се паралелни.

Решение. Со $(KLMN)$ ја означуваме кружницата која минува низ точките K, L, M, N. Нека G' е осно симетрична слика на D во однос на AC. **(1п)**



Тогаш
$$\angle AG'C = \angle CDA\,.$$
Бидејќи $\angle CDA + \angle CBA = 180^\circ$ имаме
$$\angle AG'C + \angle CBA = 180^\circ\,.$$
Оттука, G' лежи на (ABC) и $CG' = CD$. Од $CG = CD$ и $\angle AGC + \angle CBA = 180^\circ$ следува дека
$$G \equiv G'\,. \qquad \textbf{(2п)}$$
Бидејќи G е симетрична на D во однос на AC, имаме
$$AG = AD\,,$$
т.е. точката G лежи на кружницата со центар во A и радиус AD. **(1п)**
Забележуваме дека
$$\angle ADE = 180^\circ - \angle CDA = \angle CBA = \angle DEA\,.$$
Оттука добиваме дека триаголникот AED е рамнокрак, т.е. $AD = AE$ и E лежи на кружницата со центар во A и радиус AD, која исто така минува и низ F. **(1п)**
Од горната дискусија добиваме дека: GE е радикална оска за $(EFDG)$ и $(AEBCG)$, FD е радикална оска за $(EFDG)$ и $(BCDF)$, и CB е радикална оска за $(BCDF)$ и $(AEBCG)$. Следува, правите GE, FD и CB се паралелни или се сечат во една точка - радикалниот центар за $(EFDG)$, $(BCDF)$ и $(AEBCG)$. **(2п)** $\square$

J6/C5. За даден цел број $k \geq 1$, најдете ги сите k-торки $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ од позитивни цели броеви со НЗД$(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ и $n_2 \mid (n_1+1)^{n_1} - 1$, $n_3 \mid (n_2+1)^{n_2} - 1, \ldots, n_1 \mid (n_k+1)^{n_k} - 1$.

Решение. Јасно е дека k-торката $(1, 1, \ldots, 1)$ ги задоволува условите на задачата. **(1п)**

Ќе докажеме дека ова е единствената ваква k-торка. Да претпоставиме дека $(n_1, \ldots, n_k)$ е друго решение. Забележуваме дека во неа $n_i > 1$ за секој $1 \leq i \leq k$. Нека p_i е најмалиот (позитивен) прост делител на n_i. **(1п)** Бидејќи НЗД$(n_1, n_2, ..., n_k) = 1$, постои индекс i за кој $p_i > p_{i+1}$ (индексите ги разгледуваме по модул k во множеството $\{1, 2, \ldots, k\}$). Во спротивно, $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$ што противречи на НЗД$(n_1, n_2, ..., n_k) = 1$. **(1п)**

Од $n_{i+1} \mid (n_i+1)^{n_i}-1$ следуваат НЗД$(n_{i+1}, n_i+1) = 1$ и $(n_i+1)^{n_i} \equiv 1 \pmod{n_{i+1}}$. Со примена на малата теорема на Ферма добиваме дека:

$$(n_i+1)^{n_i} \equiv 1 \pmod{p_{i+1}},$$
$$(n_i+1)^{p_{i+1}-1} \equiv 1 \pmod{p_{i+1}}. \quad \textbf{(2п)}$$

Нека сега m е најмалиот позитивен цел број за кој $(n_i+1)^m \equiv 1 \pmod{p_{i+1}}$, т.е. $m = \mathrm{ord}_{p_{i+1}}(n_i+1)$. Следуве дека $m \mid n_i$ и $m \mid p_{i+1}-1$. Ако $m = 1$ добиваме $p_{i+1} \mid n_i$, што противречи на минималноста на p_i. **(1п)**

Следува дека $p_i \mid m$ и $m \le p_{i+1}-1 < p_{i+1} < p_i$, противречност. **(1п)** □

С6. Во група од $2n$ ученици, секој е пријател со точно тројца од групата. Пријателствата се симетрични и за секои два ученика A, B кои не се пријатели, постои низа $C_1, C_2, \ldots, C_r$ од членови на групата таква што A е пријател со C_1, C_1 е пријател со C_2, итн., C_r е пријател со B. Секој ученик бил запрашан да го процени секое од трите свои пријателства во групата, со три опции на располагање: „само познаници“, „добри пријатели“, или „најдобри другари“. Се испоставило дека секој ученик или ја дал истата проценка за сите свои пријателства или ја искористил секоја од расположливите опции по еднаш. Велиме дека настанува *несогласување* за секој пар пријатели кои различно го процениле нивното пријателство. Нека $\mathcal{D}$ е множеството од сите можни вредности на вкупниот број настанати несогласувања.

Докажете дека $|\mathcal{D}| \ge 3n$ со равенство ако и само ако групата ученици може да се разбие на две подгрупи така што секој ученик е раздвоен од сите свои пријатели.

Решение. Пребројувајќи на два начини, заклучуваме дека вкупниот број на пријателства изнесува $\frac{3}{2} \cdot 2n = 3n$. Следствено, $\mathcal{D} \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, 3n\}$. Ќе докажеме дека $\{0, 2, 3, \ldots, 3n\} \subseteq \mathcal{D}$, со равенство ако и само ако групата може да се разбие на две подгрупи така што секој ученик е раздвоен од сите свои пријатели.

Заради прегледност, аргументирањето го организираме во четири тврдења. Ќе ја користиме следнава ад-хок терминологија (покрај стандардна терминологија од теорија на графови). За даден едноставен граф G со максимум степен $\Delta(G) \le 3$, *убаво* ребрено-боење на G со множество бои S е пресликување $E(G) \to S$ такво што:

(a) секои две ребра инцидентни со исто 2-теме се различно обоени,
(b) секои три ребра инцидентни со исто 3-теме се обоени или сите еднакво или сите различно.

Да се потсетиме дека ребрено-боење на граф G се нарекува *правилно* доколку секои две соседни ребра се различно обоени. Нека $d = d(G)$ е бројот на 2-темиња во G.

Тврдење 1. *Секое дрво T со $\Delta(T) \le 3$ дозволува убаво ребрено-боење со множество бои $\{1, 2\}$.* Докажуваме со индукција по $d = d(T)$. Ако $d = 0$, тогаш доволно е да го обоиме секое ребро со бојата 1. Претпоставувајќи дека $d \ge 1$, разгледуваме 2-теме v. Го разбиваме v на две 1-темиња, да ги именуваме со v' и v''; нека T' и T'' се резултирачките дрва, и нека $e' \in E(T'), e'' \in E(T'')$ се висечките ребра инцидентни со v' и v'', соодветно. Со оглед дека $d(T'), d(T'') < d$, индуктивната претпоставка ни дава убави ребрени-боења φ' и φ'' на T' и T'', соодветно, обете со множество бои $\{1, 2\}$. Со пермутирање на боите кај едно од двете дрва, доколку е потребно, можеме да обезбедиме дека $\varphi'(e') \ne \varphi''(e'')$. Така $\varphi' \cup \varphi''$ е посакуваното убаво ребрено-боење на T. ◇

(1п)

Тврдење 2. *Секој сврзан граф G со $\Delta(G) \le 3$ и $d(G) \ne 1$ дозволува убаво ребрено-боење со множество бои $\{1, 2, 3\}$.* Ако $d = d(G) = 0$, тогаш доволно е да го обоиме секое ребро со бојата 1. Нека $d \ge 2$. Најпрво, со индукција по d докажуваме дека постои дрво T во G кое ги поседува следните две особини: (i) секое 2-теме од G припаѓа во $V(T)$, и (ii) секое висечко теме од T е 2-теме од G.

За потврдување на базата на индукција, т.е., случајот $d = 2$, земаме T да е пат во G што ги поврзува единствените две 2-темиња. За $d > 2$, потиснуваме едно 2-теме v од G, т.е., го бришеме v и додаваме ново ребро e помеѓу неговите соседи; да го означиме така добиениот граф со G'. Индуктивната претпоставка ни дава дрво T' кое ги задоволува условите (i) и (ii) за G'. Ако $e \in E(T')$, тогаш со отпотиснување на потиснатото теме, т.е., со (еднократно) субдивидирање на реброто e, го добиваме посакуваното дрво. Во спротивно, T' е поддрво од $G - v$. Тогаш нека P е v-$V(T')$ пат во G и нека $T = P \cup T'$. Да забележиме дека T е дрво во G за кое важат (i) и (ii). Со ова е комплетиран индуктивниот доказ за постоењето на дрво T со наведените особини.

Јасно е дека, имајќи ги предвид особините (i) и (ii), секое теме u во ребрениот комплемент $\hat{T} = G - E(T)$ има степен $\deg_{\hat{T}}(u) \in \{0, 1, 3\}$. Оттаму, комбинирајќи убаво ребрено-боење на T со множество бои $\{1, 2\}$ (според Тврдењето 1) и монохроматско ребрено-боење на $\hat{T}$ со бојата 3 го добиваме посакуваното ребрено-боење на G. $\diamond$

(2п)

Да забележиме дека Тврдењето 2 повлекува $\{0, 2, 3, \ldots, 3n\} \subseteq \mathcal{D}$. Навистина, да го набљудуваме 'графот на пријателства' H за групата ученици, каде секое теме претставува ученик и секој пар пријатели се поврзани со ребро. За секој даден $d \in \{0, 2, 3, \ldots, 3n\}$, избираме d од $3n$те ребра во H и го субдивидираме (еднократно) секое избрано ребро. Оваа постапка резултира со сврзан граф G таков што $\Delta(G) = 3$ и $d(G) = d \neq 1$. Користиме едно убаво ребрено-боење на G со множество бои $\{1, 2, 3\}$, според Тврдењето 2. Навраќајќи се на графот на пријателства H, да ги интерпретираме боите како проценки: нека бојата 1 соодветствува на „само познаници", бојата 2 на „добри пријатели", и бојата 3 на „најдобри другари".

Останува да дадеме карактеризација на равенство во докажаната инклузија $\{0, 2, 3, \ldots, 3n\} \subseteq \mathcal{D}$. Во следните две тврдења се ограничуваме на графови G со максиум степен $\Delta(G) = 3$, минимум степен $\delta(G) = 2$ и $d(G) = 1$. Нека v е единственото 2-теме во таков граф G, и нека $G\%v$ е 3-регуларниот граф што се добива од G со потиснување на v.

Тврдење 3. *Ако $G\%v$ не е бипартитен, тогаш G дозволува убаво ребрено-боење со множество бои $\{1, 2, 3\}$.* Можеме да претпоставиме дека G е сврзан. Најпрво го разгледуваме случајот кога постои непарен циклус (т.е., циклус со непарна должина) C_o во G што не минува низ v. Со оглед дека G е сврзан, тогаш постои нетривијален v-$V(C_o)$ пат P. Нека w е второто завршно теме на P (покрај v) и да го разгледаме подграфот $G' = P \cup C_o$. Забележуваме дека w е единственото изолирано теме во ребрениот комплемент $\hat{G}' = G - E(G')$; уште повеќе, секое преостанато теме u во $\hat{G}'$ има степен $\deg_{\hat{G}'}(u)$ еднаков на 1 или 3. Да го боиме множеството $E(\hat{G}')$ со 3; да ја искористиме бојата 1 за $E_G(w)$; да ги обоиме преостанатите необоени ребра на P и C_o наизменично со 1 и 2 така што добиеното ребрено-боење на G' не е правилно единствено кај w (такво 2-ребрено-боење на G' е можно бидејќи C_o е непарен циклус). Ова комплетира посакувано убаво ребрено-боење на G со множество бои $\{1, 2, 3\}$.

Да го разгледаме сега случајот кога секој непарен циклус во G минува низ v, што значи дека секој циклус што не минува низ v е парен (т.е., има парна должина). Постои и парен циклус C_e во G што минува низ v. Навистина, во спротивно секој циклус во $G\%v$ е парен, што противречи на претпоставката дека $G\%v$ не е бипартитен. Со оглед дека постоењето на C_e е потврдено, конструираме убаво ребрено-боење на G со множество бои $\{1, 2, 3\}$ на следниов начин: користиме правилно ребрено боење на C_e со множество бои $\{1, 2\}$ и го обојуваме множеството ребра на $\hat{C}_e = G - E(C_e)$ со 3. $\diamond$

(2п)

Тврдење 4. *Ако $G\%v$ е бипартитен, тогаш G не дозволува убаво ребрено-боење со множество бои $\{1, 2, 3\}$.* Нека X, Y е бипартиција на $V(G\%v)$ таква што $E(G\%v) = E(X, Y)$. Аргументирајќи со контрадикција, да претпоставиме дека постои убаво ребрено-боење на G со множество бои $\{1,2,3\}$. Без губење на општоста, нека v-X реброто е обоено со 1, додека v-Y реброто е обоено со 2. Нека x_1, x_2, x_3, x_{123} се соодветно бројот на темиња u од X такви што $E_G(u)$ е обоено целосно со 1, целосно со 2, целосно со 3, или со сите три бои $1,2,3$. Аналогно, користиме нотација y_1, y_2, y_3, y_{123} за бројот на темиња во соодветните подмножества од Y.

Пребројувајќи ја на два начини боја-класата E_1, го добиваме равенството

$$3x_1 + x_{123} = 1 + 3y_1 + y_{123}\,. \tag{2}$$

Размислувајќи аналогно за боја-класата E_2, добиваме

$$1 + 3x_2 + x_{123} = 3y_2 + y_{123}\,. \tag{3}$$

Да ја разгледаме разликата $x_{123} - y_{123}$. Од (2) следува дека $x_{123} - y_{123} \equiv 1 (\bmod 3)$. Од друга страна, (3) повлекува $x_{123} - y_{123} \equiv -1 (\bmod 3)$. Ова е посакуваната противречност. $\diamond$

(2п)

Да забележиме дека Тврдењата 3 и 4 заедно го повлекуваат следново: $1 \notin \mathcal{D}$ ако и само ако графот на пријателства H е бипартитен, т.е., ако и само ако групата ученици може да се разбие на две подгрупи така што секој ученик е раздвоен од сите свои пријатели. Со ова доказот е комплетиран. $\square$