ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА БМО 2023

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од позитивни реални броеви таква што $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $\frac{a_{n+1}^4}{a_n^3} = 2a_{n+2} - a_{n+1}$. Докажете дека за секој природен број $N > 1$ важи

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < 3.$$

Решение 1. Ќе ја презапишеме релацијата во следниот облик:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^3 = 2 \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - 1.$$

Дефинираме нова низа $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ со $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ за $n \geq 1$. Важи $x_1 = \frac{a_2}{a_1} = 2$ и

$$x_n^3 = 2x_{n+1} - 1 \iff x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n^3 + 1). \quad \textbf{(2п)}$$

Горната рекурзија може да се запише како

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x_n^3 - 1) \iff \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} = \frac{1}{2} \cdot (x_n^2 + x_n + 1).$$

Со множење на равенките за $k = 1, 2, \ldots, n$ и користејќи дека $x_1 = 2$ добиваме

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n+1} - 1}{x_1 - 1} = \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} \cdot \frac{x_n - 1}{x_{n-1} - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_2 - 1}{x_1 - 1} = \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x_k^2 + x_k + 1). \quad \textbf{(3п)}$$

Го користиме очигледното неравенство $t^2 + t + 1 \geq 3t$, еквивалентно на $(t-1)^2 \geq 0$, и добиваме

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x_k^2 + x_k + 1) > \frac{3^n}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

Користејќи дека $x_k = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ за $k \geq 1$, горното неравенство е еквивалентно со:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \iff a_{n+2} > \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot a_{n+1}^2.$$

Случајот $n = 1$ се проверува директно, додека за секое $n \geq 1$ добиваме

$$a_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot a_n^2 \iff \frac{a_n^2}{a_{n+1}} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}. \quad \textbf{(3п)}$$

За фиксно $N > 1$ имаме

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N}{1 - \frac{2}{3}} < \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3. \quad \textbf{(2п)}$$

$\square$

Решение 2. Од дадената релација добиваме дека

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^4}{2a_n^3} + \frac{a_{n+1}}{2}. \quad \textbf{(2п)}$$

Следува дека низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е строго растечка. Оттаму, $a_n > 2$ за секое $n > 2$. По делење на последниот израз со a_{n+1}^2 добиваме:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}^2} = \frac{a_{n+1}^2}{2a_n^3} + \frac{1}{2a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^4}\left(\frac{a_n}{2}\right) + \frac{1}{2a_{n+1}} > \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2. \quad \textbf{(4п)}$$

Од $a_3 = \frac{a_2^4}{2a_1^3} + \frac{a_2}{2} = \frac{2^4}{2} + \frac{2}{2} = 9$, $\frac{a_1^2}{a_2} = \frac{1}{2}$ и $\frac{a_2^2}{a_3} = \frac{4}{9}$, добиваме дека за $i \geq 2$ важи:

$$\frac{a_i^2}{a_{i+1}} < \left(\frac{4}{9}\right)^{2^{i-2}} < \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}.$$

Следствено,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{a_{k+1}} < \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 1.3 < 3. \quad \textbf{(4п)}$$

□

2. На еден шаховски турнир, секои двајца учесници играле меѓусебно најмногу еднаш. Притоа, за секои двајца од нив, A и B, кои не играле меѓусебе на турнирот, точно двајца други учесници, C и D, играле и против A и против B во текот на турнирот. Никои 4 учесници не одиграле точно 5 партии меѓусебно. Докажете дека секој учесник одиграл подеднаков број партии на турнирот.

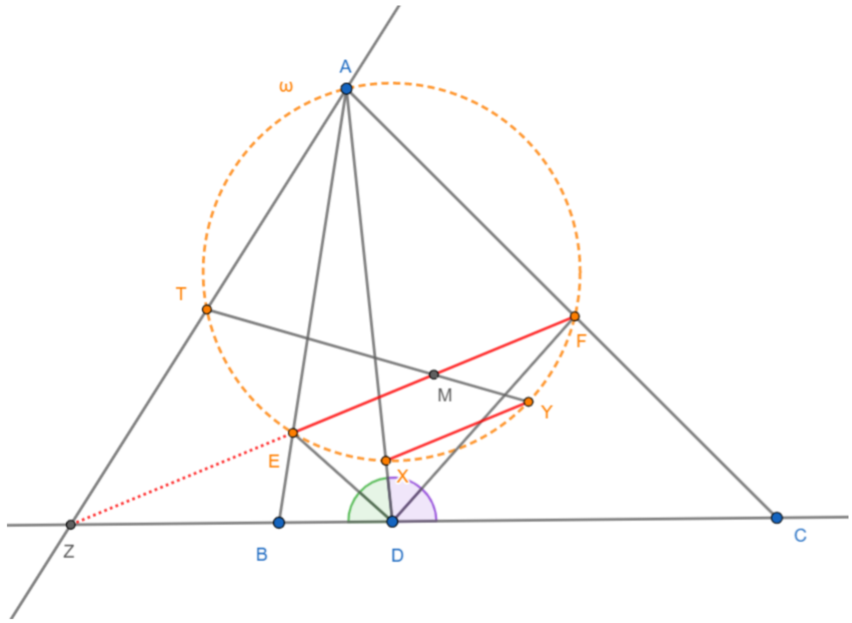
Решение. Нека G е едноставниот граф кој соодветствува на турнирот: темињата се учесниците а ребрата се одиграните партии. Согласно условот на задачата, секој пар несоседни темиња во G имаат точно два заеднички соседа, и ниту еден индуциран подграф од G има ред (број на темиња) 4 и големина (број на ребра) 5. Барањето е да се докаже дека G е регуларен. **(1п)**

Со оглед дека секои несоседни темиња имаат барем еден заеднички сосед, G е сврзан (всушност, неговиот дијаметар е најмногу 2). Оттаму доволно е да докажеме дека секои две соседни темиња u и v имаат еднакви степени, **(1п)** и ова ќе го докажеме воспоставувајќи биекција помеѓу множествата $S = N(u)\backslash N(v)$ и $T = N(v)\backslash N(u)$. **(1п)**

Нека $x \in S$. Бидејќи $x \nleftrightarrow v$, постои $y \in N(x) \cap N(v)$ со $y \neq u$. **(1п)** Имајќи го предвид индуцираниот подграф $G[\{u, v, x, y\}]$, кој ги содржи ребрата ux, uv, xy аи vy, несоседноста $x \nleftrightarrow v$ повлекува дека $u \nleftrightarrow y$. **(1п)** Значи $y \in T$. **(1п)** Притоа, бидејќи u и y ги имаат за заеднички соседи v и x, темето y не е можно да се генерира на овој начин тргнувајќи од друго теме x' од S. **(1п)** Значи $x \mapsto y$ дефинира инјекција од S во T. **(1п)** Заменувајќи ги улогите на v и u добиваме и инјекција од T во S. **(1п)** Со оглед дека овие две множества се конечни, добиените инјекции се всушност биекции, и оттука $\deg(u) = \deg(v)$. **(1п)** □

3. Нека ABC е триаголник таков што $AB < AC$. Точката D е избрана на отсечката BC, така што $BD < CD$. Симетралите на $\angle ADB$ и $\angle ADC$ ги сечат отсечките AB и AC во E и F, соодветно. Нека ω е опишаната кружница околу $\triangle AEF$ и нека M е средина на EF. Полуправата AD ја сече кружницата ω во X, додека правата што минува низ X паралелна со EF повторно ја сече ω во Y. Ако YM ја сече ω во T, докажете дека AT, EF и BC се конкурентни.

Решение. Ќе го поделиме доказот во неколку чекори.



Чекор 1: $TF \cdot EX = TE \cdot XF$.

Доказ: Нека E_1 и F_1 се проекциите од E и F на правата TY. Јасно е дека триаголникот $\triangle EME_1$ е складен со триаголникот $\triangle FMF_1$. Затоа важи

$$1 = \frac{EM}{FM} = \frac{EE_1}{FF_1} = \frac{\text{Area}(TEY)}{\text{Area}(TFY)} = \frac{TE \cdot EY \cdot \sin \angle TEY}{TF \cdot YF \cdot \sin \angle TFY} = \frac{TE \cdot XF}{TF \cdot EX}$$

користејќи дека $EX = YF$ и $EY = XF$, што е последица на фактот дека $EXYF$ е тетивен трапез. **(3п)**

Чекор 2: Правата AT ја сече BC во точката Zтаква што

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BZ}{CZ}.$$

Доказ: Ќе ги воведеме ознаките $\angle BAT = \alpha$, $\angle BAD = \beta$ и $\angle DAC = \gamma$. Ги имаме следните пресметки:

$$\frac{BD}{CD} : \frac{BZ}{CZ} = \frac{BD \cdot CZ}{CD \cdot BZ} = \frac{\text{Area}(BAD)}{\text{Area}(CAD)} \cdot \frac{\text{Area}(CAZ)}{\text{Area}(BAZ)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\beta}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\gamma} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot AZ \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AZ \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}.$$

Нека d е дијаметар на кружницата $\odot AEF$. Со примена на синусна теорема добиваме дека $TE = d \cdot \sin\alpha$, $EX = d \cdot \sin\beta$, $FX = d \cdot \sin\gamma$ и $TF = d \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Користејќи го Чекор 1 добиваме:

$$1 = \frac{TF \cdot EX}{TE \cdot XF} = \frac{d \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma) \cdot d \cdot \sin\beta}{d \cdot \sin\alpha \cdot d \cdot \sin\gamma} = \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$$

што го комплетира доказот на овој чекор. **(3п)**

Чекор 3: Точките E, F и Z се колинеарни.

Доказ: Користејќи ја теоремата за симетрала на агол за $\triangle ADB$ добиваме

$$\frac{BE}{AE} = \frac{BD}{AD}.$$

Слично, од теоремата за симетрала на агол за $\triangle ADC$ добиваме

$$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CD}.$$

Комбинирајќи со Чекор 2, имаме

$$\frac{BE}{AE} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{CZ}{BZ} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BD} = 1.$$

Заклучокот сега следува од теоремата на Менелај. **(4п)** □

4. Нека f е ненулта функција од множеството позитивни цели броеви во множеството ненегативни цели броеви таква што за сите позитивни цели броеви a и b важи

$$2f(ab) = (b+1)f(a) + (a+1)f(b).$$

Докажете дека за секој прост број p постои прост број q и позитивни цели броеви x_1, ..., x_n, како и цел број $m \geq 0$, такви што

$$\frac{f(q^p)}{f(q)} = (px_1+1) \cdot \ldots \cdot (px_n+1) \cdot p^m,$$

при што сите броеви px_1+1,..., px_n+1 се прости.

Решение. Лесно воочуваме дека $f(1) = 0$ ставајќи $a = b = 1$. Прво ќе докажеме дека $f(a) = 0$ и $f(b) = 0$ повлекува $f(ab) = 0$. Имено, доколку a и b се пресликуваат во нула, тогаш

$$(b+1)f(a) + (a+1)f(b) = (b+1) \cdot 0 + (a+1) \cdot 0 = 0. \quad \textbf{(1п)}$$

Нека p е даден прост број. Функцијата f не е идентично нула, па постои најмал природен број q таков што $f(q) \neq 0$. Ако q не е прост, тогаш $q = xy$ (бидејќи $f(1) = 0$), каде што $1 < x \leq y < q$. Меѓутоа, тоа би значело дека $f(x) = f(y) = 0$ заради минималноста на q, што исто така би значело дека $f(q) = 0$, што е невозможно. Заклучуваме дека q е прост и дека $f(q) \neq 0$. **(1п)**

Следно ќе докажеме (со математичка индукција) дека $f(q^k) = (q^{k-1} + \ldots + q + 1)f(q)$ за сите $k \geq 1$. Случајот $k = 1$ е тривијален. Ако претпоставиме дека ова важи за дадено $k \geq 1$ и ставиме $a = q^k$ и $b = q$, добиваме

$$\begin{gathered} 2f(q^{k+1}) = (q+1)f(q^k) + (q^k+1)f(q) = \\ (q+1)(q^{k-1} + \ldots + q + 1)f(q) + (q^k+1)f(q) = \\ 2(q^k + \ldots + q + 1)f(q). \end{gathered}$$

Тоа значи дека $f(q^{k+1}) = (q^k + \cdots + q + 1)f(q)$, со што индуктивниот доказ е завршен. **(2п)**
Сега можеме да избереме $k = p$. Да забележиме дека

$$f(q^p) = (q^{p-1} + \ldots + q + 1)f(q) = \Phi_p(q) \cdot f(q),$$

каде што $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$. Освен тоа, $f(q) \neq 0$, па

$$\frac{f(q^p)}{f(q)} = \Phi_p(q). \quad \textbf{(2п)}$$

Нека r е прост делител на $\Phi_p(q)$. Бидејќи $(q-1)\Phi_p(q) = q^p - 1$, имаме дека $r|q^p - 1$. Нека $t = \text{ord}_r(q)$. Тогаш $t|p$, па или $t = 1$ или $t = p$. Ако $t = 1$, имаме дека $r|q-1$ и $r|\Phi_p(q)$, па $r|p$, што значи дека $r = p$. Ако $t = p$, имаме $p|r-1$ од малата теорема на Ферма, па r може да се запише како $px+1$. **(2п)**

Тоа значи дека сите прости делители од $\frac{f(q^p)}{f(q)}$ се или p или се од облик $px+1$. Сега заклучокот следува од основната теорема на аритметика. **(2п)** $\square$