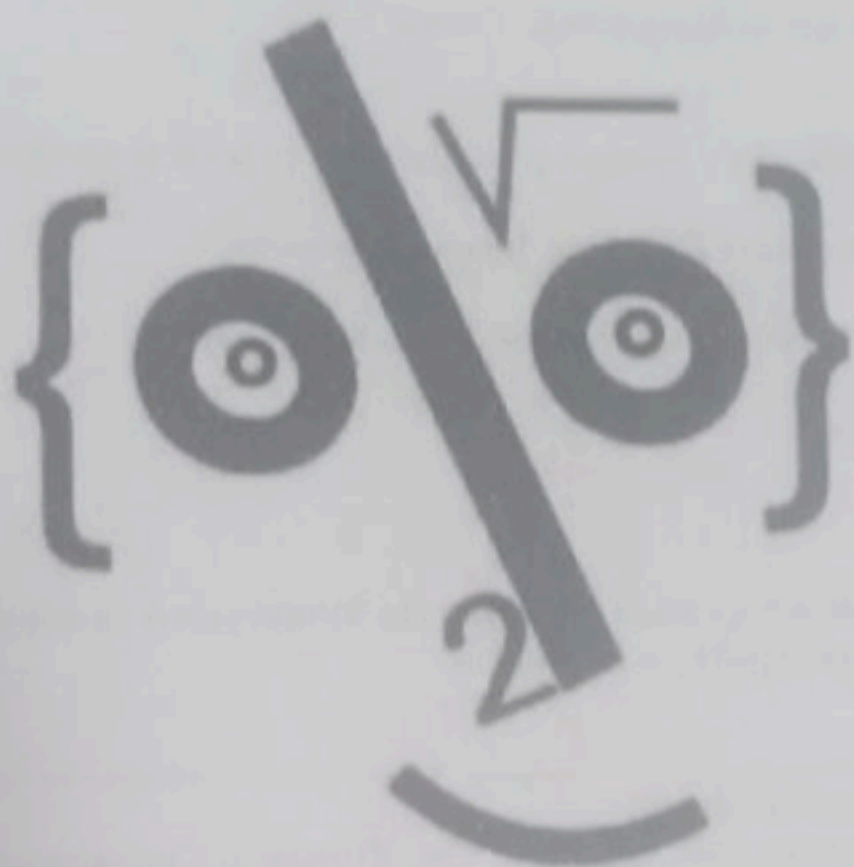


# ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРА

ВТОРО ИЗДАНИЕ



Елизабета Витанова  
Билјана Јованова  
Раде Кренков  
Сељами Тахир

Скопје, 2023

## Предговор

Збирката задачи по АЛГЕБРА е математичка книга наменета за учениците од трета година на гимназиското образование од природно-математичката насока за здобивање поголеми и сеопфатни знаења од алгебрата. Исто така, оваа збирка може и на наставниците да им обезбеди дополнително богат и неопходен материјал за работа во математичките секции. Во неа се обработени математички проблеми кои се во функција на наставните содржини во истоимениот учебник за трета година на гимназиското образование. Истата може да ја користат и талентирани ученици како и студентите на Природно математичкиот факултет и техничките факултети. Во изборот на задачите се внимаваше на групирање на задачите, како по вид, така и по тежината на самиот проблем, одејќи притоа од поедноставност кон посложеност. Нашата интенција е доближување на предметот АЛГЕБРА до самите ученици, а со тоа и проширување и продлабочување на стекнатите знаења, притоа користејќи ги формите, методите и практиките користени и во други држави, сè со цел за развој и унапредување на математичката мисла и идеја. Збирката во себе содржи голем број задачи со решенија и одговори, а на значителен дел, се дадени и упатства за нивно решавање.

Во првата наставна тема „Корени“ има голем број задачи во кои е предвидено повторување на поимот корен како и операции со корени, користење на Лагранжовиот идентитет за трансформација на ирационални изрази. Посебен акцент е ставен на идентитетите и ирационалните равенки.

Во втората наставна тема „Одбрани делови од теорија на броеви“ е посветено посебно внимание на конгруенциите во множеството на целите броеви со нивна примена во конгруентните и диофантовите равенки и системите конгруентни равенки, Ојлеровата функција, теоремите на Ојлер, Ферма, Вилсон. Решавање на диофантовите равенки со користење на методот на Ферма и нивна примена.

Во третата наставна тема „Неравенства“ се опфатени проблеми со докажување на неравенста со апсолутни вредности, неравенството на триаголник, релациите меѓу аритметичка, геометриска, квадратна, хармониска средина како и некои познати неравенства: Кошиово, Бернулјево, како и неравенството на Чебишев. Дадена е примена на неравенствата во геометриски задачи на одредување минимум и максимум. Задачите од оваа тема имаат голема примена на голем број регионални, републички и меѓународни натпревари.

Четвртата наставна тема „Полиноми“ во себе содржи повторување за операции со полиноми, разложување на полиноми на множители, проширување на знаењата за Виетови формули. Користење Евклидов алгоритам за наоѓање најголем заеднички делител на два полиноми, одредување на нули на полином со цели и рационални коефициенти, користење на Хорнеровата шема (синтетички метод) како и одредување можен број на реални нули со примена на Декартовото правило за знаци.

Исто така посветено е, внимание и на трансформација на рационалните дробки во вид на збир од прости множители со примена на метод на неопределени коефициенти како и решавање на повеќе видови равенки: биномни, триномни, симетрични.

Петтата наставна тема „Равенки, системи равенки, неравенки и системи неравенки“ содржи повторување за логаритамските, експоненцијалните, тригонометриските равенки и системите од две равенки со две непознати, како и за линеарните и квадратните неравенки.

Темата содржи и задачи со кои се врши проширување и продлабочување на знаењата за дробно рационалните неравенки со една непозната, експоненцијалните неравенки и системи неравенки со една непозната, логаритамски неравенки и системи неравенки со една непозната, тригонометриските неравенки и системи неравенки со една непозната.

На наставниците и учениците им укажуваме и на можноста од користење на информациско-комуникациските технологии (програмата ГЕОГЕБРА) при решавање на задачи од оваа тема.

Во последната наставна тема „Комплексни броеви“ се проширени и дополнети знаењата за комплексни броеви. Опфатени се: тригонометриска форма на комплексните броеви, операции со тригонометриска форма на комплексни броеви и нивна примена. Потоа Моаврова формула за степенување на комплексен број во тригонометриски запис и соодветно операцијата коренување.

Се надеваме дека многу наставници и професори по математика со оваа збирка ќе пополнат една празнина од областа на алгебрата во својата математичка библиотека.

Посебна благодарност изразуваме до рецензентите на оваа збирка, кои со своите забелешки и предлози придонесоа за подобрување на нејзиниот квалитет.

На учениците им посакуваме успешно решавање на математичките проблеми.

Со среќа!

## СОДРЖИНА

| 1. КОРЕНУВАЊЕ                                 |  | Задачи | Одговор |
|---|--|--------|---------|
| 1.1.  | Проширување и скратување на корени. Коренување на производ и количник .....                          | 5      | 134     |
| 1.2.  | Нормален вид на корен .....  | 6      | 134     |
| 1.3.  | Операции со корени .....   | 7      | 135     |
| 1.4.  | Рационализирање на именител на дробка .....  | 9      | 136     |
| 1.5.  | Идентитети .....   | 11     | 138     |
| 1.6.  | Упростување на ирационални изрази .....  | 13     | 139     |
| 1.7.  | Ирационални равенки и нивно решавање со воведување на нова непозната .....                           | 15     | 141     |
| 1.8.  | Ирационални равенки. Решавање на ирационални равенки со последователно степенување на корените ..... | 17     | 144     |
| 1.9.  | Задачи за вежбање .....  | 20     | 147     |
| <b>2. ОДБРАНИ ДЕЛОВИ ОД ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ</b> |  |        |         |
| 2.1.  | Функциите $[x]$ и $\{x\}$ .....  | 22     | 151     |
| 2.2.  | Мултипликативни функции .....  | 25     | 157     |
| 2.3.  | Конгруенции во множеството на цели броеви .....  | 27     | 160     |
| 2.4.  | Системи на остатоци .....  | 29     | 164     |
| 2.5.  | Ојлерова функција и нејзините својства .....   | 31     | 167     |
| 2.6.  | Теореме на Ојлер, Ферма и Вилсон .....   | 32     | 171     |
| 2.7.  | Системи линеарни конгруентни равенки .....   | 35     | 177     |
| 2.8.  | Некои диофантови равенки. Питагорини тројки .....  | 38     | 179     |
| 2.9.  | Метод на спуштање кај некои Диофантови равенки .....   | 40     | 183     |
| 2.10.   | Задачи за вежбање .....  | 42     | 186     |
| <b>3. НЕРАВЕНСТВА</b>                         |  |        |         |
| 3.1.  | Поим и видови неравенства .....  | 44     | 187     |
| 3.2.  | Апсолутна вредност и својства на апсолутна вредност на реален број .....                             | 46     | 189     |
| 3.3.  | Неравенства со апсолутни вредности .....   | 48     | 190     |
| 3.4.  | Средни величини .....  | 49     | 191     |
| 3.5.  | Некои поважни неравенства .....  | 52     | 197     |
| 3.6.  | Задачи за вежбање .....  | 54     | 201     |
| <b>4. ПОЛИНОМИ</b>                            |  |        |         |
| 4.1.  | Основни поими за полиноми .....  | 57     | 205     |
| 4.2.  | Собирање и множење на полином .....  | 59     | 206     |
| 4.3.  | Делење на полиноми .....   | 60     | 206     |

|      |   |    |     |
|------|---|----|-----|
| 4.4  | Деливост на полиноми .....  | 64 | 208 |
| 4.5  | Нули на полиномите .....  | 67 | 210 |
| 4.6  | Најголем заеднички делител на два полиноми .....                                | 70 | 212 |
| 4.7  | Полиноми со цели и рационални коефициенти .....                                 | 71 | 213 |
| 4.8  | Методи на неопределени коефициенти. Основна теорема на алгебрата .....          | 74 | 215 |
| 4.9  | Врска меѓу нулите на полиномот и коефициентите пред променливите .....          | 76 | 216 |
| 4.10 | Полиноми со реални коефициенти .....  | 78 | 218 |
| 4.11 | Дробно рационални изрази со една променлива .....                               | 79 | 219 |
| 4.12 | Трансформација на рационалните дробки во вид на збир од прости множителни ..... | 81 | 219 |
| 4.13 | Полиномни равенки .....   | 83 | 220 |
| 4.14 | Задачи за вежбање .....   | 87 | 225 |

### 5. РАВЕНКИ, СИСТЕМИ РАВЕНКИ, НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ

|      |  |     |     |
|------|--|-----|-----|
| 5.1  | Експоненцијални равенки .....  | 91  | 227 |
| 5.2  | Логаритамски равенки .....   | 93  | 23  |
| 5.3  | Тригонометриски равенки .....  | 95  | 236 |
| 5.4  | Систем од две експоненцијални, две логаритамски или две тригонометриски равенки со две непознати ..... | 97  | 242 |
| 5.5  | Линеарни и квадратни неравенки .....   | 100 | 249 |
| 5.6  | Систем линеарни и квадратни неравенки .....  | 102 | 251 |
| 5.7  | Дробно рационални неравенки со една непозната .....  | 105 | 254 |
| 5.8  | Експоненцијални неравенки и систем експоненцијални неравенки .....                                     | 107 | 256 |
| 5.9  | Логаритамски неравенки и систем логаритамски неравенки .....   | 110 | 260 |
| 5.10 | Тригонометриски неравенки .....  | 113 | 266 |
| 5.11 | Задачи за вежбање .....  | 115 | 274 |

### 6. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

|     |   |     |     |
|-----|---|-----|-----|
| 6.1 | Форми на задавање на комплексните броеви .....                                | 118 | 276 |
| 6.2 | Тригонометриска форма на комплексните броеви .....                            | 120 | 280 |
| 6.3 | Множење и делење на комплексни броеви во тригонометриска форма .....          | 122 | 282 |
| 6.4 | Степенување и коренувањ на комплексни броеви. Моаврова формула .....          | 123 | 283 |
| 6.5 | Неравенства на модул од збир и модул од разлика на два комплексни броја ..... | 126 | 288 |
| 6.6 | Примена на комплексните броеви во тригонометриска форма ...                   | 127 | 290 |
| 6.7 | Задачи за вежбање .....   | 130 | 295 |



Сојуз на математичари на Македонија  
www.smm.org.mk  
sojuz.na.matematicari@gmail.com

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$x^4 - 2x^3 + 1x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$\sqrt[5]{2^{n-1}} \leq 2\sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$