Дополнително тестирање за избор на
државен првак за шесто одделение
за учебната 2022/2023 година

ЗАДАЧИ

Задача 1. Една група деца се состои од 2022 момчиња и 2023 девојчиња. Секое девојче познава точно 2021 момче. (Познанствата се симетрични: ако A го познава B, тогаш и B го познава A.) Докажете дека не е возможно секое момче да познава еднаков број девојчиња.

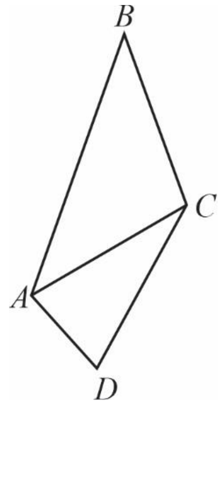
Задача 2. Природен број n е **суперпрост** доколку разликата меѓу секои два последователни позитивни делители на n е прост број. Определете ги сите суперпрости броеви.

Задача 3. Пет соученици Давид, Јан, Михаил, Петар и Марко летуваат во Охрид, Битола, Маврово, Струга и Дојран. Секој од нив има и хоби: пливање, возење велосипед, брзо одење, нуркање и едрење. Откриј кој од нив летува во кој град и кое хоби го има, ако е познато следното:

- Давид вози велосипед, ама не во Охрид, Струга и Дојран
- Јан не летува во Дојран
- Михаил не летува во Струга и не сака брзо одење
- Марко нурка цело лето
- Онај кој летува во Битола цело лето брзо оди
- Петар не летува во Охрид, Струга и Маврово. Не сака брзо одење и пливање.

Задача 4. На тестот по Природни науки поставени се 35 прашања. За секое прашање се понудени четири одговори, од кои само еден е точен. Одговорите треба да се заокружат. За секој точен одговор се добива по 5 поени, за неточен одговор се одземаат 2 поени, а за неодговорено прашање се одзема 1 поен. Ана, Марија, Марко, Иво и Петар тврдат дека освоиле 153, 167, 149, 169 и 173 поени соодветно. Кој од нив ја зборува вистината?

Задача 5. Во четириаголникот $ABCD$ важи $\measuredangle CAD + \measuredangle BCA = 180^0$ и $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AD}$, како на цртежот. Докажи дека $\measuredangle BAC + \measuredangle ACD = \measuredangle CDA$.



Секоја точно решена задача се вреднува со по 20 поени
Време за работа 4 саати и 30 минути

РЕШЕНИЈА

Задача 1. Во една група деца има 2022 момчиња и 2023 девојчиња. Секое девојче познава по точно 2021 момчиња. Познанството е симетрична врска, ако A го познава B, тогаш и B го познава A. Докажи дека не е возможно секое момче да познава еднаков број девојчиња.

Решение. Да приметиме дека вкупниот број на познанства е $2023 \cdot 2021$, затоа што секое девојче познава по точно 2021 момчиња. Ако секое момче познава еднаков број на девојчиња, на пример d, тогаш познанствата можат да се бројат и во однос на момчињата, што значи дека вкупно имаме $2022 \cdot d$. Тоа би значело дека $2023 \cdot 2021 = 2022 \cdot d$, што е контрадикција, бидејќи левата страна е непарна, додека десната страна е парна. Заклучуваме дека не е возможно секое момче да познава еднаков број девојчиња.

Задача 2. Природен број n е суперпрост ако разликата помеѓу секои две последователни позитивни делители на n е прост број. Определи ги сите суперпрости броеви.

Решение. Решение се броевите $n = 1$ и $n = 3$.

Ќе докажеме дека нема други решенија. Нека $n \geq 2$ е суперпрост број. Нека d е најмалиот природен делител на n кој е различен од 1. Ако d не е прост, тогаш $d = ab$, каде $1 < a < d$. Но, тогаш a е делител на n кој е различен од 1, и е строго помал од d,но тоа не е возможно заради минималноста на d. Следува дека $d = p$ за некој прост број p.

Тогаш 1 и p се последователни делители на n, па $p - 1 = q$ за некој прост број q, или $p = q + 1$. Ако $q \geq 3$, тогаш q мора да биде непарен број, па p е парен број поголем од 2, што значи не е прост број, а тоа е контрадикција. Следува $q = 2$ и $p = 3$. Бидејќи p е најмалиот делител на n различен од 1, бројот $\frac{n}{3}$ е втор најголем делител на n, што значи дека $n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$ мора да е прост број, да го означиме со r. Ова значи дека $2n = 3r$. Но, r прост број, па мора $r = 2$ и $n = 3$.

Од горната дискусија, заклучуваме дека $n = 1$ или $n = 3$. Со директна проверка, забележуваме дека овие два броја го задоволуваат условот на задачата.

Задача 3. Пет соученици Давид, Јан, Михаил, Петар и Марко летуваат во Охрид, Битола, Маврово, Струга и Дојран. Секој од нив има и хоби: пливање, возење велосипед, брзо одење, нуркање и едрење. Откриј кој од нив летува во кој град и кое хоби го има, ако е познато следното:

- Давид вози велосипед, ама не во Охрид, Струга и Дојран
- Јан не летува во Дојран
- Михаил не летува во Струга и не сака брзо одење
- Марко нурка цело лето
- Онај кој летува во Битола цело лето брзо оди
- Петар не летува во Охрид, Струга и Маврово. Не сака брзо одење и пливање.

Решение:

	Охрид	Битола	Маврово	Струга	Дојран	пливање	едрење	одење	нуркање	велосипед
Давид	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+
Марко	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-
Јан	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-
Михаил	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-
Петар	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-
пливање	+	-	-	-	-					
едрење	-	-	-	-	+					
одење	-	+	-	-	-					
нуркање	-	-	-	+	-					
велосипед	-	-	+	-	-					

Давид вози велосипед во Маврово, Петар едри во Дојран, Јан брзо оди во Битола, Михаил плива во Охрид и Марко нурка во Струга.

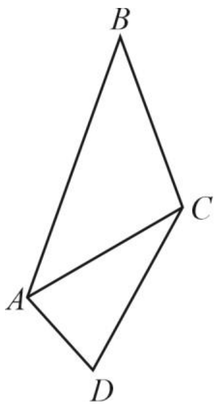
Задача 4. На тестот по Природни науки поставени се 35 прашања. За секое прашање се понудени четири одговори, од кои само еден е точен. Одговорите треба да се заокружат. За секој точен одговор се добива по 5 поени, за неточен одговор се одземаат 2 поени, а за неодговорено прашање се одзема 1 поен. Ана, Марија, Марко, Иво и Петар тврдат дека освоиле 153, 167, 149, 169 и 173 поени соодветно. Кој од нив ја зборува вистината?

Решение:

Со t ќе ги означиме точните одговори, со n неточните одговори, а со m неодговорените прашања

- 35 точни одговори $\Leftrightarrow$ $35 \cdot 5 = 175$ поени
-
- 34 точни одговори $\Leftrightarrow \begin{cases} 34t + n = 34 \cdot 5 - 2 = 168 \\ 34t + m = 34 \cdot 5 - 1 = 169 \end{cases}$
-
- 33 точни одговори $\Leftrightarrow \begin{cases} 33t + 2n = 33 \cdot 5 - 4 = 161 \\ 33t + n + m = 33 \cdot 5 - 2 - 1 = 162 \\ 33t + 2m = 33 \cdot 5 - 2 = 163 \end{cases}$
- 32 точни одговори $\Leftrightarrow \begin{cases} 32t + 3n = 32 \cdot 5 - 6 = 154 \\ 32t + 2n + m = 32 \cdot 5 - 4 - 1 = 155 \\ 32t + n + 2m = 32 \cdot 5 - 2 - 2 = 156 \\ 32t + 3m = 32 \cdot 5 - 3 = 157 \end{cases}$
- 31 точен одговор $\Leftrightarrow \begin{cases} 31t + 4n = 31 \cdot 5 - 8 = 147 \\ 31t + 3n + m = 31 \cdot 5 - 6 - 1 = 148 \\ 31t + 2n + 2m = 31 \cdot 5 - 4 - 2 = 149 \\ 31t + n + 3m = 31 \cdot 5 - 2 - 3 = 150 \\ 31t + 4m = 31 \cdot 5 - 4 = 151 \end{cases}$

Вистината ја кажувале Марко и Иво



Задача 5. Во четириаголникот $ABCD$ важи $\measuredangle CAD + \measuredangle BCA = 180^0$ и $\overline{AB} = \overline{BC} + \overline{AD}$, како на цртежот. Докажи дека $\measuredangle BAC + \measuredangle ACD = \measuredangle CDA$.

Решение. Нека $\overline{AD} = x, \overline{BC} = y$, $\measuredangle CAD = \alpha, \measuredangle ACB = \beta, \measuredangle ADC = \gamma, \measuredangle BAC = \delta$ и $\measuredangle ACD = \varphi$. Тогаш $\alpha + \beta = 180^0$ и $\overline{AB} = x + y$.

Ако го „отсечеме“ ΔACD и го поставиме така што α е „надоврзан“ на β , тогаш темињата A и C си ги менуваат местата, D добива нова позиција т.е. E и од $\alpha + \beta = 180^0$ следува дека B, C и E се колинеарни точки. Добиениот ΔABE е рамнокрак, од каде следува дека $\delta + \varphi = \gamma$.