ПЕТТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 1: Сабота, 27. Јануари 2024

Задача 1. Некои од учесниците на овогодинешниот меморијален натпревар се познаници (познанствата се симетрични). За секој учесник X, нека $t(X)$ го означува вкупниот број поени што X ги има освоено на минатогодишните натпреварувања. Исполнето е следново:

- За секои пријатели X' X'', важи $t(X') \neq t(X'')$;
- За секој X, множеството $\{t(Y) : Y \text{ е познаник на } X\}$ се состои од последователни цели броеви.

Организаторите сакаат да ги сместат натпреварувачите во амфитеатри така што никои двајца познаници не се во ист амфитеатар. Колку најмалку амфитеатри им се доволни?

Задача 2. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $xy + z^2 = 8$. Определете ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}\,.$$

Задача 3. Определете ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ такви што за секој позитивен цел број k важи $|f(k)| \leq k$ и постои прост број $p > 2024$ за кој се задоволени следните услови:

- За секој $a \in \mathbb{N}$ важи $af(a+p) = af(a) + pf(a)$;
- За секој $a \in \mathbb{N}$ важи $p|a^{\frac{p+1}{2}} - f(a)$.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ПЕТТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 2: Недела, 28. Јануари 2024

Задача 4. Нека D е точка од внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\angle CDA + \angle CBA = 180^\circ$. Правата CD по вторпат ја сече кружницата (ABC), опишана околу $\triangle ABC$, во точка E. Нека G пресекот на кружницата со центар во C и радиус CD со лакот $\widehat{AC}$ од (ABC) кој не ја содржи точката B. Кружница со центар во A и радиус AD по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle BCD$ во точка F. Докажете дека правите GE, FD и CB се сечат во една точка или се паралелни.

Задача 5. За даден цел број $k \geq 1$, најдете ги сите k-торки $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ од позитивни цели броеви со НЗД$(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ и $n_2 \mid (n_1+1)^{n_1} - 1$, $n_3 \mid (n_2+1)^{n_2} - 1, \ldots, n_1 \mid (n_k+1)^{n_k} - 1$.

Задача 6. Во група од $2n$ ученици, секој е пријател со точно тројца од групата. Пријателствата се симетрични и за секои два ученика A, B кои не се пријатели, постои низа $C_1, C_2, \ldots, C_r$ од членови на групата таква што A е пријател со C_1, C_1 е пријател со C_2, итн., C_r е пријател со B. Секој ученик бил запрашан да го процени секое од трите свои пријателства во групата, со три опции на располагање: „само познаници“, „добри пријатели“, или „најдобри другари“. Се испоставило дека секој ученик или ја дал истата проценка за сите свои пријателства или ја искористил секоја од расположливите опции по еднаш. Велиме дека настанува *несогласување* за секој пар пријатели кои различно го процениле нивното пријателство. Нека $\mathcal{D}$ е множеството од сите можни вредности на вкупниот број настанати несогласувања.

Докажете дека $|\mathcal{D}| \geq 3n$ со равенство ако и само ако групата ученици може да се разбие на две подгрупи така што секој ученик е раздвоен од сите свои пријатели.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.