ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2023

Ден 1

Сабота, 20. Мај 2023

Задача 1. За секој цел број $n > 1$, нека $s(n)$ е најмалиот прост делител на n, а $d(n)$ е бројот на позитивни делители на n. Дали постојат 2022 позитивни цели броеви $a_1, a_2, ..., a_{2022}$ со $a_1 < a_2 - 1 < ... < a_{2022} - 2021$ такви што за секој $k = 1, ..., 2021$ важи $d(a_{k+1} - a_k - 1) > 2022^k$ и $s(a_{k+1} - a_k) > 2022^k$?

Задача 2. Нека ABC е остроаголен триаголник со $AB < AC$ и $AB < BC$. На отсечката BC избрана е точка P таква што $\angle APB = \angle BAC$. Тангентата на опишаната кружница на $\triangle ABC$ повлечена во A ја сече опишаната кружница на $\triangle APB$ во точка $Q \neq A$. Нека Q' е симетрична на Q во однос на средината на AB. Правата PQ ја сече отсечката AQ' во S. Докажете дека

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} > \frac{1}{CS}.$$

Задача 3. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е монотоно растечка функција на множеството од природни броеви, таква што $f(f(n)) = n^2$. Која е најмалата, а која најголемата можна вредност на $f(2023)$?

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2023

Ден 2

Недела, 21. Мај 2023

Задача 4. Функција $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ја има следната особина: Ако $A,B,C\in\mathbb{R}^2$ се темиња на рамностран триаголник со страна 1, тогаш

$$f(A)+f(B)+f(C)=0.$$

Докажете дека $f(x)=0$ за секој $x\in\mathbb{R}^2$.

Задача 5. Нека $Q(x)=a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\cdots+a_1x+a_0$ е полином со целобројни коефициенти. За секој непарен прост број p дефинираме полином $Q_p(x)=a_{2023}^{p-2}x^{2023}+a_{2022}^{p-2}x^{2022}+\cdots+a_1^{p-2}x+a_0^{p-2}$. Познато е дека за бесконечно многу непарни прости броеви p изразот

$$\frac{Q_p(x)-Q(x)}{p}$$

е цел број за секој $x\in\mathbb{Z}$. Одредете ја најголемата можна вредност на $Q(2023)$.

Задача 6. На Среќко и Малер им е даден по еден лист хартија на кој има 2023 точки распоредени како темиња на правилен многуаголник. Потоа им е дадена задача да ги обојат сите отсечки кои ги поврзуваат овие точки (секој на својот лист) така што:

(1^0) Нема триаголник со темиња меѓу овие точки чии страни се обоени во иста боја.
(2^0) Нема триаголник со темиња меѓу овие точки чии страни се обоени во три различни бои.
(3^0) Нема четириаголник со темиња меѓу овие точки (не мора конвексен) чии страни се обоени во иста боја.

После боењето е забележано дека Малер употребил барем две бои повеќе отколку Среќко. Колку бои употребил секој од нив? (Образложете го одговорот).

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.