ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2023

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. За секој цел број $n > 1$, нека $s(n)$ е најмалиот прост делител на n, а $d(n)$ е бројот на позитивни делители на n. Дали постојат 2022 позитивни цели броеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ со $a_1 < a_2 - 1 < \ldots < a_{2022} - 2021$ такви што за секој $k = 1, \ldots, 2021$ важи $d(a_{k+1} - a_k - 1) > 2022^k$ и $s(a_{k+1} - a_k) > 2022^k$?

Решение. Одговорот е: Да.
Нека $a_k = k \cdot (2023^{2023})! + k$ за $k = 1, \ldots, 2023$. **(3п)** Да забележиме дека $a_{k+1} - a_k - 1 = (2023^{2023})!$, па оттаму $d(2023^{2023}!) > 2023^{2023} > 2023^k$ за $k = 1, \ldots, 2022$. **(2п)** Исто така, важи $s(a_{k+1} - a_k) = s((2023^{2023})! + 1) > 2023^{2023} > 2023^k$; имено, ако прост број p е делител на $n! + 1$, тогаш мора да важи $p > n$ (во спротивно $p|n!$, што не е возможно). **(2п)** $\square$

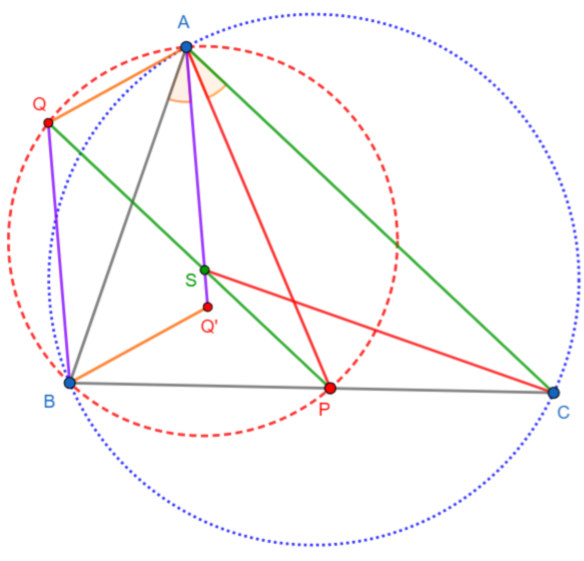
2. Нека ABC е остроаголен триаголник со $AB < AC$ и $AB < BC$. На отсечката BC избрана е точка P таква што $\angle APB = \angle BAC$. Тангентата на опишаната кружница на $\triangle ABC$ повлечена во A ја сече опишаната кружница на $\triangle APB$ во точка $Q \neq A$. Нека Q' е симетрична на Q во однос на средината на AB. Правата PQ ја сече отсечката AQ' во S. Докажете дека

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} > \frac{1}{CS}.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека $PQ \parallel AC$. Правата AQ е тангента на $\odot ABC$ во A, па $\angle BAQ = \angle ACB$. Исто така имаме $\angle AQP = \angle ABP = \angle ABC$. Оттука заклучуваме дека

$$\angle AQP + \angle QAC = \angle ABC + \angle QAB + \angle BAC = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

па добиваме $PQ \parallel AC$, што и требаше да се докаже.



Исто така имаме $\angle ACP = \angle ACB = \angle BAQ = \angle ABQ'$, бидејќи $AQ \parallel BQ'$. Да забележиме и дека $\angle APC = \angle AQB = \angle AQ'B$, па $\triangle AQ'B$ е сличен со $\triangle APC$. Тоа значи дека $\angle BAQ' = \angle CAP$, што повлекува $\angle BAP = \angle CAS$. Имаме и

$$\angle BAP = 180^\circ - \angle ABC - \angle APB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = \angle ACB.$$

Заклучуваме дека $\angle CAS = \angle BAP = \angle ACP$. Заедно со $PS \parallel AC$, добиваме дека $ASPC$ е рамнокрак трапез. Тоа значи и дека $CS = AP$. **(3п)**

Нека $AP = x$, $BC = a$, $AC = b$ и $BC = c$. Користејќи ја сличноста на $\triangle AQ'B$ со $\triangle APC$ добиваме

$$\frac{b}{c} = \frac{AP}{AQ'} = \frac{AP}{BQ},$$

затоа што $BQ = AQ'$. Од синусната теорема за $\triangle AQB$ добиваме

$$\frac{BQ}{\sin\angle BAQ} = \frac{c}{\sin\angle AQB} \iff \frac{BQ}{\sin\angle ACB} = \frac{c}{\sin\angle BAC}.$$

Ако сега ја примениме синусната теорема и на $\triangle ABC$, добиваме

$$BQ = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle BAC}\cdot c = \frac{c}{a}\cdot c = \frac{c^2}{a}.$$

Исто така имаме и

$$x = AP = \frac{b}{c}\cdot BQ = \frac{b}{c}\cdot\frac{c^2}{a} = \frac{bc}{a}.\ \textbf{(2п)}$$

Така заклучуваме дека

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} = \frac{b+c}{bc} > \frac{a}{bc} = \frac{1}{x} = \frac{1}{AP} = \frac{1}{CS}.\ \textbf{(2п)}$$

□

3. Нека $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е монотоно растечка функција на множеството од природни броеви, таква што $f(f(n)) = n^2$. Која е најмалата, а која најголемата можна вредност на $f(2023)$?

Решение. Бидејќи $f(f(1)) = 1$, ако $f(1) > 1$ добиваме $f(f(1)) = 1 < f(1)$. Ова е контрадикторно на монотоноста на функцијата, па $f(1) = 1$. Од $f(f(2)) = 4$, добиваме $4 > f(2) > 2$, од каде мора $f(2) = 3$ и $f(3) = 4$. Оттука следуваат $f(4) = f(f(3)) = 9, f(9) = f(f(4)) = 16$ и $f(16) = f(f(9)) = 81$.

Од $f(a) = f(b)$ следува дека $a^2 = f(f(a)) = f(f(b)) = b^2$, па f е инјективна. Ова во комбинација со монотоноста ни го дава неравенството $f(x+a) - f(x) \geq a$ за секои природни броеви a и x.**(2п)**

Оттука добиваме дека $f(f(f(44)))+87 = f(1936)+87 \leq f(2023) \leq f(2025)-2 = f(f(f(45)))-2$. Од исти причини важат

$$f(f(f(6))) + 8 = f(36) + 8 \leq f(44) < f(45) \leq f(49) - 4 = f(f(f(7))) - 4$$

и

$$11 = f(4) + 2 \leq f(6) < f(7) \leq f(9) - 2 = 14.$$

Од овие неравенства имаме:

$$f(2023) \geq f(44)^2 + 87 \geq (11^2 + 8)^2 + 87 = 129^2 + 87 = m \quad \textbf{(1п)}$$

$$f(2023) \leq f(45)^2 - 2 \leq (14^2 - 4)^2 - 2 = 192^2 - 2 = M. \quad \textbf{(1п)}$$

Останува да докажеме дека овие вредности можат да се достигнат. Ги дефинираме функциите рекурзивно $f_1(1) = f_2(1) = 1$, $f_1(2) = f_2(2) = 3$, $f_1(3) = f_2(3) = 4$ за $a \geq 2$ и $0 \leq b < f_1(a+1) - f_1(a)$ дефинираме $f_1(f_1(a)+b) = a^2 + b$ и за $a \geq 2$ и $0 < b \leq f_2(a+1) - f_2(a)$ дефинираме $f_2(f_2(a+1) - b) = (a+1)^2 - b$.

Забележуваме дека

$$f_1(f_1(a) + b + 1) - f_1(f_1(a) + b) = (b+1) - b = 1$$

за секое $0 < b < f_1(a+1) - f_1(a) - 1$ и

$$f_1(f_1(a+1)) - f_1(f_1(a)) = (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1.$$

Освен тоа $f_1(a+1) - f_1(a) = 1$, ако $a+1$ не е во $f_1(\mathbb{N})$, а ако $a+1 = f_1(u)$:

$$f_1(a+1) - f_1(a) = f_1(f_1(u)) - f_1(f_1(u) - 1) < f_1(f_1(u)) - f_1(f_1(u-1)) = 2u - 1 < 2a + 1.$$

Сега од $f_1(f_1(a+1)) - f_1(f_1(a)) > f_1(a+1) - f_1(a)$ следува $f_1(f_1(a+1)) - f_1(f_1(a+1) - 1) > 1$, што со индукција ни ја дава монотоноста на f_1. Сличен е и доказот за f_2.

Да провериме дали овие функции го задоволуваат даденото равенство. Од дефиницијата имаме $f_1(f_1(1)) = 1^2$ и $f_1(f_1(2)) = f_1(3) = 4 = 2^2$. За $b = 0$ добиваме $f_1(f_1(a)) = a^2$ и $f_2(f_2(a+1)) = (a+1)^2$, што е даденото равенство.

Сега $f_1(6) = f_1(f_1(3) + 2) = 11$, $f_1(11) = 6^2 = 36$, $f_1(7) = f_1(f_1(3) + 3) = 12$, $f_1(12) = 7^2 = 49$. Според ова 44 не е слика на ниту еден број, па $f_1(44) = f_1(f_1(11) + 8) = 11^2 + 8 = 129$ и $f_1(2023) = f_1(f_1(129) + 87) = 129^2 + 87 = m$.

Исто така $f_2(6) = f_2(f_2(4) - 3) = 11$, $f_2(11) = 6^2 = 36$, $f_2(7) = f_2(f_2(4) - 2) = 14$, $f_2(14) = 7^2 = 49$. Според ова 45 не е слика на ниту еден број, па $f_2(45) = f_2(f_2(14) - 4) = 14^2 - 4 = 192$ и $f_2(2023) = f_2(f_2(192) - 2) = 192^2 - 2 = M$.

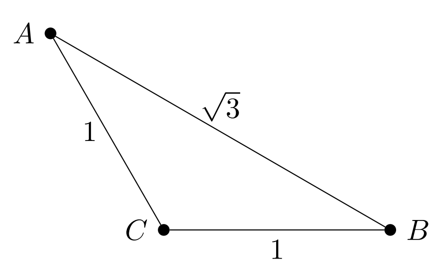
Со ова докажавме дека најмалата и најголемата можна вредност на $f(2023)$ се m и M соодветно. **(3п)** $\square$

4. Функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ја има следната особина: Ако $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ се темиња на рамностран триаголник со страна 1, тогаш

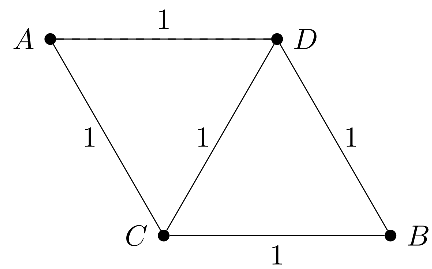
$$f(A) + f(B) + f(C) = 0.$$

Докажете дека $f(x) = 0$ за секој $x \in \mathbb{R}^2$.

Решение. Прво ќе докажеме дека ако A и B се точки во $\mathbb{R}^2$ на растојание $\sqrt{3}$, тогаш $f(A) = f(B)$. **(1п)** Избираме точка $C \in \mathbb{R}^2$ таква што A, B и C се темиња на триаголник со страни 1, 1 и $\sqrt{3}$ (видете ја долната слика).

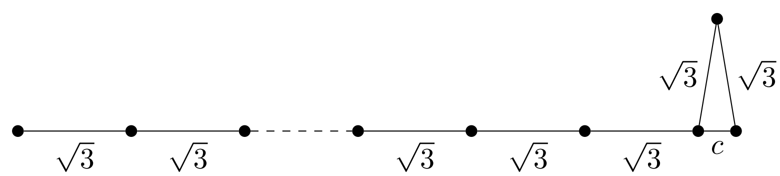


Од косинусната теорема добиваме дека $\angle ACB = 120°$. Го преполовуваме аголот $\angle ACB$ и избираме точка $D \in \mathbb{R}^2$ како што е прикажано на следната слика. **(2п)**



Следува дека $f(A)+f(D)+f(C)=0$ и $f(B)+f(D)+f(C)=0$, па $f(A)=f(B)$, што и саквме да докажеме. **(1п)**

Сега нека A и B се произволни точки во $\mathbb{R}^2$. Нека a е растојанието помеѓу A и B. Нека $a=n\sqrt{3}+c$, каде што n е ненегативен цел број и $0\le c<\sqrt{3}$. Следната слика покажува дека $f(A)=f(B)$. **(3п)**



Заклучуваме дека f е константна, па мора да важи $f(x)=0$ за секое $x\in\mathbb{R}^2$. □

5. Нека $Q(x)=a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+\cdots+a_1x+a_0$ е полином со целобројни коефициенти. За секој непарен прост број p дефинираме полином $Q_p(x)=a_{2023}^{p-2}x^{2023}+a_{2022}^{p-2}x^{2022}+\cdots+a_1^{p-2}x+a_0^{p-2}$. Познато е дека за бесконечно многу непарни прости броеви p изразот

$$\frac{Q_p(x)-Q(x)}{p}$$

е цел број за секој $x\in\mathbb{Z}$. Одредете ја најголемата можна вредност на $Q(2023)$.

Решение. Ќе користиме добро позната лема дека за полином $S(x)\in\mathbb{Z}[x]$ и фиксен прост број p, сите коефициенти на S се деливи со p ако и само ако $p|S(x)$ за сите $x\in\mathbb{Z}$. Впрочем, ова следува од малата Безуова Теорема по модул p. Сега да фиксираме прост број $p>2$ таков што

$$\frac{Q_p(x)-Q(x)}{p}$$

е цел број за сите $x\in\mathbb{Z}$. Па ја применуваме лемата на полиномот $S(x)=Q_p(x)-Q(x)$. Заклучуваме дека

$$p|a_i^{p-2}-a_i \quad \textbf{(1п)}$$

за сите $0\le i\le 2021$. Од Малата теорема на Ферма имаме дека $p|a_i^p-a_i$. Сега да забележиме дека

$$p|a_i^3-a_i=(a_i^p-a_i)-a_i^2(a_i^{p-2}-a_i).$$

Користејќи го ова, заклучуваме од условот на задачата дека за фиксно $0\le i\le 2023$ постојат бесконечно многу прости p такви што:

$$p|a_i(a_i-1)(a_i+1).$$

Ова значи дека постојат бесконечно многу прости кои делат барем еден од a_i-1, a_i и a_i+1, па барем еден од нив е еднаков на нула. Заклучуваме дека сите коефициенти на $Q(x)$ се елементи на множеството $\{-1,0,1\}$. **(2п)**

Оттука, го имаме неравенството

$$Q(2023) \leq |Q(2023)| \leq |a_{2023}| \cdot 2023^{2023} + \cdots + |a_1| \cdot 2023 + |a_0| \leq$$

$$\leq 2023^{2023} + \ldots + 2023 + 1 = \frac{2023^{2024} - 1}{2022}. \quad \textbf{(2п)}$$

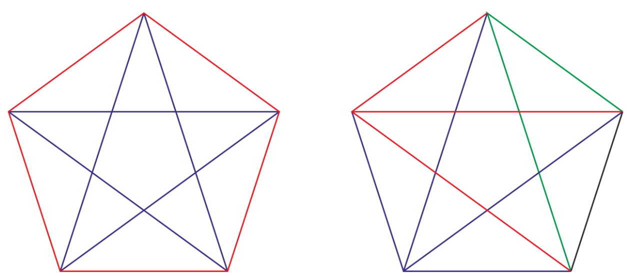
Равенство се постигнува за полиномот $Q(x) = x^{2023} + \ldots + x + 1$, кој јасно го задоволува условот на задачата бидејќи за сите прости броеви $p > 2$, полиномите $Q_p(x)$ и $Q(x)$ се исти. Затоа, добиената горна граница е најголемата можна вредност за $Q(2023)$. **(2п)** □

6. На Срećко и Малер им е даден по еден лист хартија на кој има 2023 точки распоредени како темиња на правилен многуаголник. Потоа им е дадена задача да ги обојат сите отсечки кои ги поврзуваат овие точки (секој на својот лист) така што:

(1^0) Нема триаголник со темиња меѓу овие точки чии страни се обоени во иста боја.
(2^0) Нема триаголник со темиња меѓу овие точки чии страни се обоени во три различни бои.
(3^0) Нема четириаголник со темиња меѓу овие точки (не мора конвексен) чии страни се обоени во иста боја.

После боењето е забележано дека Малер употребил барем две бои повеќе отколку Срећко. Колку бои употебил секој од нив? Образложи го одговорот.

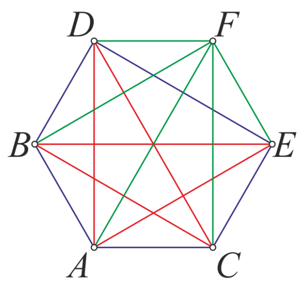
Решение. За боење на отсечките кои поврзуваат n точки велиме дека е *добро* ако ги задоволува условите (1^0), (2^0) и (3^0) при што сите отсечки меѓу n-те точки се обоени. Нека $m(n)$ е најмалиот, а $l(n)$ е најголемиот број на бои за кои постои добро обојување во случајот за n точки. Ќе докажеме дека за $n \geq 5$, $m(n) = n - 1$ и $l(n) = n - 3$.

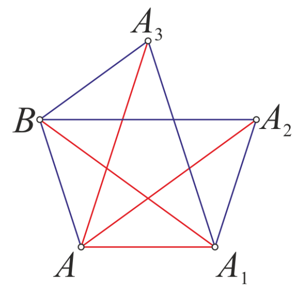


На сликата се прикажани боења со 2 и со 4 бои за случајот $n = 5$. Ако нова точка поврземе со секоја од постоечките со иста нова боја добиваме добро обојување. Навистина секој триаголник/четириаголник кој ја има за теме новата точка има точно две страни во новата боја и 1/2 страни во стари бои, па условите се исполнети. Со продолжување на постапката на додавање на нови точки и бои индуктивно добиваме боења со $n - 3$ и $n - 1$ бои соодветно. Од ова ќе следува дека Срећко употребил 2020 бои, а Малер употребил 2022 бои. **(1п)**
Очигледно во случајот $n = 1$ нема отсечки, па употребуваме 0 бои, а за $n = 2$ има една отсечка, па боењето единствено може да се направи со 1 боја. Од дефиницијата за боење на страните на секој триаголник мора да се употребат точно 2 бои. Според ова $m(1) = l(1) = 0$, $m(2) = l(2) = 1$ и $m(3) = l(3) = 2$.
Да претпоставиме дека $m(k) = k - 1$ за секој $k < n$. Во случајот со n точки нека A е една од точките и меѓу отсечките со една крајна точка A има отсечки во точно s различни бои. Да ги обележиме тие бои со c_1, $c_2, \ldots, c_s$, а отсечките кои се обоени со c_i ги означуваме со $\overline{AA_i^1}$, $\overline{AA_i^2}, \ldots, \overline{AA_i^{d_i}}$. Бидејќи вкупно има точно $n - 1$ ваква отсечка со крајна точка A добиваме

$$\sum_{i=1}^{s} d_i = n - 1. \tag{1}$$

Бидејќи $\triangle AA_i^uA_j^v$ за $i \neq j$ мора да има отсечки обоени во точно 2 бои, а отсечките $\overline{AA_i^u}$ и $\overline{AA_j^v}$ се обоени со c_i и c_j соодветно, третата страна $\overline{A_i^uA_j^v}$ мора да е обоена со c_i или c_j. Ова значи дека сите отсечки кои поврзуваат темиња од различни групи се обоени со некоја од боите $c_1, c_2, \ldots, c_s$. Разгледуваме сега една од групите темиња: $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{d_i}$. Има d_i точки, па од $1 \leq d_i < n$ според индукциската претпоставка отсечките кои ги поврзуваат се обоени во најмногу $d_i - 1$ боја. Истото важи за секоја група, па со замена во (1) добиваме дека вкупниот број на бои е најмногу $s + \sum_{i=1}^{s}(d_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} d_i = n - 1$, со што докажавме дека $m(n) = n - 1$. **(2п)**
За $l(n)$ важат $l(4) = 2$ и $l(5) = 2$, бидејќи во спротивно секој триаголник ќе има страни обоени во една боја. Да претпоставиме дека $l(n-1) = l(n) = n - 4$, за некој $n > 5$. Одбираме t да биде максималниот број на отсечки обоени во иста боја кои имаат заедничка крајна точка. Бидејќи имаме вкупно $n - 4$ бои и $n - 1$ отсечка за секоја точка, t мора да биде најмалку 2. Освен тоа или $t \geq 3$ или постојат најмалку 3 бои со по 2 отсечки со заедничка крајна точка.
Ако $t = 2$, нека отсечките $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ се обоени сино (полна линија), $\overline{AD}$ и $\overline{AE}$ се црвени (испрекината линија) и $\overline{AF}$ е зелена (линија со точки). Отсечките кои ги поврзуваат B и C со D и E мора да бидат црвени или сини. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $\overline{BD}$ е сина. Бидејќи $t = 2$, $\overline{BE}$ не е сина, па мора да е црвена. Слично $\overline{EC}$ мора да е сина и $\overline{CD}$ е црвена (цртеж долу - лево). Од $\triangle BDE$ знаеме дека $\overline{DE}$ мора да биде сина или црвена, а од $\triangle ADE$ не може да е црвена, па $\overline{DE}$ е сина и на ист начин добиваме дека $\overline{BC}$ е црвена. Сите отсечки меѓу F и овие пет точки се сини, црвени или зелени. Но, бидејќи $t = 2$ не можат да бидат сини, ниту црвени, па мора да се зелени, но тогаш $t \geq 5$, што е контрадикција. **(2п)**





Ако $n - 1 > t \geq 3$, нека $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \ldots, \overline{AA_t}$ се максимален број на отсечки обоени во иста боја, нека таа боја е црвена (испрекината линија) и нека $\overline{AB}$ е отсечка обоена во друга боја, на пример сина (полна линија). За отсечките кои ја поврзуваат B со A_i имаме две можности за нивната боја (црвена и сина). Нека една од нив ($\overline{BA_1}$) е црвена. Ако $\overline{BA_i}$ за $i > 1$ е црвена имаме четириаголник AA_1BA_i на кој сите страни му се обоени црвено, што е спротивно на (3^0). Според ова сите отсечки $\overline{BA_i}$ за $i > 1$ се сини. Во овој случај секоја од отсечките $\overline{A_1A_i}$ мора да биде сина или црвена ($\overline{BA_1}$ е црвена, а $\overline{BA_i}$ е сина). Но, од $\triangle AA_iA_j$ не можат да бидат црвени, па се сини како на цртежот погоре (десно). Бидејќи $t \geq 3$ имаме четириаголник $BA_2A_1A_3$ на кој сите страни му се обоени сино, што е контрадикција.
Според ова секоја од отсечките $\overline{BA_i}$ е обоена сино, па има $t + 1$ сини отсечки со заедничка крајна точка B. Ова противречи на максималноста на t, па $t = n - 1$ и постои точка A за која сите отсечки со крајна точка A се во иста боја, на пример сина. Од (1^0) следува дека останатите отсечки не можат да бидат сини, па добиваме дека $l(n-1) \leq n - 5$, што е спротивно на индукциската претпоставка. Заклучуваме дека $l(n) = n - 3$. **(2п)** □