ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2023

Сабота, 22. Април 2023

Задача 1. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни реални броеви таква што $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $\frac{a_{n+1}^4}{a_n^3} = 2a_{n+2} - a_{n+1}$. Докажете дека за секој природен број $N > 1$ важи неравенството

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < 3.$$

Задача 2. На еден шаховски турнир, секои двајца учесници играле меѓусебно најмногу еднаш. Притоа, за секои двајца од нив, A и B, кои не играле меѓусебе на турнирот, точно двајца други учесници, C и D, играле и против A и против B во текот на турнирот. Никои 4 учесници не одиграле точно 5 партии меѓусебно. Докажете дека секој учесник одиграл подеднаков број партии на турнирот.

Задача 3. Нека ABC е триаголник таков што $AB < AC$. Точката D е избрана на отсечката BC, така што $BD < CD$. Симетралите на $\angle ADB$ и $\angle ADC$ ги сечат отсечките AB и AC во E и F, соодветно. Нека ω е опишаната кружница околу $\triangle AEF$ и нека M е средина на EF. Полуправата AD ја сече кружницата ω во X, додека правата што минува низ X паралелна со EF повторно ја сече ω во Y. Ако YM ја сече ω во T, докажете дека AT, EF и BC се конкурентни.

Задача 4. Нека f е ненулта функција од множеството позитивни цели броеви во множеството ненегативни цели броеви таква што за сите позитивни цели броеви a и b важи

$$2f(ab) = (b+1)f(a) + (a+1)f(b).$$

Докажете дека за секој прост број p постои прост број q и позитивни цели броеви x_1, ..., x_n, како и цел број $m \geq 0$, такви што

$$\frac{f(q^p)}{f(q)} = (px_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (px_n + 1) \cdot p^m,$$

при што сите броеви $px_1 + 1$,..., $px_n + 1$ се прости.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.