СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

30. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Недела, 9. Април 2023

Задача 1. Определете ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за сите $x, y \in \mathbb{R}$ важи:

$$xf(x+y) + yf(y-x) = f(x^2+y^2)\,.$$

Задача 2. Нека p и q се непарни прости броеви и нека a е природен број таков што $p|a^q+1$ и $q|a^p+1$. Докажете дека $p|a+1$ или $q|a+1$.

Задача 3. Во градот на џуџињата има 1000 идентични згради, од кои секоја има 1000 ката, при што точно едно џуџе живее на секој кат. Секој жител во градот носи капа обоена во една од 1000 можни бои и било кои два станари на иста зграда имаат различно обоени капи. За две џуџиња велиме дека се *пријатели* доколку носат капи во иста боја, и живеат на последователни катови (во различни згради). Одредете го најголемиот можен број на (неподредени) парови џуџиња кои се пријатели.

Задача 4. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамнокрак. Нека H е ортоцентар на $\triangle ABC$. Кружницата со центар во A и радиус AH ја сече опишаната кружница околу $\triangle BHC$ во точка $T_a \neq H$. Точките T_b и T_c се дефинирани аналогно. Докажете дека H лежи на опишаната кружница околу $\triangle T_aT_bT_c$.

Задача 5. Околу тркалезна маса седат n момчиња и n девојчиња, при што $n > 3$. Во секој чекор, две соседни деца може да си ги заменат местата. Под *ентропија* на дадена конфигурација (распоред на седење) се подразбира најмалиот можен број на чекори после што секое дете има барем еден сосед од својот пол. Најдете ја најголемата можна ентропија помеѓу сите конфигурации.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 8 поени.