ПЕТТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 1: Сабота, 27. Јануари 2024

Задача 1. Најдете ги сите природни броеви m и n и сите прости броеви p такви што

$$4mn - 3m + 2n + mp = p + 12\,.$$

Задача 2. Некои од учесниците на овогодинешниот меморијален натпревар се познаници (познанствата се симетрични). За секој учесник X, нека $t(X)$ го означува вкупниот број поени што X ги има освоено на минатогодишните натпреварувања. Исполнето е следново:

- За секои пријатели X' X'', важи $t(X') \neq t(X'')$;
- За секој X, множеството $\{t(Y) : Y$ е познаник на $X\}$ се состои од последователни цели броеви.

Организаторите сакаат да ги сместат натпреварувачите во амфитеатри така што никои двајца познаници не се во ист амфитеатар. Колку најмалку амфитеатри им се доволни?

Задача 3. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $xy + z^2 = 8$. Определете ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}\,.$$

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ПЕТТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 2: Недела, 28. Јануари 2024

Задача 4. За множество S од барем две точки во рамнина велиме дека е *добро* ако за секои две точки $A, B \in S$, кружницата со дијаметар AB содржи и трета точка од S. Дали е можно множеството S да биде конечно? (Образложете го одговорот.)

Задача 5. Нека D е точка од внатрешноста на $\triangle ABC$ таква што $\angle CDA + \angle CBA = 180°$. Правата CD по вторпат ја сече кружницата (ABC), опишана околу $\triangle ABC$, во точка E. Нека G пресекот на кружницата со центар во C и радиус CD со лакот $\overset{\frown}{AC}$ од (ABC) кој не ја содржи точката B. Кружница со центар во A и радиус AD по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle BCD$ во точка F. Докажете дека правите GE, FD и CB се сечат во една точка или се паралелни.

Задача 6. За даден цел број $k \geq 1$, најдете ги сите k-торки $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ од позитивни цели броеви со НЗД$(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$ и $n_2 \mid (n_1+1)^{n_1} - 1$, $n_3 \mid (n_2+1)^{n_2} - 1, \ldots, n_1 \mid (n_k+1)^{n_k} - 1$.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.